

# Optimización y Monitoreo en Línea de un Fotobiorreactor de Producción de Microalgas

Pedro Oviedo Mendoza\* Ixbalank Torres-Zúñiga\*  
Fernando López-Caamal\*\*

\* UGTO, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, C.A  
Telemática, Dpto de Ing. Electrónica, Carr. Salamanca-Valle de  
Santiago km 3.5 + 1.8 Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Gto.  
C.P. 36885. (e-mail: {p.oviedomendoza, ixbalank}@ugto.mx)

\*\* UGTO, División de Ciencias Naturales y Exactas Campus  
Guanajuato, Dpto. de Ing. Química, Noria Alta S/N; C.P. 36050;  
Guanajuato, Gto, (e-mail: fernando.lopez@ugto.mx)

---

Resumen. El modelado de un proceso de producción de microalgas es pieza clave para realizar posteriores acciones de control y optimización que permitan su cultivo a gran escala. El presente estudio propone un modelo de producción de microalgas que incluye las dinámicas de consumo del nutriente y del bióxido de carbono. Además, sobre el modelo propuesto, se desarrolla una estrategia de optimización para maximizar la producción de biomasa y un observador para estimar las variables de estado del proceso.

*Keywords:* Microalgas, Modelo dinámico, Observador de Luenberger, Optimización, Control  $H_\infty$ .

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el cultivo de microalgas, ha recibido una creciente atención gracias a su elevada tasa de crecimiento. Estos microorganismos tienen un gran potencial en la producción de biocombustibles, fertilizantes, alimentos acuícolas, suplementos alimenticios y cosméticos (Hernández Pérez y Labbé, 2014).

El modelado de las variables más representativas del proceso de cultivo de microalgas, permite diseñar un simulador del proceso e implementar estrategias de control y optimización. Particularmente, existen modelos dinámicos en continuo que exhiben dinámicas del consumo de sustrato, como los desarrollados por Bernard (2011) y Mairet et al. (2011). Sin embargo, carecen de variables relacionadas al consumo de  $CO_2$ . Por otra parte, modelos como el de Filali et al. (2011) y He et al. (2012), describen dinámicas relacionadas al consumo de  $CO_2$ , pero ignoran el modelado del consumo de sustrato.

A fin de incrementar el potencial de producción de biomasa de estos microorganismos, surge la necesidad de un algoritmo que determine las condiciones óptimas de operación para maximizar la productividad del proceso. Además, la costosa y en ocasiones carente disponibilidad de sensores en hardware, necesarios para efectuar mediciones en línea de las variables más representativas del cultivo de microalgas, motivan al desarrollo de estrategias de estimación en línea.

Entonces, con la finalidad de unificar el modelado de las dinámicas de biomasa, sustrato, carbono inorgánico total (TIC) y cuota interna, este trabajo propone un

modelo dinámico en continuo para simular un cultivo en condiciones foto-autotróficas; su descripción se expone en la Sección 2. También, basado en el modelo propuesto, la Sección 3, describe un optimizador en línea para encontrar la entrada óptima que maximiza la productividad de biomasa de forma que se garantice implícitamente el mayor consumo sustrato y  $CO_2$ . Además, la Sección 4 propone un observador de Luenberger para estimar las variables de estado a partir del menor número de mediciones en línea. Los resultados de las pruebas de simulación, tanto para el observador como del optimizador desarrollados, se muestran en la Sección 5. Finalmente, la Sección 6 proporciona la conclusión del trabajo desarrollado.

## 2. MODELO DINÁMICO

El modelo propuesto es válido para un fotobiorreactor en continuo sujeto a condiciones foto-autotróficas. Se trata del sistema dinámico no lineal multivariable

$$\dot{x} = f(x) + g(u, w)$$

donde  $x$  es el vector de estados,  $u$  la entrada de control y  $w$  la entrada desconocida o perturbación. El modelo es representado en el Sistema (1) y basa las dinámicas de biomasa, sustrato y cuota interna de nitrógeno, en el modelo utilizado por Benavides et al. (2015); mientras que la evolución del TIC obedece a las dinámicas planteadas por Filali et al. (2011).

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \mu \cdot X - D \cdot X \\
\dot{S} &= -\rho X - D \cdot S + D \cdot S_{in} \\
\dot{Q} &= \rho - \mu \cdot Q \\
TIC &= -\mu \frac{X}{Y_{x/TIC}} - D \cdot TIC + K_{La} (CO_2^* - CO_{2liq}) \quad (1)
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_m \frac{S}{S + K_s} \\
\mu &= \mu_m \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) \left(\frac{E}{K_E + E}\right) \left(\frac{TIC}{K_{CL} \cdot X + TIC}\right) \\
CO_{2liq} &= \frac{TIC}{1 + \frac{K_1}{H^+} + \frac{K_1 K_2}{(H^+)^2}} \\
H^+ &= 10^{-pH} \\
CO_2^* &= \frac{PpCO_2}{H_v} \\
E &= \frac{(I_{in} - I_{out}) A_r}{V \cdot X} \\
I_{out} &= C_1 \cdot I_{in} \cdot X^{C_2}
\end{aligned}$$

El vector de estado incluye cuatro variables, ( $x = [X \ S \ Q \ TIC]^T$ ) donde,  $X$  en ( $gDW \cdot L^{-1}$ ) representa la concentración de biomasa en peso seco “Dry Weight”,  $S$  en ( $gN \cdot L^{-1}$ ) corresponde al sustrato (nitrógeno) presente en el medio,  $Q$  en ( $gN \cdot gDw^{-1}$ ) es la cuota interna de nitrógeno que representa la fracción de nitrógeno por unidad de peso seco y  $TIC$  en ( $mol \ TIC \cdot L^{-1}$ ) representa la concentración de carbono inorgánico total después de la disociación del  $CO_2$  en el agua. A fin de homogeneizar las unidades de biomasa entre los modelos base, se aplicó el factor de conversión  $1 \times 10^9$  células  $\approx 0.02$  ( $gDW$ ) sugerido por Essmann (2011). Las entradas del Sistema (1) son la tasa de dilución  $D$ , la concentración del sustrato de entrada  $S_{in}$ , la presión parcial de dióxido de carbono  $PpCO_2$  y la intensidad de luz  $I_{in}$ . Un resumen de la nomenclatura empleada se muestra en la Tabla 1.

En los subsecuentes desarrollos, se consideran al porcentaje de alimentación de dióxido de carbono y al flujo de entrada como las únicas entradas que pueden variar en el tiempo. Aunque estas variables no aparecen explícitamente en el Sistema (1), se consideran como entradas ya que son parámetros asociados a una configuración real. En específico, la tasa de dilución depende implícitamente del flujo de entrada  $D = Q_{in}/V$ ; y la presión parcial de dióxido de carbono  $PpCO_2$ , se define a partir de la presión total  $P_{Gas}$  y el porcentaje de  $CO_2$  contenido en el gas de entrada del biorreactor.

En adelante, se considera al flujo de entrada  $Q_{in}$  como la entrada de control ( $u$ ). Por otro lado, el porcentaje de  $CO_2$  funge como una perturbación en el optimizador ( $w_p$ ) y como una entrada desconocida ( $w_d$ ) en el observador.

### 3. OPTIMIZADOR

El algoritmo optimizador, detallado en la Sección 3.1, plantea maximizar la productividad de biomasa del biorreactor representado por el Sistema (1). Formalmente, el problema de optimización se define como:

Tabla 1. Resumen de la nomenclatura utilizada en el modelo propuesto (Benavides et al., 2015; Filali et al., 2011)

Símbolo	Descripción
$\mu$	Tasa de crecimiento específica
$\rho$	Tasa de absorción del sustrato
$D$	Tasa de dilución
$Q_{in}$	Flujo de entrada
$S_{in}$	Concentración del sustrato de entrada
$Y_{x/TIC}$	Coefficiente de rendimiento
$K_{La}$	Coefficiente de transferencia de masa
$pH$	Nivel de pH
$CO_2^*$	Concentración de $CO_2$ en la interfaz
$CO_{2liq}$	Concentración de $CO_2$ acuoso
$PpCO_2$	Presión parcial de $CO_2$
$H_v$	Constante de Henry
$\mu_m$	Tasa de crecimiento específica máxima
$Q_m$	Mínima cuota de nitrógeno
$E$	Luz accesible por célula
$C_1$ y $C_2$	Constantes dependientes de la geometría
$H^+$	Concentración de iones de hidrógeno
$K_1$ y $K_2$	Constantes de equilibrio
$I_{in}$ e $I_{out}$	Intensidad de luz. Incidente y saliente
$A_r$ y $V$	Área iluminada del biorreactor
$V$	Volumen del biorreactor
$K_E$	Constante de saturación media de E
$K_{CL}$	Constante de limitación de TIC
$K_s$	Constante de saturación media de nitrógeno
$\rho_m$	Máxima tasa de absorción de sustrato

$$\max_u \text{Prod}(u, w_p)$$

sujeto a:

$$\dot{x} = f(x) + g(u, w_p)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

$$w_{p\min} \leq w_p \leq w_{p\max},$$

cuya función objetivo:

$$\text{Prod}(u, w_p) = X(u, w_p) \cdot \frac{u}{V},$$

corresponde a la productividad, definida como la multiplicación de la biomasa ( $X$ ) y la tasa de dilución ( $u/V$ ) en estado estacionario. Los intervalos  $[u_{\min}, u_{\max}]$  y  $[w_{p\min}, w_{p\max}]$  corresponden a los límites mínimo y máximo de las entradas controlada y desconocida, respectivamente.

Dada la naturaleza variante en el tiempo del modelo dinámico a optimizar, el problema de optimización implica el acoplamiento de un algoritmo de búsqueda de valores extremos (máximos) con una función objetivo generada tras la solución en línea del Sistema (1). Particularmente, se empleó el algoritmo de búsqueda dorada (Bertsekas, 1999).

#### 3.1 Algoritmo de búsqueda dorada

Sea  $g$  una función objetivo unimodal, estática y dependiente de una sola variable  $\alpha$ . Según la metodología de Bertsekas (1999), este algoritmo localiza el valor máximo de la función  $g(\alpha)$ , a partir de un intervalo de búsqueda acotado  $[\alpha_k, \bar{\alpha}_k]$ . Para esto, dentro de dicho intervalo, se generan los puntos de prueba:  $b_k = \alpha_k + a(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)$  y  $\bar{b}_k = \bar{\alpha}_k - a(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)$ . Estos últimos, se evalúan sobre

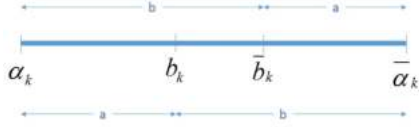


Figura 1. División del intervalo de búsqueda de acuerdo con la proporción dorada.

la función objetivo para generar un nuevo intervalo de donde se garantiza la existencia del valor extremo.

Como se observa en la Figura 1, la separación de los puntos  $b_k$  y  $\bar{b}_k$  es equidistante respecto a los extremos del intervalo de acuerdo con la proporción dorada ( $b/a = (a+b)/b = \varphi$ ). Conocido el valor del segmento  $a$ , se evalúa la función objetivo  $g(\alpha)$  en los puntos  $\alpha_k, \bar{\alpha}_k, b_k$  y  $\bar{b}_k$ . Así, el algoritmo disminuye la región de incertidumbre, creando el nuevo intervalo de búsqueda reducido  $[\alpha_{k+1}, \bar{\alpha}_{k+1}]$  a partir de las siguientes condiciones:

- Si  $g(\bar{b}_k) > g(b_k)$ , entonces:
  - $\alpha_{k+1} = b_k, \bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\alpha}_k$ ; si  $g(\bar{b}_k) > g(\bar{\alpha}_k)$
  - $\alpha_{k+1} = \bar{b}_k, \bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\alpha}_k$ ; si  $g(\bar{b}_k) < g(\bar{\alpha}_k)$
- Si  $g(b_k) = g(\bar{b}_k)$ , entonces:
  - $\alpha_{k+1} = b_k, \bar{\alpha}_{k+1} = \bar{b}_k$
- Si  $g(\bar{b}_k) < g(b_k)$ , entonces:
  - $\alpha_{k+1} = \alpha_k, \bar{\alpha}_{k+1} = \bar{b}_k$ ; si  $g(b_k) > g(\alpha_k)$
  - $\alpha_{k+1} = \alpha_k, \bar{\alpha}_{k+1} = b_k$ ; si  $g(b_k) < g(\alpha_k)$

El algoritmo termina, hasta que la diferencia entre los valores extremos del  $k$ -ésimo intervalo alcanza una tolerancia preestablecida  $\varepsilon$  (explícitamente:  $|\bar{\alpha}_k - \alpha_k| \leq \varepsilon$ ). De esta manera, el valor óptimo corresponde al valor medio del  $k$ -ésimo intervalo  $\alpha_{opt} = (\bar{\alpha}_k - \alpha_k)/2$ .

La implementación del algoritmo considera despreciable el tiempo de cómputo requerido para encontrar la entrada óptima. La única restricción es que el periodo de optimización no debe ser mayor al periodo de variación de la perturbación ( $w_p$ ).

#### 4. OBSERVADOR DE ESTADOS

El estimador de estados propuesto es un observador de Luenberger lineal. Su ganancia es calculada mediante un problema de optimización convexa. Específicamente, el cálculo de dicha ganancia, plantea resolver de forma simultánea restricciones de diseño bajo la norma  $H_\infty$  para minimizar el efecto de la entrada desconocida y la inclusión de un modelo politópico para aportar robustez ante incertidumbres paramétricas.

El observador está basado en la linealización del Sistema (1), alrededor de un punto de operación  $(x^*, u^*, w_d^*)$ . El enfoque de linealización empleado es la aproximación por series de Taylor. Se considera que el punto de operación es un punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = f(x) + g(u, w_d)$ , lo cual produce el siguiente modelo linealizado:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_u\bar{u}(t) + B_w\bar{w}_d(t)$$

donde,  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $B_u \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  y  $B_w \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  corresponden a la matriz de estado, la matriz de entradas de control y la matriz de entradas desconocidas, respectivamente. El modelo linealizado está referido a un sistema cuyo origen se encuentra desplazado hasta el punto de equilibrio. Es decir, para este sistema, el vector de estado, las entradas

controlada y la entrada desconocida se definen como:  $\bar{x} = x - x^*$ ,  $\bar{u} = u - u^*$  y  $\bar{w}_d = w_d - w_d^*$ , respectivamente. Cabe mencionar que, el sistema linealizado dejará de ser una aproximación válida, a medida que los estados se alejen del punto de equilibrio y las entradas  $u$  y  $w_d$  se alejen de la condición  $(u^*, w_d^*)$ .

El observador de Luenberger tiene la forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_u\bar{u}(t) + L \cdot C (\bar{x}(t) - \hat{x}(t))$$

donde  $\hat{x}$  es el vector de estado estimado,  $L \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  es la ganancia de observador, las matrices  $A$  y  $B_u$  provienen de la linealización del sistema no lineal y  $C \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  es la matriz de salida.

La robustez ante entradas desconocidas es garantizada, minimizando la norma  $H_\infty$  de la función de transferencia que relaciona la entrada desconocida con el error de estimación. Sea  $e(t)$  el error de estimación, definido como la diferencia entre el vector de estado  $x(t)$  y el vector de estado estimado  $\hat{x}(t)$ . Según Scherer y Weiland (2000), el enfoque  $H_\infty$ , implica la existencia de una función de transferencia entre  $e(t)$  y  $w(t)$ , definida como:  $G_{we}(s) = (sI - (A - LC))^{-1}B_w$ , sobre la cual se desea minimizar, el supremo del valor singular máximo de la respuesta en frecuencia del sistema, definido como:

$$\|G_{we}\| = \sup_{w_d \in \mathbb{R}} \sigma_{max}(G_{we}(jw))$$

El estudio de Torres Zúñiga et al. (2017) reporta que, para el cálculo de la ganancia, el modelo dinámico linealizado puede extenderse a un modelo politópico de  $N_p$  vértices. Resultante de la interpolación convexa de un conjunto de  $N_p$  modelos, el modelo politópico tiene la finalidad de lograr robustez ante incertidumbres paramétricas. La definición formal del modelo politópico, expresada en el Sistema (2), implica, que cada matriz  $A_k$  y  $C_k$ , pertenece a los polítopos  $\mathfrak{D}_A$  y  $\mathfrak{D}_C$ , respectivamente, para  $k = 1, \dots, N_p$  y  $0 \leq \lambda_k \leq 1$ . Es decir, siguiendo este enfoque y asumiendo un vector de parámetros inciertos  $p_k$ , cada vértice del polítopo corresponde a un par  $(A_k, C_k)$ , generado tras la linealización del sistema (1) alrededor del punto  $(x^*, u^*, w_d^*)$ . La observabilidad se verifica cuando la matriz de observabilidad  $O = [C \ CA \ CA^2 \ CA^3]'$  exhibe rango completo para cada vértice  $(A_k, C_k)$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_A &= \left\{ A \in \mathbb{R}^{N \times N} : A = \sum_{k=1}^{N_p} \lambda_k A_k, \sum_{k=1}^{N_p} \lambda_k = 1 \right\} \\ \mathfrak{D}_C &= \left\{ C \in \mathbb{R}^{M \times N} : C = \sum_{k=1}^{N_p} \lambda_k C_k, \sum_{k=1}^{N_p} \lambda_k = 1 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Las restricciones de diseño bajo la norma  $H_\infty$  pueden ser expresadas mediante un conjunto de desigualdades lineales matriciales (LMI) (Chilali y Gahinet, 1996). Por lo tanto, adoptando este enfoque para el observador propuesto, el cálculo de la ganancia se plantea como el problema de optimización semidefinida (3) para cada par  $(A_k, C_k)$  del modelo politópico.

minimizar  $\gamma$   
 $\gamma, W_1, W_2$

sujeto a  $\gamma > 0, W_1 > 0$

$$\begin{bmatrix} M'_k + M_k + 2\alpha W_1 & W_1 B_w & I_N \\ B'_w W_1 & -\gamma I_N & 0_{1,N} \\ I_N & 0_{N,1} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -r W_1 & M_k \\ M'_k & -r W_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(M'_k + M_k) & \cos(\theta)(M_k - M'_k) \\ \cos(\theta)(M'_k - M_k) & \sin(\theta)(M_k + M'_k) \end{bmatrix} < 0$$

donde,  $M_k = (W_1 A_k - W_2 C_k)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $W_1 = W'_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $W_2 = W_1 L \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  y  $\|G_{we}\|_\infty = \gamma$  para  $k \in \{1, 2\}$ ; así, la ganancia del observador se obtiene como  $L = W_1^{-1} W_2$ .

Adicionalmente, las restricciones del problema de optimización permiten el confinamiento de los polos en lazo cerrado del sistema modelo-observador para cada punto  $z = x + jy \in \mathbb{C}$  y pueden sintonizarse mediante los parámetros  $(\alpha, r, \theta)$ , que limitan las regiones de estabilidad definidas por el Sistema (4).

$$\begin{aligned} \text{Region 1:} & \quad x < -\alpha < 0, & \quad \forall \alpha > 0 \\ \text{Region 2:} & \quad |x + y| < r, & \quad \forall r > 0 \\ \text{Region 3:} & \quad \tan \theta \cdot x = |-y|, & \quad \forall (0 < \theta < \pi/2) \end{aligned} \quad (4)$$

## 5. PRUEBAS Y RESULTADOS

Esta sección expone el desempeño del optimizador y observador desarrollados. La Sección 5.1 especifica las condiciones sobre las cuales se llevó a cabo la prueba del optimizador y se realiza una discusión de los resultados obtenidos a partir de un mapeo de productividad fuera de línea. De forma análoga, la Sección 5.2 detalla los términos sobre los que se llevó a cabo la prueba del observador robusto y se realiza un análisis cualitativo de su desempeño.

### 5.1 Evaluación del optimizador

La prueba se realizó bajo las siguientes consideraciones:  $I_{in}$  se estableció en 150 ( $\mu \text{ mol} \cdot \text{foton} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) y  $S_{in}$  en 0.5 ( $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ ). La salida óptima se calculó y actualizó cada 6 horas en la simulación. La perturbación, ilustrada en la Figura 2, corresponde al porcentaje de  $CO_2$  en el gas de entrada y toma valores dentro del intervalo acotado  $0.75\% \leq w_p \leq 2\%$ . Se eligió una forma escalonada para mantener un valor de entrada constante en un intervalo de tiempo suficientemente grande para que la productividad (mostrada en la Figura 3) alcance el estado estacionario.

La Figura 4 muestra la entrada generada por el optimizador, correspondiente al flujo  $Q_{in}$ . El intervalo de búsqueda para esta variable fue establecido en:  $1 \leq Q_{in} \leq 6$  (en  $\text{L} \cdot \text{d}^{-1}$ ). El mapeo fuera de línea de la Figura 5 se calculó mediante 400 muestras para la productividad en estado estacionario. Dichas muestras fueron generadas con las combinaciones de 20 flujos de entrada (equiespaciados entre el intervalo de búsqueda) y 20 niveles de  $CO_2$  (equiespaciados entre 1 y 5%).

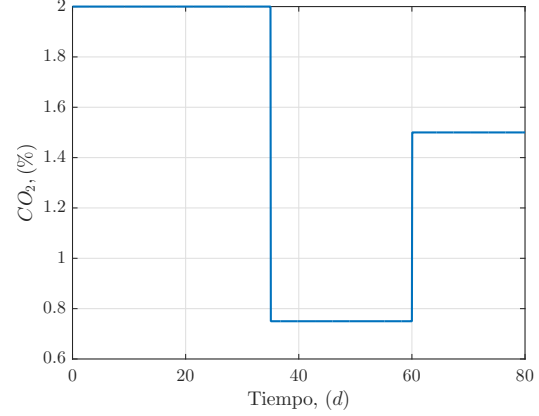


Figura 2. Perturbación ( $w_p$ ).

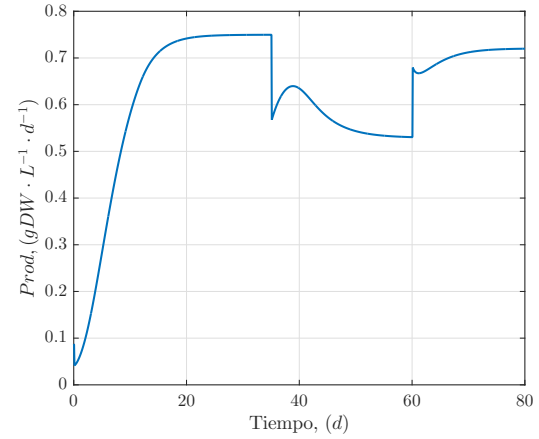


Figura 3. Productividad tras la optimización

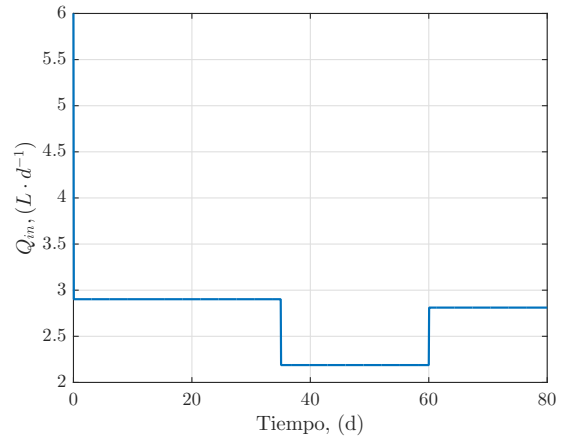


Figura 4. Entrada óptima generada por el optimizador

En el intervalo de 0 a 35 días de la Figura 4, se observa una correcta acción de control generada por el optimizador ( $Q_{in} = 2.9021$ ) para un 2% de  $CO_2$ . Lo anterior, se verifica en el mapeo de la Figura 5, donde se aprecia que, para ese nivel de flujo y una concentración de  $CO_2$  en 2%, la productividad es  $0.7495 (\text{gDW} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{d}^{-1})$ . Este nivel de productividad es también consistente con el observado en la Figura 3, dentro del intervalo de tiempo antes mencionado.

Por otro lado, la respuesta dinámica de la biomasa tras la optimización, exhibe un mayor crecimiento en el intervalo

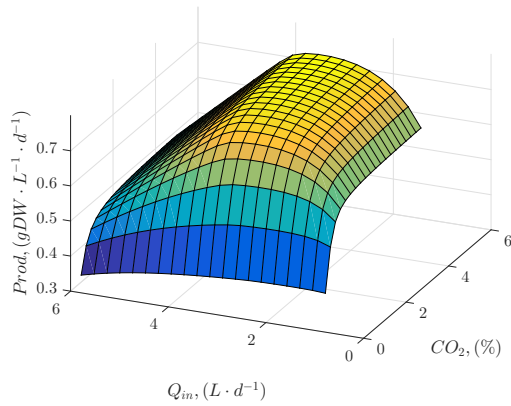


Figura 5. Mapeo de productividad fuera de línea.

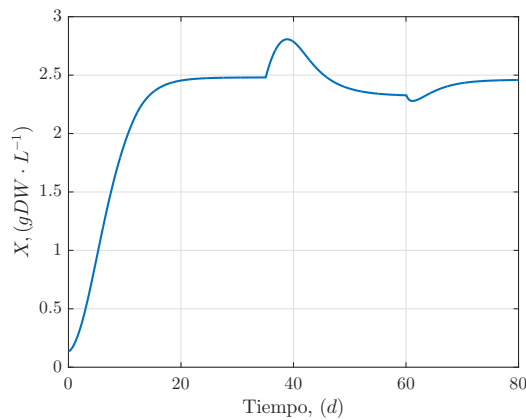


Figura 6. Biomasa producida tras la optimización.

de tiempo de 35 a 60 días, cuando el  $CO_2$  llega a 0.75 % (ver Figura 6). En este periodo, la biomasa muestra un crecimiento máximo, aun cuando la productividad alcanza su nivel más bajo. Lo anterior tiene sentido tomando en cuenta que, a bajos niveles de flujo de entrada, la productividad disminuye y la biomasa tiene un mayor tiempo de asimilación de sustrato al incrementar el tiempo de retención hidráulica.

En el intervalo de 60 a 80 días, la entrada de control mantiene un valor muy cercano al observado en el intervalo de 0 a 25 días. Este comportamiento se verifica con el mapeo de la Figura 5. Ahí se observa, que para mantener la productividad máxima bajo concentraciones de  $CO_2$  mayores a 2% el flujo óptimo no aumenta significativamente. Mientras que, mantener la productividad máxima bajo concentraciones de  $CO_2$  entre 0.5 y 1.9 %, representa mayores variaciones en el flujo de entrada.

## 5.2 Evaluación del observador

El desempeño del estimador fue evaluado mediante la comparativa de las dinámicas no lineales del modelo (NL) y la estimación del observador robusto (OUH), para cada una de las cuatro variables de estado (Figuras 7 a 10).

Las condiciones de prueba fueron:  $S_{in} = 1$  ( $g \cdot L^{-1}$ ),  $Q_{in} = 2.9$  ( $L \cdot d^{-1}$ ) e  $I_{in} = 120$  ( $\mu mol \cdot foton \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ). Se estableció al porcentaje de  $CO_2$  en el gas de entrada como la entrada desconocida. Esta última de forma senoidal (con periodo de 40 días y una amplitud

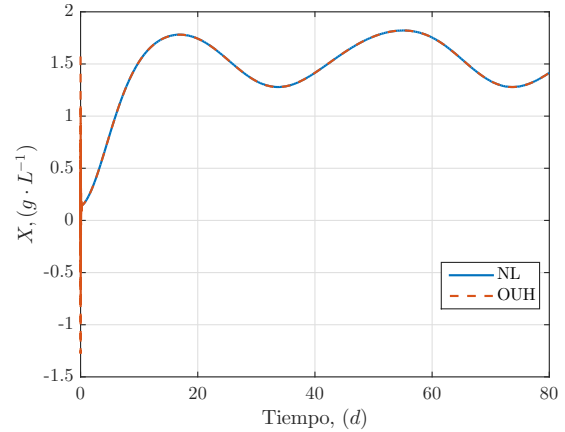


Figura 7. Estimación de la biomasa.

acotada entre 0.5 y 0.9 %) con la finalidad representar los cambios graduales y oscilantes de  $CO_2$  en el biogas producido por un digestor anaerobio.

Motivado por su efecto multiplicativo dentro del modelo (que permite englobar implícitamente incertidumbres debidas a otros parámetros), se eligieron las máximas tasas de crecimiento  $\mu_m$  y de absorción de sustrato  $\rho_m$  como parámetros inciertos. Así, el vector incertidumbre nominal  $p = [\mu_m, \rho_m]$ , mediante una variación de  $\pm 5\%$ , define los vectores de incertidumbre máximo  $\bar{p} = [\bar{\mu}_m, \bar{\rho}_m]$  y mínimo  $\underline{p} = [\underline{\mu}_m, \underline{\rho}_m]$ .

El modelo politópico resultante se formó mediante los vértices,  $(\bar{A}, \bar{C})$  y  $(\underline{A}, \underline{C})$  generados a partir de la linealización del Sistema (1) sujeto a las condiciones  $(\bar{p}, Q_{in}, w_d = 0.9)$  y  $(\underline{p}, Q_{in}, w_d = 0.5)$ , respectivamente. La matriz de observabilidad resultó de rango completo para la evaluación del modelo politópico, considerando una matriz de salida  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  en cada vértice.

A fin de garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado, el problema de optimización semidefinida (solucionado con el resolvidor libre SeDuMi integrado en Matlab), fue sintonizado para ubicar los polos en lazo cerrado en la mitad izquierda del plano imaginario. En este caso, se empleó la triada de parámetros:  $(\alpha = 0.01, r = 100, \theta = \pi/9)$ , encontrando un valor de 0.366 para la norma  $H_\infty$  ( $\gamma$ ).

La estimación de la biomasa  $X$  establecida como variable medida, mostró una rápida convergencia a las dinámicas no lineales del modelo (Figura 7). Sin embargo, el sustrato, la cuota interna de nitrógeno y el TIC en las Figuras 8, 9 y 10 muestran un tiempo de convergencia mayor. Este comportamiento se debe a que no fue posible sintonizar una ganancia capaz de acelerar las dinámicas sin incurrir en errores numéricos. Es decir, para las condiciones evaluadas, el problema de optimización se vuelve infactible al especificar  $\alpha > 0.01$ .

A pesar de que la ganancia de observador no mostró una elevada velocidad de convergencia en la estimación, se observa un buen comportamiento para todas las variables de estado. El menor desempeño en la estimación lo muestra el sustrato (Figura 8). Esto último puede asociarse con posibles errores de aproximación, debido a que el observador empleado utiliza una versión linealizada de un modelo no lineal.



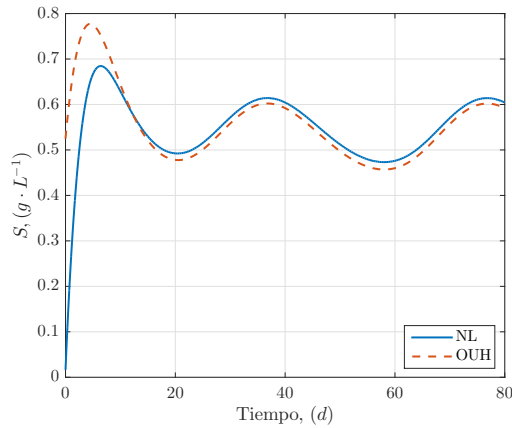


Figura 8. Estimación del sustrato.

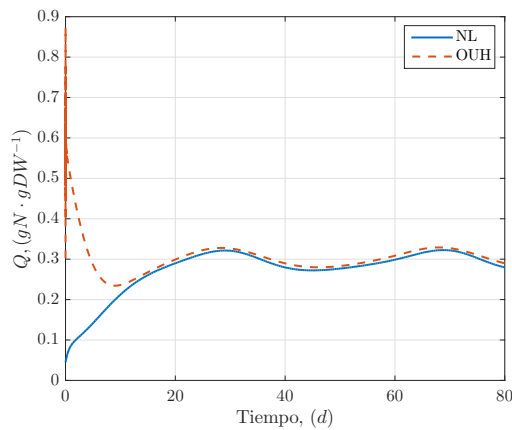


Figura 9. Estimación de la cuota interna.

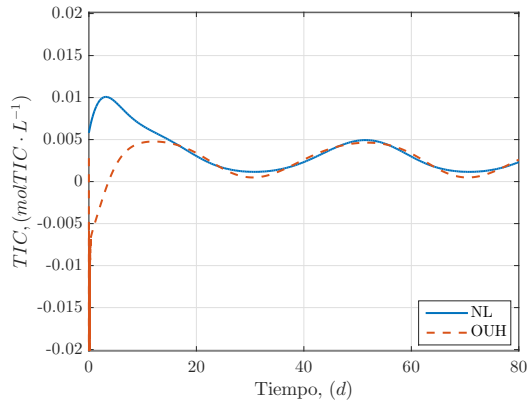


Figura 10. Estimación del TIC.

## 6. CONCLUSIÓN

Se propuso un modelo dinámico de un proceso de producción de microalgas para modelar la biomasa, sustrato, cuota interna de nitrógeno y carbono inorgánico total. Un optimizador en línea fue implementado sobre el modelo propuesto con el fin de maximizar la productividad de biomasa. Se comprobó que para las condiciones de prueba, el flujo de entrada óptimo se encuentra entre 2 y 3 ( $L \cdot d^{-1}$ ) y concentraciones de  $CO_2$  mayores a 2 % no producen un incremento significativo en la productividad.

También, fue propuesto un observador de Luenberger para la estimación de estados, a partir de la medición de bio-

masa. La ganancia del observador fue diseñada robusta, considerando una perturbación senoidal, (correspondiente al porcentaje de  $CO_2$  en el gas de entrada). Además, la robustez del observador ante variaciones del 5 % en la tasa de crecimiento específica máxima  $\mu_m$  y la tasa de absorción máxima  $\rho_m$  fue garantizada mediante la inclusión de un modelo politópico. El observador demostró un buen desempeño comparado con las dinámicas no lineales del modelo. Como trabajo a futuro, se pretende validar el trabajo desarrollado, mediante datos experimentales.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado por la Universidad de Guanajuato a través del proyecto institucional No. 155 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca de maestría 796885.

## REFERENCIAS

- Benavides, M., Coutinho, D., Hantson, A.L., Van Impe, J., y Wouwer, A.V. (2015). Robust luenberger observers for microalgal cultures. *Journal of Process Control*, 36, 55–63.
- Bernard, O. (2011). Hurdles and challenges for modelling and control of microalgae for co2 mitigation and biofuel production. *Journal of Process Control*, 21(10), 1378–1389.
- Bertsekas, D.P. (1999). *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont.
- Chilali, M. y Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  in design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on automatic control*, 41(3), 358–367.
- Essmann, M. (2011). *Determinación de parámetros biológicos de la microalga Isochrysis aff. galbana: comparación de un fotobio reactor continuo versus un cultivo batch*. Ph.D. thesis, Tesis para optar por el título de Ingeniero en acuicultura. Universidad austral de Chile.
- Filali, R., Tebbani, S., Dumur, D., Isambert, A., Pareau, D., y Lopes, F. (2011). Growth modeling of the green microalga chlorella vulgaris in an air-lift photobioreactor. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 10603–10608.
- He, L., Subramanian, V.R., y Tang, Y.J. (2012). Experimental analysis and model-based optimization of microalgae growth in photo-bioreactors using flue gas. *biomass and bioenergy*, 41, 131–138.
- Hernández Pérez, A. y Labbé, J.I. (2014). Microalgas, cultivo y beneficios. *Revista de biología marina y oceanografía*, 49(2), 157–173.
- Mairet, F., Bernard, O., Lacour, T., y Sciandra, A. (2011). Modelling microalgae growth in nitrogen limited photobioreactor for estimating biomass, carbohydrate and neutral lipid productivities. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 10591–10596.
- Scherer, C. y Weiland, S. (2000). Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3.
- Torres Zúñiga, I., Vargas, A., y Moreno, J.A. (2017). On the practical estimation of unknown inputs for polytopic lti systems. *IET Control Theory & Applications*.