

# Control Basado en Predicción no Lineal para un Robot Móvil Omnidireccional con Retardo a la Entrada

V. Fragoso-Rubio, M. A. Vallejo-Alarcón y M. Velasco-Villa

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av.  
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail  
{vfragoso, mvallejoa, velasco}@cinvestav.mx}*

---

Resumen. En este trabajo se presenta el diseño de un predictor no lineal para el modelo cinemático de un robot móvil omnidireccional, el cual se encuentra sujeto al efecto de un retardo de tiempo constante en la señal de control. El retardo es compensado mediante la predicción de los estados futuros del sistema. Se muestra que el predictor propuesto es capaz de estimar los estados del sistema  $\tau$  unidades de tiempo en el futuro. Los valores futuros estimados son utilizados para diseñar una retroalimentación que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias. La convergencia de los errores de predicción y seguimiento del sistema en lazo cerrado se muestra por medio de la utilización de una funcional de Lyapunov–Krasovskii.

*Palabras Clave:* Retardos de tiempo, predicción no lineal, robot móvil omnidireccional, seguimiento de trayectorias.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de control de sistemas con retardo de tiempo en la señal de entrada, y/o equivalentemente, a la salida en el caso de sistemas invariantes en el tiempo, ha sido tratado extensivamente en la literatura en los últimos años y tiene dos vertientes principales que analizan el caso de sistemas lineales o el caso de sistemas no lineales, Kolmanovskii and Myshkis [1992], Hale [1997]. Las soluciones presentadas pasan por ignorar el retardo afectando el sistema o en buscar una aproximación del mismo mediante, por ejemplo, una aproximación de Padé, Niculescu [2001].

Un enfoque que ha sido extensamente utilizado en el caso lineal, es la consideración de la predicción del estado futuro del sistema, donde el llamado Predictor de Smith (Smith [1957]) ha tenido un papel muy importante en el caso de sistemas estables en lazo abierto. Para el caso de sistemas inestables en lazo abierto se han propuesto modificaciones al esquema original, Palmor [1996]. La compensación de los efectos de retardos de tiempo se ha realizado también mediante el enfoque de asignación finita del espectro por medio de un esquema alternativo de predicción, Manitius and Olbrot [1979], Krstic [2009], que se ha implementado considerando su aproximación finita, Mirkin [2004]. La predicción en el caso de sistemas no lineales se ha abordado en trabajos como Bekiaris-Liberis [2014], Zuo et al. [2016].

La consideración de retardos de tiempo en robótica móvil ha tratado fundamentalmente el caso lineal mediante

aproximaciones de los vehículos, Olfati-Saber and Murray [2004]. El caso no lineal se ha abordado considerando principalmente el modelo cinemático de los vehículos, tanto en tiempo continuo, Sira-Ramírez et al. [2010b], Sira-Ramírez et al. [2010a], como en tiempo discreto, Velasco-Villa et al. [2007], Santos et al. [2018].

En este trabajo se presenta el problema de seguimiento de trayectorias para un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos de tiempo a la entrada. Se presenta una solución basada en la predicción de los valores futuros de los estados, mediante el uso de un predictor–observador no lineal del vehículo. Se muestra, mediante el uso de una funcional completa de Lyapunov, que el problema se resuelve para un valor de retardo que depende de las constantes de diseño del predictor propuesto.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta el modelo cinemático del robot móvil omnidireccional retardado y se describe la obtención de su modelo equivalente en adelante. En la Sección 3 se desarrolla el predictor no lineal propuesto y se muestra que bajo el argumento de entradas de control acotadas se obtiene la predicción buscada. En la Sección 4 se muestra la solución al problema de seguimiento de trayectorias utilizando los estados futuros estimados, mientras que en la Sección 5 se muestra la convergencia de los errores involucrados. La Sección 6 muestra las conclusiones del trabajo.

## 2. ROBOT MÓVIL OMNIDIRECCIONAL

En el análisis del problema de seguimiento de trayectorias en robótica móvil es común la utilización del modelo

---

\* Trabajo parcialmente apoyado por el proyecto Conacyt 254329.

cinemático del robot bajo estudio, Canudas de Wit et al. [1996]. El robot móvil omnidireccional considerado en este trabajo se describe en la Figura 1.

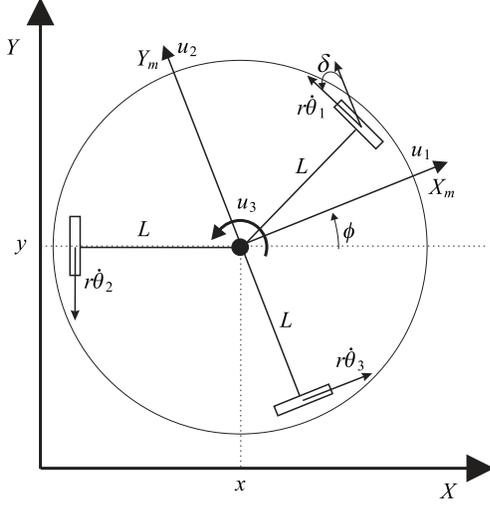


Figura 1. Configuración del robot móvil omnidireccional.

Las restricciones de movilidad y direccionalidad en el plano  $X - Y$  en las ruedas del robot descrito en la Figura 1 producen,

$$J_1 R(\phi) \dot{\xi}(t) + J_2 \dot{\theta}(t) = 0 \quad (1)$$

donde,  $J_2 = rI$  y

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin \delta & \cos \delta & L \\ -\sin \delta & -\cos \delta & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}$$

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además  $\xi(t) = [x(t), y(t), \phi(t)]^T$  representa el vector de estados con  $(x, y)$  un punto en el plano y  $\phi$  la orientación del vehículo con respecto al eje  $X$ . En la misma figura,  $(u_1, u_2)$  representan vectores de velocidad lineal mientras que  $u_3$  representa la velocidad angular del robot, respecto al marco de referencia móvil  $X_m - Y_m$ . Las velocidades angulares de las ruedas están dadas por  $\dot{\theta}(t) = [\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dot{\theta}_3(t)]^T$  con un radio común  $r$ .  $L$  representa la distancia del centro del robot a cada una de las ruedas y  $\delta$  es el ángulo entre la dirección de la velocidad de la rueda con respecto al marco móvil  $X_m - Y_m$ .

Nótese que el modelo cinemático del robot móvil omnidireccional se obtiene fácilmente a partir de la Figura 1, en función de las velocidades  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , en la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

y la relación entre las velocidades  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y las velocidades angulares de las ruedas está dada por,

$$\begin{bmatrix} r\dot{\theta}_1(t) \\ r\dot{\theta}_2(t) \\ r\dot{\theta}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta & -\cos \delta & -L \\ \sin \delta & \cos \delta & -L \\ -1 & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Entonces, con respecto a las velocidades de las ruedas, el modelo cinemático resulta,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -(J_1 R(\phi))^{-1} J_2 \dot{\theta}(t) = -R^T(\phi) J_1^{-1} J_2 \dot{\theta}(t) \\ &= -r R^T(\phi) J_1^{-1} \dot{\theta}(t) \end{aligned}$$

esto es,

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (4)$$

Cuando se realiza un control a distancia del robot omnidireccional, esto es, que el robot realice una tarea predefinida en un lugar y el controlador se encuentre en una posición remota, se induce un retardo de  $\tau$  unidades de tiempo en la comunicación de la señal de control, reescribiéndose el modelo (4), bajo estas condiciones, en la forma,

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t - \tau). \quad (5)$$

### 2.1 Representación en adelanto

Considérese ahora el cambio de variable,

$$w(t) = \xi(t + \tau) \quad (6)$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t + \tau) \\ y(t + \tau) \\ \phi(t + \tau) \end{bmatrix}.$$

Entonces se obtiene,

$$\dot{w}(t) = \dot{\xi}(t + \tau) = -r(J_1 R(\phi(t + \tau)))^{-1} \dot{\theta}(t)$$

con lo cual,

$$\dot{w}(t) = -r(J_1 R(w_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (7)$$

## 3. PREDICTOR-OBSERVADOR PROPUESTO

El estimador de los valores futuros del sistema (5) se diseñará como un observador retardado para el sistema en adelanto (7), para tal efecto, considere entonces el sistema libre de retardo (7),

$$\dot{w}(t) = -r(J_1 R(w_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t).$$

Es posible entonces proponer el predictor-observador tipo Luenberger (Luenberger [1971]),

$$\dot{\hat{w}}(t) = -r(J_1 R(\hat{w}_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t) + \lambda e_w(t - \tau) \quad (8)$$

donde se define el error de predicción como,

$$e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t). \quad (9)$$

*Observación 1.* Nótese que para mantener la causalidad en el predictor (8) se ha considerado la inyección del error de predicción, retardado  $\tau$  unidades de tiempo,

$$\begin{aligned} e_w(t - \tau) &= w(t - \tau) - \hat{w}(t - \tau) \\ &= \xi(t) - \hat{\xi}(t). \end{aligned}$$

Es importante remarcar que la utilización del error  $e_w(t)$  en el tiempo  $t$  no es posible dado que,

$$e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t) = \xi(t + \tau) - \hat{w}(t)$$

donde  $\xi(t + \tau)$  no se encuentra disponible para su utilización.

La dinámica del error de predicción  $e_w(t)$  toma la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_w(t) &= \dot{w}(t) - \dot{\hat{w}}(t) \\ &= -r(J_1 R(w_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t) + r(J_1 R(\hat{w}_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t) \\ &\quad - \lambda e_w(t - \tau)\end{aligned}$$

considerando que  $J_1 R(w_3(t))^{-1} = R^T(w_3(t))J_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{e}_w(t) &= -r [R^T(w_3(t))J_1^{-1} - R^T(\hat{w}_3(t))J_1^{-1}] \dot{\theta}(t) \\ &\quad - \lambda e_w(t - \tau)\end{aligned}$$

esto es,

$$\dot{e}_w(t) = -\lambda e_w(t - \tau) - r [R^T(w_3(t)) - R^T(\hat{w}_3(t))] J_1^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (10)$$

Nótese ahora que,

$$\begin{aligned}R^T - \hat{R}^T &= \begin{bmatrix} \cos w_3 - \cos \hat{w}_3 & -\sin w_3 + \sin \hat{w}_3 & 0 \\ \sin w_3 - \sin \hat{w}_3 & \cos w_3 - \cos \hat{w}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \sin \alpha_1 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) & -2 \cos \alpha_1 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) & 0 \\ 2 \cos \alpha_1 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) & -2 \sin \alpha_1 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -2 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) \begin{bmatrix} \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ -\cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde,

$$\alpha_1 = \frac{w_3 + \hat{w}_3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{e_{w_3}}{2} + \hat{w}_3$$

esto es,

$$R^T - \hat{R}^T = -2 \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) F(e_{w_3}, \hat{w}_3)$$

con,

$$F(e_{w_3}, \hat{w}_3) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{e_{w_3}}{2} + \hat{w}_3) & \cos(\frac{e_{w_3}}{2} + \hat{w}_3) & 0 \\ -\cos(\frac{e_{w_3}}{2} + \hat{w}_3) & \sin(\frac{e_{w_3}}{2} + \hat{w}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obteniéndose finalmente,

$$\dot{e}_w(t) = -\lambda e_w(t - \tau) + 2r \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) F(e_{w_3}, \hat{w}_3) J_1^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (11)$$

A partir de la ecuación anterior, es posible mostrar que la dinámica de la predicción de la orientación resulta,

$$\dot{e}_{w_3}(t) = -\lambda e_{w_3}(t - \tau) \quad (12)$$

que bajo una selección adecuada de  $\lambda$ , resulta asintóticamente estable, esto es,  $e_{w_3}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, se tiene que bajo la suposición adicional que  $\dot{\theta}(t) \leq \bar{\theta}$  para todo  $t$ , el término de perturbación,

$$2r \sin(\frac{e_{w_3}}{2}) F(e_{w_3}, \hat{w}_3) J_1^{-1} \dot{\theta}(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (13)$$

independientemente de la dinámica de  $e_{w_1}$  y  $e_{w_2}$ .

Consecuentemente, la convergencia del observador (11) depende de la dinámica del subsistema libre de perturbación,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{w_1}(t) &= -\lambda e_{w_1}(t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2}(t) &= -\lambda e_{w_2}(t - \tau)\end{aligned}$$

que puede siempre estabilizarse bajo una elección apropiada del parámetro de diseño  $\lambda$ .

*Observación 2.* Nótese que las condiciones anteriores para la convergencia de los errores de predicción no pueden

asegurarse cuando la señal de control  $\dot{\theta}(t)$  sea diseñada como una retroalimentación de estados del vehículo. Este caso se abordará en la siguiente sección.

#### 4. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

Considere el robot móvil omnidireccional retardado (5),

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t - \tau)$$

y una trayectoria deseada diferenciable,

$$\xi_d(t) = [x_d, y_d, \phi_d]^T$$

a la cual el vehículo debe converger asintóticamente.

Una retroalimentación que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias puede elegirse como,

$$\dot{\theta}(t - \tau) = -\frac{1}{r} J_1 R(\phi) \left\{ \dot{\xi}_d(t) - k e_\xi(t) \right\} \quad (14)$$

donde los errores de seguimiento están dados por,  $e_\xi(t) = [e_{\xi_1}, e_{\xi_2}, e_{\xi_3}]^T = [x - x_d, y - y_d, \phi - \phi_d]^T$ . El sistema en lazo cerrado (5)–(14) toma la forma,

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_d(t) - k e_\xi(t)$$

esto es,

$$\dot{e}_\xi(t) = -k e_\xi(t)$$

lo cual resuelve el problema.

El problema con el uso de la retroalimentación (14), es que ésta debe utilizarse en el tiempo  $t$ , lo que implica,

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r} J_1 R(\phi(t + \tau)) \left\{ \dot{\xi}_d(t + \tau) - k e_\xi(t + \tau) \right\}. \quad (15)$$

Es claro que la retroalimentación (15) requiere el uso de valores futuros de los estados los cuales no se tienen disponibles para su utilización. La retroalimentación (15), puede implementarse alternativamente al considerar los valores estimados futuros dados por el predictor (8) en la forma,

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r} J_1 R(\hat{w}_3(t)) \left\{ \dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t)) \right\} \quad (16)$$

donde se ha considerado  $w_d(t) = \xi_d(t + \tau)$ .

El sistema en lazo cerrado (7)–(16) produce,

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= -r(J_1 R(w_3(t)))^{-1} \dot{\theta}(t) \\ &= -r(J_1 R(w_3(t)))^{-1} \times \\ &\quad \times \left[ -\frac{1}{r} J_1 R(\hat{w}_3(t)) \left\{ \dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t)) \right\} \right] \\ &= R^T(w_3(t)) R(\hat{w}_3(t)) \left\{ \dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t)) \right\}.\end{aligned}$$

Nótese que,

$$\begin{aligned}R^T(w_3(t)) R(\hat{w}_3(t)) &= \\ &= \begin{bmatrix} \cos(w_3 - \hat{w}_3) & -\sin(w_3 - \hat{w}_3) & 0 \\ \sin(w_3 - \hat{w}_3) & \cos(w_3 - \hat{w}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2 \sin^2\left(\frac{e_{w_3}}{2}\right) & -\sin e_{w_3} & 0 \\ \sin e_{w_3} & 1 - 2 \sin^2\left(\frac{e_{w_3}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I + E(e_{w_3})\end{aligned}$$

con

$$E(e_{w_3}) = \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) & -\sin e_{w_3} & 0 \\ \sin e_{w_3} & -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \{I + E(e_{w_3})\} \{\dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t))\} \\ &= \dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t)) + E(e_{w_3}) \times \\ &\quad \times \{\dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t))\} \\ &= \dot{w}_d(t) - k(w(t) - w_d(t)) + ke_w(t) \\ &\quad + E(e_{w_3}) \{\dot{w}_d(t) - k(w(t) - w_d(t)) + ke_w(t)\} \end{aligned}$$

Entonces, definiendo  $e_s = w - w_d$  se obtiene,

$$\dot{e}_s = -ke_s + ke_w + E(e_{w_3}) \{\dot{w}_d - ke_s + ke_w\}. \quad (17)$$

Nótese además que  $e_\xi(t + \tau) = e_s(t)$ .

## 5. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA TOTAL

Considerando la entrada de control (16), la dinámica del error del predictor-observador se modifica en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{e}_w(t) &= -\lambda e_w(t - \tau) - r [R^T(w_3(t)) - R^T(\hat{w}_3(t))] J_1^{-1} \dot{\theta}(t) \\ &= -\lambda e_w(t - \tau) - r [R^T(w_3(t)) - R^T(\hat{w}_3(t))] J_1^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{r} J_1 R(\hat{w}_3(t)) \{\dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t))\} \right\} \\ &= -\lambda e_w(t - \tau) + [R^T(w_3(t)) - R^T(\hat{w}_3(t))] \times \\ &\quad \times \{R(\hat{w}_3(t)) \{\dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t))\}\} \\ &= -\lambda e_w(t - \tau) + E(e_{w_3}) \{\dot{w}_d(t) - k(\hat{w}(t) - w_d(t))\} \end{aligned}$$

esto es,

$$\dot{e}_w(t) = -\lambda e_w(t - \tau) + E(e_{w_3}) \{\dot{w}_d(t) - ke_s(t) + ke_w(t)\}. \quad (18)$$

A partir de los desarrollos anteriores se obtiene el sistema total de los errores de seguimiento y predicción en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{e}_s(t) &= -ke_s(t) + ke_w(t) + \gamma_1(t) \\ \dot{e}_w(t) &= -\lambda e_w(t - \tau) + \gamma_1(t) \end{aligned} \quad (19)$$

donde,

$$\gamma_1(t) = E(e_{w_3}) \{\dot{w}_d(t) - ke_s(t) + ke_w(t)\}. \quad (20)$$

La ecuación (19) puede reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_s(t) \\ \dot{e}_w(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -kI & kI \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s(t) \\ e_w(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s(t - \tau) \\ e_w(t - \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

A partir de la estructura de  $E(e_{w_3})$ , los errores (21) se escriben como,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_{s_1} \\ \dot{e}_{s_2} \end{bmatrix} &= -k \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ e_{s_2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} e_{w_1} \\ e_{w_2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) & -\sin e_{w_3} \\ \sin e_{w_3} & -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) \end{bmatrix} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} w_{d_1} \\ w_{d_2} \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ e_{s_2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} e_{w_1} \\ e_{w_2} \end{bmatrix} \right\} \\ \dot{e}_{s_3} &= -ke_{s_3} + ke_{w_3}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_{w_1} \\ \dot{e}_{w_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_1}(t - \tau) \\ e_{w_2}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) & -\sin e_{w_3} \\ \sin e_{w_3} & -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) \end{bmatrix} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} \dot{w}_{1_d} \\ \dot{w}_{2_d} \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ e_{s_2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} e_{w_1} \\ e_{w_2} \end{bmatrix} \right\} \\ \dot{e}_{w_3} &= -\lambda e_{w_3}(t - \tau). \end{aligned} \quad (22)$$

De lo anterior se obtiene el lazo cerrado sistema – observador,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_s &= -k\bar{e}_s + k\bar{e}_w + \bar{\gamma}_1 \\ \dot{\bar{e}}_w &= -\lambda\bar{e}_w(t - \tau) + \bar{\gamma}_1 \\ \dot{\bar{e}}_{s_3} &= -k\bar{e}_{s_3} + k\bar{e}_{w_3} \\ \dot{\bar{e}}_{w_3} &= -\lambda\bar{e}_{w_3}(t - \tau) \end{aligned} \quad (23)$$

donde,

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{E} \{\dot{\bar{w}}_d - k\bar{e}_s + k\bar{e}_w\}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{e}_s &= \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ e_{s_2} \end{bmatrix}, \bar{e}_w = \begin{bmatrix} e_{w_1} \\ e_{w_2} \end{bmatrix}, \bar{w}_d = \begin{bmatrix} w_{1_d} \\ w_{2_d} \end{bmatrix} \\ \bar{E} &= \begin{bmatrix} -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) & -\sin e_{w_3} \\ \sin e_{w_3} & -2 \sin^2 \left( \frac{e_{w_3}}{2} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema (23) es equivalente a,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_s \\ \dot{\bar{e}}_w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -kI & kI \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_s \\ \bar{e}_w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_s(t - \tau) \\ \bar{e}_w(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_{s_3} \\ \dot{\bar{e}}_{w_3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_{s_3} \\ \bar{e}_{w_3} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_{s_3}(t - \tau) \\ \bar{e}_{w_3}(t - \tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Con el fin de caracterizar las condiciones de convergencia de los errores de predicción y seguimiento, nótese ahora que,

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma}_1\| &\leq \|\bar{E}\| \|\dot{\bar{w}}_d - k\bar{e}_s + k\bar{e}_w\| \\ &\leq \|\bar{E}\| \|\dot{\bar{w}}_d\| + \|\bar{E}\| \|-k\bar{e}_s + k\bar{e}_w\| \\ &\leq \|\bar{E}\| \|\dot{\bar{w}}_d\| + |k| \|\bar{E}\| \left\| \begin{bmatrix} \bar{e}_s \\ \bar{e}_w \end{bmatrix} \right\| \end{aligned}$$

considerando que,

$$\bar{E}^T \bar{E} = \begin{bmatrix} \sin^2 e_{w_3} + 4 \sin^4 \frac{1}{2} e_{w_3} & 0 \\ 0 & \sin^2 e_{w_3} + 4 \sin^4 \frac{1}{2} e_{w_3} \end{bmatrix}$$

y como,

$$\begin{aligned} \sin^2 e_{w_3} + 4 \sin^4 \frac{e_{w_3}}{2} &= \\ &= \sin^2 e_{w_3} + 4 \frac{(1 - \cos e_{w_3})}{2} \frac{(1 - \cos e_{w_3})}{2} \\ &= 2(1 - \cos e_{w_3}) \\ &= 4 \sin^2 \frac{e_{w_3}}{2} \end{aligned}$$

se tiene entonces que,

$$\|E(e_{w_3})\| \leq \sqrt{4 \sin^2 \frac{e_{w_3}}{2}} = \left| 2 \sin \frac{e_{w_3}}{2} \right| \leq |e_{w_3}|$$

esto es,

$$\|\bar{\gamma}_1\| \leq |e_{w_3}| \|\dot{w}_d\| + |k| |e_{w_3}| \left\| \begin{array}{c} \bar{e}_s \\ \bar{e}_w \end{array} \right\|. \quad (26)$$

Antes de presentar el resultado principal del trabajo se mostrará la convergencia de los errores de orientación.

*Lema 3.* Considere el robot móvil omnidireccional retardado (5) y el predictor (8), además suponga que  $k, \lambda > 0$ . Los errores de orientación en predicción y seguimiento (25) convergen a cero si y sólo si el retardo  $\tau$  satisface,

$$\tau < \frac{\pi}{2\lambda}. \quad (27)$$

**Demostración.** Nótese que el sistema (25) puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{s_3} &= -k e_{s_3} + k e_{w_3} \\ \dot{e}_{w_3} &= -\lambda e_{w_3}(t - \tau) \end{aligned}$$

de donde es claro que bajo la consideración de  $k, \lambda > 0$ , la convergencia al origen de  $e_{w_3}$ , implica la convergencia de  $e_{s_3}$ . La convergencia de  $e_{w_3}$  se muestra al considerar su ecuación característica,

$$s + \lambda e^{-\tau s} = 0.$$

Considerando el límite de la estabilidad, esto es,  $s = j\omega$ , se obtiene  $j\omega - j\lambda \sin \tau\omega + \lambda \cos \tau\omega = 0$  equivalentemente,

$$\lambda \cos \tau\omega = 0, \quad \omega - \lambda \sin \tau\omega = 0.$$

Entonces,

$$\sin^2 \tau\omega + \cos^2 \tau\omega = \frac{\omega^2}{\lambda^2}$$

produciendo  $\omega = \lambda$  y como  $\cos \tau\omega = \cos \tau\lambda = 0$ , se obtiene el resultado. ■

La convergencia del subsistema perturbado (24) puede demostrarse considerando que (24) puede representarse alternativamente en la forma,

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + A_1 e(t - \tau) + \bar{\gamma} \quad (28)$$

con  $e = [\bar{e}_s^T, \bar{e}_w^T]^T$ ,  $A, A_1, \bar{\gamma}$  definidas apropiadamente a partir de (24) y donde la condición inicial satisface  $e(\theta) = \varphi(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  con  $\varphi \in \mathcal{PC}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  el espacio de las funciones continuas a pedazos en  $\mathbb{R}^n$  definidas en  $[-\tau, 0]$ .

Para el caso particular  $\bar{\gamma} = 0$ , es posible ver que bajo la consideración de que  $A + A_1$  sea una matriz Hurwitz, lo cual puede lograrse bajo una adecuada elección de  $k$  y  $\lambda$ , el sistema sin perturbación (28) es asintóticamente estable para un valor de  $\tau$  suficientemente pequeño Michiels et al. [2002]. El máximo valor de retardo  $\tau^*$  para el cual se tendrá un sistema asintóticamente estable depende de la elección de  $k$  y  $\lambda$ . Entonces, dadas  $k, \lambda$  que convierten a  $A + A_1$  en una matriz Hurwitz, es siempre posible estabilizar el sistema (28) para un valor constante de retardo  $\tau < \tau^*$ . Este hecho puede ser verificado, utilizando la Proposición 5.2.2, Capítulo 5 en Gu et al. [2003] o por medio del método de asignación de polos presentado en Michiels et al. [2002]. Entonces se considerará, sin pérdida de generalidad, que siempre existen  $k$  y  $\lambda$  tal que el sistema libre de perturbación (28) es estable para  $0 \leq \tau < \tau^*$ . Nótese que la estabilidad de este sistema es en realidad exponencial Bellman and Cooke [1963].

## 5.1 Funcional completa de Lyapunov

Para establecer la convergencia de los errores perturbados descritos en (24), equivalentemente (28), es posible considerar una funcional de Lyapunov del tipo completo Kharitonov [2013], esta funcional es de la forma,

$$V(e_t) = V_0(e_t) + \int_{-\tau}^0 e^\top(t + \theta) [(\tau + \theta) W_1] e(t + \theta) d\theta \quad (29)$$

donde  $e_t = e(t - \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  con,

$$\begin{aligned} V_0(e_t) &= e^\top(t) U(0) e(t) \\ &+ 2e^\top(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta) A_1 e(t + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 e^\top(t + \theta_1) A_1^\top \times \\ &\times \left[ \int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2) A_1 e(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1. \end{aligned} \quad (30)$$

La matriz de Lyapunov  $U(\cdot)$  en (30) está dada por,

$$U(\gamma) = \int_0^\infty K^\top(t) W K(t + \gamma) dt \quad (31)$$

donde  $K(t)$  es la matriz fundamental del sistema (28) sin perturbación y se considera,

$$W = W_0 + \tau W_1 \quad (32)$$

con matrices definidas positivas  $W_0$  y  $W_1$ .

La matriz de Lyapunov  $U(\gamma)$  satisface las siguientes propiedades Kharitonov [2013].

- P1  $\frac{dU(\gamma)}{d\gamma} = U(\gamma)A + U(\gamma - \tau)A_1$
- P2  $U(-\gamma) = U^\top(\gamma)$ ,  $\gamma > 0$  y  $U^\top(0) = U(0)$
- P3  $U(0)A + U(-\tau)A_1 + A^\top U(0) + A_1^\top U(\tau) = -W$

Es posible ahora, basados en Estrada-Sánchez et al. [2017], establecer el resultado de convergencia para el sistema (24)–(28).

*Lema 4.* Los errores de posición en predicción y seguimiento dados en (24)–(28) convergen asintóticamente al origen si  $k$  y  $\lambda$  se eligen tal que  $A + A_1$  sea una matriz Hurwitz.

**Demostración.** Nótese primero que el término  $\bar{\gamma}$  en (28) puede acotarse en la forma,

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma}\| &\leq \sqrt{2} \|\bar{\gamma}_1\| \\ &\leq \sqrt{2} |e_{w_3}| \|\dot{w}_d\| + \sqrt{2} |k| |e_{w_3}| \|e\| \end{aligned}$$

con lo cual, considerando  $\|\dot{w}_d\|$  una velocidad deseada acotada y como  $e_{w_3}$  converge a cero, el término exógeno,  $\sqrt{2} |e_{w_3}| \|\dot{w}_d\|$  resulta desvaneciente y por lo tanto no afecta las propiedades de convergencia del sistema (28). Entonces, la estabilidad puede analizarse en función del término de perturbación,

$$\|\bar{\gamma}\| \leq \sqrt{2} |k| |e_{w_3}| \|e\| = L_c \|e\|.$$

Como  $A + A_1$  es Hurwitz, existe  $\tau < \tau^*$  tal que el sistema (28) libre de perturbación es estable. Considerando las propiedades de la matriz de Lyapunov  $U(\gamma)$ , después de algunas manipulaciones, la derivada temporal de (29) a lo largo de los errores (28), produce,

$$\begin{aligned} \frac{dV(e_t)}{dt} &= -e^\top(t)W_0e(t) - \int_{t-\tau}^t e^\top(\xi)W_1e(\xi)d\xi \\ &+ 2e^\top(t)U(0)\bar{\gamma}(\cdot) \\ &+ 2\bar{\gamma}^\top(\cdot)\int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1e(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Seguendo puntualmente los desarrollos presentados en Estrada-Sánchez et al. [2017], es posible mostrar que,

$$\begin{aligned} \frac{dV(e_t)}{dt} &\leq -e^\top(t)W_0e(t) - \int_{t-\tau}^0 e^\top(t+\theta)W_1e(t+\theta)d\theta \\ &+ 2L_c v \|e(t)\|^2 + L_c v a_1 \tau \|e(t)\|^2 \\ &+ L_c v a_1 \int_{t-\tau}^0 \|e(t+\theta)\|^2 d\theta \end{aligned}$$

donde  $v = \max_{\theta \in [0, \tau]} \|U(\theta)\|$  y  $a_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A_1^\top A_1)}$ . Se obtiene entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dV(e_t)}{dt} &\leq -[\lambda_{\min}(W_0) - (2 + a_1\tau)L_c v] \|e(t)\|^2 \\ &- [\lambda_{\min}(W_1) - L_c v a_1] \int_{t-\tau}^0 \|e(t+\theta)\|^2 d\theta. \end{aligned} \quad (34)$$

Para mantener la estabilidad del sistema perturbado (28) se debe satisfacer,

$$\lambda_{\min}(W_0) > (2 + a_1\tau)L_c v, \quad \lambda_{\min}(W_1) > L_c v a_1.$$

Como  $L_c = \sqrt{2}|k||e_{w_3}|$  tiende a cero independientemente de la evolución de  $e(t)$ , se tiene que existe  $t > t_0$  para el cual  $\frac{dV(e_t)}{dt} < 0$ , con lo que el sistema perturbado (28) sigue siendo estable. ■

*Corolario 5.* El problema de seguimiento de trayectorias para el robot móvil con retardo a la entrada (5) tiene una solución mediante el predictor (8) si se satisfacen las condiciones de los Lemas 3 y 4, esto es, si,

$$\tau < \min \left\{ \frac{\pi}{2\lambda}, \tau^* \right\}.$$

## 6. CONCLUSIONES

Se analizó el problema de seguimiento de trayectorias para un robot móvil omnidireccional con retardo a la entrada. El efecto del retardo de tiempo se contrarrestó diseñando un predictor de estados futuros. La convergencia de los errores de predicción y seguimiento se analiza formalmente mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii utilizando una funcional completa de Lyapunov.

## REFERENCIAS

N. Bekiaris-Liberis. Simultaneous compensation of input and state delays for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 73:96 – 102, 2014. ISSN 0167-6911.

R. E. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-difference equations*. Rand Corporation, 1963.

C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of robot control*. Communications and control engineering. Springer-Verlag London, 1996. ISBN 978-1-4471-1501-4.

I. Estrada-Sánchez, M. Velasco-Villa, and H. Rodríguez-Cortés. Prediction-based control for nonlinear systems with input delay. *Mathematical Problems in Engineering*, doi.org/10.1155/2017/7415418, 2017.

K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.

J. K. Hale. *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1997.

V. L. Kharitonov. *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser, Boston, 2013.

V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Applied theory of functional differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1992.

M. Krstic. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer, 2009.

D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596 – 602, December 1971. ISSN 0018-9286.

A. Manitius and A. Olbrot. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):541–552, 1979.

W. Michiels, K. Engelborghs, P. Vansevenant, and D. Roose. Continuous pole placement for delay equations. *Automatica*, 38(5):747–761, 2002.

L. Mirkin. On the approximation of distributed- delay control laws. *System & control letters*, 51:331–342, 2004.

S. I. Niculescu. *Delay effects on stability: a robust control approach*, volume 269. Springer Science & Business Media, 2001.

R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time - delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(9):1520–1533, 2004.

Z. J. Palmor. Time-delay compensation Smith predictor and its modifications. *The control handbook*, 1:224–229, 1996.

J. Santos, A. Conceição, T. Santos, and H. Araújo. Remote control of an omnidirectional mobile robot with time-varying delay and noise attenuation. *Mechatronics*, 52: 7 – 21, 2018. ISSN 0957-4158.

H. Sira-Ramírez, C. López-Urbe, and M. Velasco-Villa. Trajectory-tracking control of an input delayed omnidirectional mobile robot. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2010 7th International Conference on*, pages 470–475. IEEE, 2010a.

H. Sira-Ramírez, M. Velasco-Villa, and A. Rodríguez Angeles. Trajectory tracking control of an input delayed monocycle. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 1184–1189. IEEE, 2010b.

O. J. M. Smith. Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5):217–219, 1957.

M. Velasco-Villa, B. del Muro-Cuellar, and A. Alvarez-Aguirre. Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot. In *Control & Automation, 2007. MED'07. Mediterranean Conference on*, pages 1 – 6. IEEE, 2007.

Z. Zuo, Z. Lin, and Z. Ding. Truncated prediction output feedback control of a class of Lipschitz nonlinear systems with input delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 63(8):788–792, Aug 2016. ISSN 1549-7747.