

Control de la dinámica longitudinal inspirado en la dinámica Phugoid

Ivan Rosario-Gabriel * H. Rodriguez-Cortes *

* Dept. de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica,
CINVESTAV-IPN, México, D. F., C. P. 07360,
(e-mail: ivan.rosario@cinvestav.mx, hrodriguez@cinvestav.mx)

Abstract: Este artículo presenta un controlador longitudinal de aeronaves inspirado en la ecuación polar de la hodógrafa, una de las invariantes de la dinámica Phugoid descrita por Lanchester. El procedimiento para el diseño del control sigue las consideraciones hechas por Lanchester para desarrollar la dinámica de Phugoid, es decir, el ángulo de ataque se considera cuasi-estático. Es posible diseñar un controlador para la dinámica longitudinal, el cual requiere conocer las características físicas de la aeronave. Las propiedades de estabilidad en lazo cerrado se basan en considerar que el coeficiente de sustentación es acotado. Se realizaron simulaciones utilizando el simulador de vuelo X-Plane para validar el controlador propuesto.

Keywords: dinámica Phugoid, Lanchester, control longitudinal, X-Plane.

1. INTRODUCCIÓN

Las fuerzas aerodinámicas y el momento que actúan sobre las aeronaves representan un desafío para el diseño del control longitudinal, debido a su estructura y la dificultad de modelarlos. La ley de similitud dinámica es la base estándar para el modelo anterior, sin embargo, no se pueden interpretar como los gradientes de las funciones de energía potencial, se refiere al lector al trabajo de Von Mises (1959). Las funciones de la energía potencial juegan un papel importante en la descripción Lagrangiana o Hamiltoniana de los sistemas mecánicos, como se puede observar en Ortega et al. (2013), Lee et al. (2017). La estructura particular de las fuerzas aerodinámicas y el momento, impiden la aplicación de los esquemas de control basados en energía. Dichos esquemas proporcionan una función de Lyapunov para reorganizar las funciones de energía cinética y potencial del sistema mecánico, Bloch et al. (2000), Bloch et al. (2001), Ortega et al. (2002).

Las funciones invariantes para la dinámica longitudinal de la aeronave sin fuerzas externas son, la Lagrangiana y Hamiltoniana para los sistemas mecánicos, la energía total de la aeronave y la ecuación polar de la hodógrafa, que se puede observar en Lanchester (1907). Esta última, requiere que el empuje generado por la planta de energía y la fuerza de arrastre se cancelen entre sí y que la fuerza de sustentación total sea igual al peso de la aeronave. Las invariantes del movimiento son fundamentales para los métodos de energía o el método general de Energía-Casimir Bloch and Marsden (1990). Los autores de Bhatta and Leonard (2008), Bhatta and Leonard (2004), muestran la utilidad de la ecuación polar de la hodógrafa construyendo una función de Lyapunov basada en la ecuación polar de la hodógrafa y la prueba de estabilidad de

movimientos deslizantes usando la teoría de perturbación singular, para extender los métodos basados en la energía a vehículos con fuerzas hidrodinámicas.

A. Lambregts introdujo una interpretación diferente del control basado en la energía para los problemas de la dinámica de las aeronaves conocido como sistema de control total de la energía (TECS), que se basa en construir a partir de las funciones Hamiltoniana y Lagrangiana la tasa de energía total y la tasa de distribución de energía y los relaciona con la forma en que los pilotos manejan la energía, dicha interpretación considera un modelo dinámico lineal longitudinal de la aeronave como se puede ver en Lambregts (1983).

Este artículo propone un algoritmo de control para mandar a valores constantes la velocidad aerodinámica y el ángulo de vuelo de la dinámica longitudinal de la aeronave. El procedimiento del diseño del control considera que el ángulo de ataque es cuasi-estático; esta consideración coincide con las suposiciones de Lanchester para desarrollar la dinámica Phugoid, donde se presenta la convergencia instantánea de la velocidad de cabeceo a cero, Kwatny et al. (2012). Adicionalmente, se asume una estructura conocida de los coeficientes aerodinámicos y, para establecer las propiedades de estabilidad de las dinámicas en lazo cerrado, también se asume que el coeficiente de sustentación es acotado y con un ángulo de ataque pequeño. El controlador diseñado usa información de dos parámetros estimados, los cuales son diseñados para compensar las fuerzas aerodinámicas y el momento desconocidos. Para las simulaciones se usa el simulador de vuelo X-Plane con el cual se evalúa el rendimiento del algoritmo de control.

El resto de este documento tiene la siguiente estructura. La Sección II describe el modelo dinámico longitudinal de

la aeronave. La Sección III presenta la dinámica Phugoid de Lanchester y la ecuación polar de la hodógrafa. La Sección IV presenta el procedimiento del diseño control. La Sección V muestra las simulaciones usando el simulador de vuelo X-Plane, y la Sección VI finaliza este trabajo con algunas conclusiones.

2. DINÁMICA LONGITUDINAL DE LA AERONAVE

Esta sección presenta las ecuaciones dinámicas que describen la dinámica longitudinal de la aeronave. La Figura 1 muestra la condición de vuelo longitudinal de la aeronave. Asumiendo que la atmósfera circundante está en reposo, las ecuaciones de la dinámica longitudinal de la aeronave son¹:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= Tc_\alpha - D - mgs_\gamma \\ mV\dot{\gamma} &= Ts_\alpha + L - mgc_\gamma \\ \dot{\alpha} &= q - \frac{1}{mV} (Ts_\alpha + L - mgc_\gamma) \\ I_{yy}\dot{q} &= M \end{aligned} \quad (1)$$

donde m es la masa de la aeronave, I_{yy} es su inercia alrededor del eje lateral, g es la constante de gravedad, α es el ángulo de ataque, q es la velocidad angular de cabeceo, V es la velocidad, y γ es el ángulo de vuelo. La aeronave está bajo la acción de las siguientes fuerzas y momento: L es la fuerza de sustentación aerodinámica, D es la fuerza de arrastre aerodinámica, T el empuje de la planta de energía y M el momento de cabeceo. Se

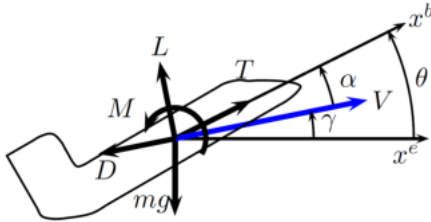


Fig. 1. Fuerzas y momento actuando en el plano longitudinal de la aeronave.

asume que las fuerzas aerodinámicas y el momento tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} L &= q_s V^2 C_L(\alpha, q, V, \delta_e) \\ D &= q_s V^2 C_D(\alpha) \\ M &= q_s \bar{c} V^2 (C_M(\alpha, q, V) + C_{M\delta_e} \delta_e) \end{aligned} \quad (2)$$

con $q_s = \frac{1}{2}\rho S$, \bar{c} es la cuerda media aerodinámica, ρ la densidad del aire, S el área alar, y δ_e es la deflexión del elevador.

Nota 1. Todos los estados de la aeronave influyen en todos los coeficientes aerodinámicos. En Gavilan et al. (2014) el coeficiente de sustentación se asume como una función solo del ángulo de ataque; esta suposición también se aplica para el coeficiente de arrastre. En Liu and Chen (2016) el coeficiente de arrastre es también considerado

¹ A continuación, $c_x = \cos(x)$, $s_x = \sin(x)$ y $t_x = \tan(x)$ para cualquier ángulo x .

como una función para la entrada de control del elevador. Todas estas suposiciones son para propósitos del diseño del controlador.

En este trabajo también se asume que el peso de la aeronave y el empuje de la planta de energía pueden ser parametrizados de la siguiente manera:

$$T = \kappa mg \delta_T, \quad mg = q_s V_d^2 C_{L_w} \quad (3)$$

donde $\kappa \in [0.25, 0.3]$ es el empuje disponible con respecto al peso de la aeronave, $\delta_T \in [0, 1]$ es la posición del acelerador, V_d la velocidad aerodinámica deseada y C_{L_w} es un coeficiente de sustentación que iguala al peso de la aeronave a una velocidad aerodinámica deseada V_d .

Incorporando las ecuaciones (2) y (3) en (1), la dinámica longitudinal de la aeronave puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{g} &= \kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_D(\alpha)}{C_{L_w}} - s_\gamma \\ \frac{V}{g} \dot{\gamma} &= \kappa \delta_T s_\alpha + \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_L(\alpha, q, V, \delta_e)}{C_{L_w}} - c_\gamma \\ \dot{\alpha} &= q - \frac{g}{V} \left(\kappa \delta_T s_\alpha + \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_L(\alpha, q, V, \delta_e)}{C_{L_w}} - c_\gamma \right) \\ \bar{I}_{yy} \dot{q} &= \bar{c} \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{C_M(\alpha, q, V)}{C_{L_w}} + \frac{C_{M\delta_e} \delta_e}{C_{L_w}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

con $\bar{I}_{yy} = \frac{I_{yy}}{mg}$.

El objetivo del control es el siguiente: Diseñar una estrategia de control para la posición del acelerador y elevador, que lleve a la velocidad aerodinámica y el ángulo de vuelo hacia las referencias deseadas V_d y γ_d , respectivamente.

3. DINÁMICA PHUGOID PARA AERONAVES

En 1908, W. F. Lanchester describió las trayectorias que, bajo ciertas condiciones, la dinámica longitudinal de la aeronave puede realizar Von Mises (1959). Una condición crucial de los cálculos de Lanchester es que la velocidad de cabeceo converja rápidamente a cero. Esta condición se puede indicar con respecto a las características de la aeronave de la siguiente manera. Si el momento de cabeceo tiende a contrarrestar cualquier cambio en el ángulo de ataque de la aeronave y la inercia es despreciable, se deduce que la velocidad de cabeceo pasa a cero instantáneamente; por lo tanto, se tiene:

$$\bar{c} \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{C_M(\alpha, 0, V)}{C_{L_w}} + \frac{C_{M\delta_e}}{C_{L_w}} \delta_e \right) = 0$$

Para cumplir con la ecuación anterior, el ángulo de ataque alcanza un valor cuasi-estático $\alpha = \bar{\alpha}(\delta_e, V)$. La convergencia instantánea de la velocidad de cabeceo a cero y la convergencia forzada del ángulo de ataque a un valor cuasi-estático desacopla la dinámica de la velocidad aerodinámica y del ángulo de vuelo de la dinámica rotacional longitudinal. Lanchester considera una segunda condición, esta condición establece que el empuje de la planta de energía cancela exactamente a la fuerza de arrastre aerodinámica. Por lo tanto, la

dinámica de la velocidad aerodinámica y el ángulo de vuelo, desacopladas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{g} &= -s_\gamma \\ \frac{V}{g} \dot{\gamma} &= \frac{V^2}{V_d^2} \frac{\bar{C}_L(\bar{\alpha})}{C_{Lw}} - c_\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

con $\bar{C}_L(\bar{\alpha}) = C_L(\bar{\alpha}) + t_{\bar{\alpha}} C_D(\bar{\alpha})$. La dinámica Phugoid de Lanchester tiene las siguientes interesantes propiedades. La energía total de la aeronave definida como

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + m g \int_0^t V(\tau) s_\gamma(\tau) d\tau$$

es una invariante para el desacoplamiento de la dinámica longitudinal de las aeronaves. En Lanchester (1907), calculó que la ecuación polar de la hodógrafa dada por:

$$C = \frac{1}{3g} \frac{V^3}{V_d^3} - \frac{1}{g} \frac{V}{V_d} c_\gamma$$

es también una invariante para el desacoplamiento de la dinámica longitudinal. La derivada en el tiempo de C a lo largo de las trayectorias del sistema (5) viene dada por:

$$\dot{C} = \frac{s_\gamma}{V_d} \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{\bar{C}_L(\bar{\alpha})}{C_{Lw}} - 1 \right)$$

Lanchester también asumió que la aeronave genera la suficiente fuerza de sustentación para soportar su peso a la velocidad aerodinámica deseada V_d Von Mises (1959). Como resultado, $\bar{C}_{L(\bar{\alpha})} = C_{Lw}$ y

$$\dot{C} = 0$$

Debido a la propiedad de invariancia que la ecuación polar de la hodógrafa comparte con la función de energía para la dinámica longitudinal de Phugoid, algunos investigadores habían investigado las posibilidades de usar la ecuación polar de la hodógrafa para construir una función de Lyapunov Bhatta and Leonard (2008).

4. DISEÑO DEL CONTROL

Esta sección presenta el desarrollo del diseño de una estrategia de control para llevar a la velocidad aerodinámica y el ángulo de vuelo a las referencias deseadas. La suposición principal es que el ángulo de ataque es cuasi-estático. Lanchester justificó la naturaleza cuasi-estática del ángulo de ataque, asumiendo que el momento de cabeceo pasa instantáneamente a cero sin ningún cambio en la velocidad de cabeceo para una aeronave con inercia despreciable. En este trabajo, la suposición de Lanchester se lleva a cabo por un controlador para la dinámica rotacional de la aeronave. Por consiguiente, el procedimiento de control comienza por diseñar un algoritmo de control para la dinámica rotacional de la aeronave; después de esto, se diseña un algoritmo de control para la velocidad aerodinámica y la dinámica del ángulo de vuelo utilizando una función de Lyapunov construida a partir de la ecuación polar de la hodógrafa.

Con respecto al ángulo de cabeceo θ , la dinámica rotacional longitudinal está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q \\ \bar{I}_{yy} \dot{q} &= \bar{c} \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{C_M(\alpha, q, V)}{C_{Lw}} + \frac{C_{M\delta_e}}{C_{Lw}} \delta_e \right) \end{aligned} \quad (6)$$

La relación entre el ángulo de cabeceo, el ángulo de ataque y el ángulo de vuelo se define de la siguiente manera:

$$\gamma = \theta - \alpha$$

por lo tanto, la referencia para el ángulo de cabeceo θ_d se selecciona como $\alpha + \gamma_d$. El error del ángulo de cabeceo es:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_d = \theta - \alpha - \gamma_d \quad (7)$$

Nota 2. Dados V_d y γ_d hay un conjunto de ecuaciones algebraicas para el cálculo de la referencia α y δ_e . Sin embargo, tales ecuaciones algebraicas tienen las características aerodinámicas de la aeronave; por lo tanto, para evitar resolverlo la referencia para el ángulo de cabeceo se define como en la ecuación (7).

El algoritmo de control para conducir $\tilde{\theta}$ y q a cero se basa en el enfoque de backstepping. Se define

$$q_1 = q + k_p s_{\tilde{\theta}}$$

como resultado, las siguientes ecuaciones describen la dinámica de $\tilde{\theta}$ y q_1 :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= -k_p s_{\tilde{\theta}} + q_1 \\ \dot{q}_1 &= \frac{\bar{c}}{\bar{I}_{yy}} \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{C_M(\alpha, q, V)}{C_{Lw}} + \frac{C_{M\delta_e}}{C_{Lw}} \delta_e \right) + k_p c_{\tilde{\theta}} q \end{aligned} \quad (8)$$

Para obtener la ecuación (8) se considera que α es cuasi-estático; por lo tanto, $\dot{\alpha} = 0$. Se supone que el coeficiente del momento de cabeceo tiene la siguiente estructura, para continuar el procedimiento del diseño del control.

$$\bar{C}_M(\alpha, q, V) = C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + C_{M_q} \frac{\bar{c}q}{2V} \quad (9)$$

con C_{M_0} , C_{M_α} y C_{M_q} los coeficientes de momento de cabeceo que se asumen constantes. Las siguientes definiciones son necesarias para diseñar un estimador basado en Lyapunov

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \frac{\bar{c}}{\bar{I}_{yy}} \begin{bmatrix} C_{M_0} & C_{M_\alpha} & C_{M_q} \\ C_{Lw} & C_{Lw} & C_{Lw} \end{bmatrix}^\top \\ \varphi_M &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \frac{\bar{c}q}{2V} \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (10)$$

Usando las definiciones en las ecuaciones (9) y (10), las ecuaciones diferenciales en (8) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= -k_p s_{\tilde{\theta}} + q_1 \\ \dot{q}_1 &= \frac{V^2}{V_d^2} (\Phi_M^\top \varphi_M + \bar{C}_{M\delta_e} \delta_e) + k_p c_{\tilde{\theta}} q \end{aligned} \quad (11)$$

con $\bar{C}_{M\delta_e} = \frac{\bar{c}}{\bar{I}_{yy}} \frac{C_{M\delta_e}}{C_{Lw}}$. Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$W = (1 - c_{\tilde{\theta}}) + \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_M^\top \Gamma \tilde{\Phi}_M$$

con $\tilde{\Phi}_M = \hat{\Phi}_M - \Phi_M$ y Γ una matriz definida positiva. La derivada en el tiempo a lo largo de las trayectorias de (11) está dada por:

$$\dot{W} = -k_p s_{\tilde{\theta}}^2 + s_{\tilde{\theta}} q_1 + q_1 \left[\frac{V^2}{V_d^2} (\Phi_M^\top \varphi_M + \tilde{C}_{M_{\delta_e}} \delta_e) + k_p c_{\tilde{\theta}} q \right] + \tilde{\Phi}_M^\top \Gamma \dot{\tilde{\Phi}}_M$$

A partir de la derivada en el tiempo de la función Lyapunov, la entrada del elevador y las dinámicas de los parámetros del estimador se definen como

$$\delta_e = \frac{1}{\tilde{C}_{M_{\delta_e}}} \left(-\hat{\Phi}_M^\top \varphi_M - \frac{V_d^2}{V^2} (k_d q_1 - s_{\tilde{\theta}} - k_p c_{\tilde{\theta}} q) \right) \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{\Phi}}_M = q_1 \frac{V_d^2}{V^2} \Gamma^{-1} \varphi_M$$

Reemplazando (12) en \dot{W} , se obtiene:

$$\dot{W} = -k_p s_{\tilde{\theta}}^2 - k_d q_1^2$$

Ahora, el esquema de control para la velocidad y la dinámica del ángulo de vuelo ha sido diseñado. A partir de la ecuación polar de la hodógrafa, se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$\bar{C} = \frac{1}{3g} \frac{V^3}{V_d^3} - \frac{1}{g} \frac{V}{V_d} c_{\tilde{\gamma}} - \frac{2}{3g} \quad (13)$$

con $\tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_d$. Esta función de Lyapunov es diferente a la función de Lyapunov propuesta en Bhatta and Leonard (2008) que también se basa en la ecuación polar de la hodógrafa. Note que:

$$\nabla \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} \frac{V^2}{V_d^3} - \frac{1}{g} \frac{1}{V_d} c_{\tilde{\gamma}} \\ \frac{1}{g} \frac{V}{V_d} s_{\tilde{\gamma}} \end{bmatrix} \quad \nabla^2 \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{2}{g} \frac{V}{V_d^3} & \frac{1}{g} \frac{1}{V_d} s_{\tilde{\gamma}} \\ \frac{1}{g} \frac{1}{V_d} s_{\tilde{\gamma}} & \frac{1}{g} \frac{V}{V_d} c_{\tilde{\gamma}} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la función de Lyapunov tiene un mínimo en $V = V_d$ y $\tilde{\gamma} = 0$. La ecuación de Lyapunov (13) se complementa como sigue, para considerar que el coeficiente de arrastre no se conoce e incluir una acción integral.

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3g} \frac{V^3}{V_d^3} - \frac{1}{g} \frac{V}{V_d} c_{\tilde{\gamma}} - \frac{2}{3g} + \frac{1}{2V_d} \tilde{C}_D^2 + \frac{K_i}{2V_d} \left[\int_0^t \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) d\tau \right]^2 \quad (14)$$

donde K_i es una ganancia de control y

$$\tilde{C}_D = C_D(\alpha) - \hat{C}_D + \beta_1(V/g) \quad (15)$$

con $\hat{C}_D - \beta_1(V/g)$ el coeficiente de arrastre estimado y $\beta_1(V/g)$ una función a definir. La definición del error en la ecuación (15) sigue la técnica de Immersion and Invariance propuesta en Astolfi and Ortega (2003). La derivada en el tiempo de \mathcal{C} a lo largo de las trayectorias de la dinámica longitudinal de la aeronave (4) está dada por:

$$\dot{\mathcal{C}} = \frac{1}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \left(\kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_D(\alpha)}{C_{Lw}} - s_{\tilde{\gamma}} \right) + \frac{s_{\tilde{\gamma}}}{V_d} \left(\kappa \delta_T s_\alpha + \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_L(\alpha, q, V, \delta_e)}{C_{Lw}} - c_{\tilde{\gamma}} \right) + \frac{\tilde{C}_D}{V_d} \left(-\dot{\hat{C}}_D + \frac{d\beta_1}{d(V/g)} \left(\kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_D(\alpha)}{C_{Lw}} - s_{\tilde{\gamma}} \right) + \frac{K_i}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \int_0^t \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) d\tau \right)$$

usando la ecuación (15), se tiene:

$$\dot{\mathcal{C}} = \frac{1}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \left(\kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{\hat{C}_D - \beta_1}{C_{Lw}} - s_{\tilde{\gamma}} + K_i \int_0^t \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) d\tau \right) + \frac{s_{\tilde{\gamma}}}{V_d} \left(\kappa \delta_T s_\alpha + \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_L(\alpha, q, V, \delta_e)}{C_{Lw}} - c_{\tilde{\gamma}} \right) + \frac{\tilde{C}_D}{V_d} \left(-\dot{\hat{C}}_D + \frac{d\beta_1}{d(V/g)} \left(\kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{\tilde{C}_D + \hat{C}_D - \beta_1}{C_{Lw}} - s_{\tilde{\gamma}} - \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \right) \right)$$

Definiendo

$$\delta_T = \frac{1}{\kappa c_\alpha} \left(\frac{V^2}{V_d^2} \frac{\hat{C}_D - \beta_1}{C_{Lw}} + s_{\tilde{\gamma}} - k_V \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) - K_i \int_0^t \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) d\tau \right) \quad (16)$$

$$\dot{\hat{C}}_D = l \left(\kappa \delta_T c_\alpha - \frac{V^2}{V_d^2} \frac{\hat{C}_D - \beta_1}{C_{Lw}} - s_{\tilde{\gamma}} - \frac{V^2}{V_d^2} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \right)$$

donde k_V es una ganancia de control, y se considera que $\beta_1 = l \frac{V}{g}$ con l una ganancia positiva. Sustituyendo (16) en la derivada en el tiempo de la función Lyapunov (14), se obtiene:

$$\dot{\mathcal{C}} = -\frac{k_V}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{l}{V_d} \tilde{C}_D^2 + \frac{s_{\tilde{\gamma}}}{V_d} \left(\kappa \delta_T s_\alpha + \frac{V^2}{V_d^2} \frac{C_L(\alpha, q, V, \delta_e)}{C_{Lw}} - c_{\tilde{\gamma}} \right) \quad (17)$$

El resultado principal de este artículo se puede establecer de la siguiente manera.

Proposición 1. Suponga que el ángulo de ataque es pequeño y cuasi-estático de modo que su derivada en el tiempo es cero. Suponga que el coeficiente de sustentación está acotado por arriba por un valor constante. Considere la dinámica longitudinal de la aeronave en lazo cerrado, con el algoritmo de control definido en las ecuaciones (12) y (16). Entonces, existen unas ganancias constantes k_p , k_d , K_i , k_V , l y una matriz definida positiva Γ tal que la dinámica en lazo cerrado tiene un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable en la velocidad

aerodinámica deseada y en el ángulo de vuelo, mientras que todas las demás señales están acotadas.

Prueba 1. Todos los cálculos para obtener los algoritmos del control y del estimador, consideran que la derivada en el tiempo del ángulo de ataque es cero. Ahora, como el ángulo de ataque es pequeño y el coeficiente de sustentación es acotado, de la ecuación (17) se tiene:

$$\dot{c} \leq -\frac{k_V}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - c_{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{l}{V_d} \tilde{C}_D^2 + \left| \frac{s_{\tilde{\gamma}}}{V_d} \right| \left(\frac{V^2}{V_d^2} \kappa_1 + 1 \right) \quad (18)$$

para algunas constantes positivas κ_1 . La convergencia de θ a cero implica convergencia de $\tilde{\gamma}$ a cero, y el controlador de la dinámica rotacional puede ser sintonizado para que sea rápido, por lo tanto $s_{\tilde{\gamma}}$ también converge rápidamente a cero. Como consecuencia,

$$\dot{c} \leq -\frac{k_V}{V_d} \left(\frac{V^2}{V_d^2} - 1 \right)^2 - \frac{l}{V_d} \tilde{C}_D^2 \quad (19)$$

y V converge a V_d .

Está claro que las suposiciones logran el resultado de la estabilidad, y es probable que la región de atracción del punto de equilibrio sea mínima. Por lo tanto, para validar el controlador propuesto, se seleccionó el simulador de vuelo X-Plane para ejecutar la dinámica de la aeronave.

5. SIMULACIONES

Para la simulación se utiliza el simulador de vuelo X-Plane con un modelo modificado de una aeronave de radio control conocida como NexStar Research (2018). El ala original de esta aeronave es rectangular; fue modificada para instalarle Flaps y unas puntas trapezoidales. La Figura 2 muestra el modelo X-Plane del NexStar modificado. El software DATCOM fue empleado para obtener



Fig. 2. NexStar Modificado.

una estimación de la derivada del momento de cabeceo DATCOM (2018). El diseño asistido por computadora de la aeronave se usó para determinar las características físicas de la misma, dichas características se muestran en la Tabla 1. Las ganancias del controlador y del estimador se determinaron usando un procedimiento de prueba y error, ver Tabla 2.

Se presentan dos pruebas, la primera muestra un cambio de velocidad aerodinámica de 18, 28 y 18 m/s , mientras γ_d se fija a cero. La velocidad aerodinámica deseada fue

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$m(kg)$	3.8	$g(m/s^2)$	9.81
$\rho(kg/m^3)$	0.96672	$I_{yy}(kgm^2)$	0.275
$\bar{c}(m)$	0.267	$S(m^2)$	0.4669
κ	0.3	$C_{M\delta_e}$	1.4

Tabla 1. Parámetros físicos del aeronave.

Ganancia	Valor	Ganancia	Valor
k_p	0.6	k_d	0.7
k_V	0.9	K_i	0.2
l	2	Γ	diag{1, 1, 1}

Tabla 2. Ganancias del controlador y estimador.

seleccionada de esta manera para probar el controlador bajo condiciones adversas, contrariamente al caso cuando las referencias deseadas son suaves. La Figura 3 muestra la evolución del error de la velocidad aerodinámica. Aunque la velocidad aerodinámica llega a la referencia deseada, los períodos transitorios no son suaves. El peor transitorio aparece cuando la aeronave reduce su velocidad. Este transitorio aparece porque el esquema de control usa el acelerador para controlar la velocidad aerodinámica y, dado que el motor no puede producir un giro contrario, el controlador tiene problemas para frenar la aeronave. La Figura 4 presenta la evolución del error del ángulo de vuelo. Una vez más, aparece el peor transitorio cuando la aeronave debe disminuir su velocidad aerodinámica. Sin embargo, en cualquier caso, el ángulo de vuelo converge a su referencia deseada. La Figura 5 muestra el comportamiento del ángulo de ataque y el ángulo de cabeceo durante el experimento. Como el ángulo de cabeceo y el ángulo de vuelo son ordenados para seguir el ángulo deseado, el ángulo de ataque permanece cerca de cero, después de los transitorios. Las Figuras 6 y 7 muestran

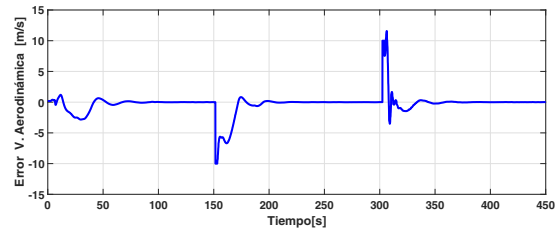


Fig. 3. Error de la velocidad aerodinámica, con $V_d = 18, 28, 18 m/s$

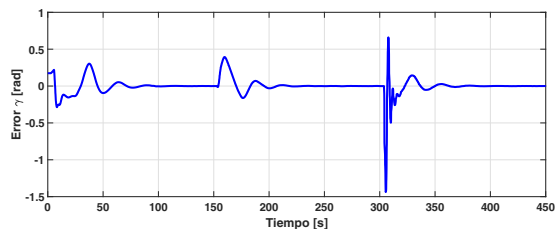


Fig. 4. Error del ángulo de vuelo γ .

la evolución de la velocidad de cabeceo y los coeficientes

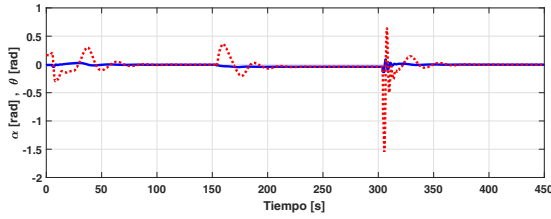


Fig. 5. Ángulo de cabeceo θ (línea punteada), ángulo de ataque α (línea continua)

estimados de arrastre y momento de cabeceo, respectivamente. Según lo predicho por los cálculos, permanecen acotados. La Figura 8 muestra la posición del acelerador

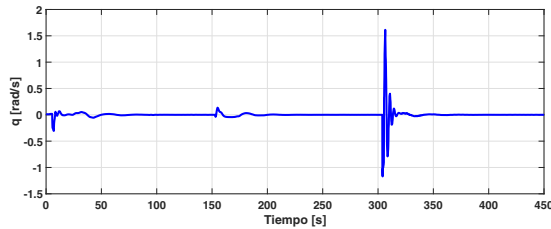


Fig. 6. Velocidad de cabeceo q .

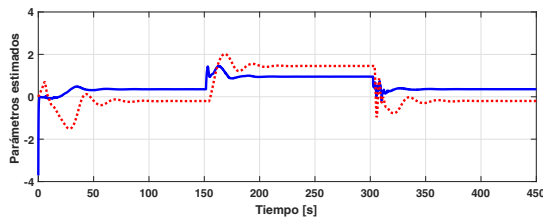


Fig. 7. Parámetros del estimador. $\hat{C}_D - \beta_1$ (línea continua), $\Phi_M^T \varphi_M$ (línea punteada).

y la entrada del elevador. Las entradas de control fueron caracterizadas para que el simulador de vuelo X-Plane pudiera interpretar sus valores.

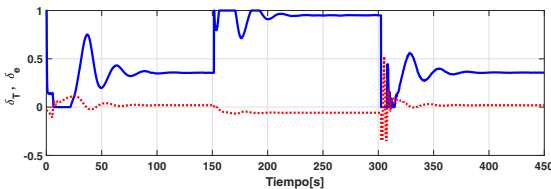


Fig. 8. Posición del acelerador δ_T (línea continua), entrada del elevador δ_e (línea punteada).

6. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un controlador para la dinámica longitudinal de una aeronave, inspirada en la dinámica de Phugoid desarrollada por Lancaster hace más de cien años. Bajo fuertes suposiciones es posible mostrar la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio deseado. El controlador se prueba usando el simulador de vuelo X-Plane. Las simulaciones se comportan según lo predicho por los cálculos.

REFERENCES

- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Bhatta, P. and Leonard, N.E. (2004). A lyapunov function for vehicles with lift and drag: Stability of gliding. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, 4101–4106. IEEE.
- Bhatta, P. and Leonard, N.E. (2008). Nonlinear gliding stability and control for vehicles with hydrodynamic forcing. *Automatica*, 44(5), 1240–1250.
- Bloch, A.M., Chang, D.E., Leonard, N.E., and Marsden, J.E. (2001). Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10), 1556–1571.
- Bloch, A.M., Leonard, N.E., and Marsden, J.E. (2000). Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. the first matching theorem. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(12), 2253–2270.
- Bloch, A.M. and Marsden, J.E. (1990). Stabilization of rigid body dynamics by the energy-casimir method. *Systems & Control Letters*, 14(4), 0167–6911.
- DATCOM, U.S.A.F. (2018). Stability and Control DATCOM. URL <http://www.pdas.com/datcom.html>.
- Gavilan, F., Vazquez, R., and Acosta, J.Á. (2014). Adaptive control for aircraft longitudinal dynamics with thrust saturation. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 38(4), 651–661.
- Kwatny, H.G., Dongmo, J.E.T., Chang, B.C., Bajpai, G., Yasar, M., and Belcastro, C. (2012). Nonlinear analysis of aircraft loss of control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36(1), 149–162.
- Lambregts, A. (1983). Vertical flight path and speed control autopilot design using total energy principles. In *Guidance and Control Conference*, 2239.
- Lanchester, F.W. (1907). *Aerodnetics*. london, 1908.[preface dated may 1908.].
- Lee, T., Leok, M., and McClamroch, N.H. (2017). Global formulations of lagrangian and hamiltonian dynamics on manifolds.
- Liu, C. and Chen, W.H. (2016). Disturbance rejection flight control for small fixed-wing unmanned aerial vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2810–2819.
- Ortega, R., Perez, J.A.L., Nicklasson, P.J., and Sira-Ramirez, H.J. (2013). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media.
- Ortega, R., Van Der Schaft, A., Maschke, B., and Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4), 585–596.
- Research, L. (2018). X-Plane. URL <http://www.x-plane.com/>.
- Von Mises, R. (1959). *Theory of flight*. Courier Corporation.