

Síntesis Cinemática Anudada

D. E. Rivas-Cisneros* D. A. Diaz-Romero*
Angel Rodriguez-Liñan*

* Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza,
Nuevo León, México, (e-mail: daniel.rivascs@uanl.edu.mx,
david.diazrr@uanl.edu.mx, angel.rodriquezln@uanl.edu.mx).

Resumen

De acuerdo con la teoría de nudos, las trayectorias tridimensionales de un sistema dinámico se pueden analizar y clasificar mediante su estructura topológica. Existen ecuaciones paramétricas que generan trayectorias anudadas, dichas ecuaciones son muy parecidas a las utilizadas en robótica. En el presente trabajo se modifica la cinemática directa del péndulo robot y del robot RR de acuerdo con las ecuaciones de los nudos tóricos, dichas modificaciones se realizan para que el extremo final del robot genere trayectorias anudadas específicas.

Keywords:

Teoría de nudos, Invariante topológico, Nudos, Sistemas dinámicos, Síntesis de cinemática directa.

1. INTRODUCCIÓN

La cinemática directa de un robot proporciona la información necesaria para comprender y diseñar el desplazamiento de un robot, así también permite conocer el comportamiento de la trayectoria del extremo final del robot, el cual se utiliza para realizar un trabajo específico. Hay robots que hacen tareas cuyas trayectorias implican un alto grado de complejidad desde diversos puntos de vista de la robótica y la práctica. Por ejemplo, robots que realizan cirugías y suturas médicas, robots industriales que realizan costuras con soldaduras, etc [Kang (2002), Ohnishi (2005), Mayer (2006), Yue (2007), Chow (2013), Watanabe (2014), Gao (2014), Lu (2016), Osa (2017), Wakamatsu (2004), Takamatsu (2006), He (2013), Kudoh (2015), Wang (2016)].

Desde el punto de vista de topología clásica, un nudo es una trayectoria tridimensional cerrada con cruces el cual no existe intersecciones entre sí. La teoría de nudos analiza, entre otras cosas, trayectorias tridimensionales para identificar si dicha trayectoria es anudada, así como también, si estas trayectorias son topológicamente idénticas. Uno de los pioneros en usar conceptos topológicos en robótica ha sido R. Ghrist [Ghrist (2010)], donde trabaja con teoría de trenzas para el análisis de los movimientos del robot .

En este trabajo se modifica la cinemática directa del péndulo robot y del robot RR con la ayuda de la matriz de rotación y de ecuaciones paramétricas que se aplican en teoría de nudos, dichas ecuaciones paramétricas son muy similares a las usadas en robótica. En las modificaciones no se toma en cuenta la estructura o diseño físico del robot que tendrá al ser modificada su cinemática directa.

El objetivo de este trabajo es proponer una forma de modificar la cinemática directa utilizando trayectorias anudadas y teoría de nudos para diseñar robots con trayectorias anudadas específicas para procesos con trayectorias

complejas, y como trabajo futuro queda el rediseño de la estructura física del robot para satisfacer dichas modificaciones; en la cual ya se está trabajando. La diferencia de este trabajo con [Rivas (2017)] es que en el trabajo anterior se analizó si la cinemática directa de dos robots conocidos generaban trayectorias anudadas sin modificar su cinemática directa.

El presente artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se da una introducción a la teoría de nudos. En la sección 3, se muestra la ecuación de la cinemática directa del péndulo robot y del robot RR, así como las gráficas de dichas ecuaciones. En la sección 4, se muestran los resultados obtenidos al modificar la cinemática directa de los robots. Por último, se dan las conclusiones en la sección 5.

2. TEORÍA DE NUDOS

2.1 Conceptos fundamentales

La teoría de nudos es la rama de la topología que estudia, entre otras cosas, trayectorias cerradas en R^3 . Un *nudo* $\langle K \rangle$ es un embebimiento $f : S^1 \rightarrow R^3$ que no presenta intersecciones en su trayectoria cerrada [Cromwell (2004), Adams (1994)]. Por definición los nudos viven en R^3 , sin embargo para analizar los nudos y realizar operaciones en ellos se utilizan imágenes en R^2 . A esta imagen del nudo en R^2 se le llama *proyección del nudo* [Cromwell (2004), Adams (1994)], esta proyección se representa como:

$$K : R^3 \longrightarrow R^2,$$

$$K(x, y, z) = K(x, y, 0).$$

La proyección de un nudo consiste de vértices $V(K)$ y aristas $E(K)$ [Kauffman (1991)]. En la figura 1 se presenta la proyección del nudo trébol con sus aristas $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y vértices $V(G) = \{1, 2, 3\}$. Cada vértice de la figura 1 se le conoce como un *punto de cruce* en la proyección del nudo en R^2 , el cual en la proyección se

intersecan pero no se intersecan en R^3 , ya que en R^3 se tiene las mismas coordenadas en x y y pero la coordenada en z es diferente [Adams (1994)].

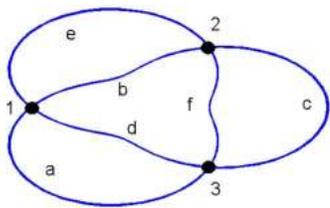


Figura 1. Proyección del nudo trébol con aristas $E(K) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y vértices $V(K) = \{1, 2, 3\}$. El nudo trébol posee 3 puntos de cruce.

Los nudos se catalogan de acuerdo al mínimo número de cruces que tienen en su proyección, el catálogo de nudos esta acomodado por el número de cruces que tiene el nudo y un subíndice que diferencia a los nudos con el mismo número de cruces [Adams (1994)]. En la figura 2 se muestran los nudos 3_1 (nudo trébol), 4_1 , 5_1 y 7_1 . Al nudo con cero cruces y que es topológicamente al círculo se le conoce como nudo trivial.

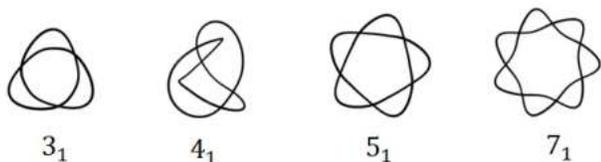


Figura 2. Nudos hasta con 7 puntos de cruce.

Uno de los problemas fundamentales en teoría de nudos es saber si dos nudos que se visualizan diferentes son equivalentes. Gracias a este problema se desarrolló el primer invariante polinomial; el *polinomio de un nudo* es un invariante que es el mismo para nudos equivalentes [Cromwell (2004), Adams (1994)]. El primer invariante que se desarrolló fue el polinomio de Alexander; a partir de este polinomio se desarrollaron una variedad de nuevos invariantes polinomiales tales como: el polinomio de Jones, el corchete de Kauffman, HOMFLY, entre otros [Cromwell (2004), Adams (1994)]. En el presente trabajo se usa el polinomio de HOMFLY para el calculo de los nudos, en [Kauffman (1991), Adams (1994)] se explica como se calcula el polinomio de HOMFLY de un nudo. En el cuadro 1 se muestra el polinomio de HOMFLY de algunos nudos, los cuales se obtuvieron usando el programa KnotPlot¹ [Scharein (1991)].

2.2 Ecuación paramétrica de nudos tóricos

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, un nudo se puede definir como una curva cerrada simple generada

¹ Programa creado por Robert G. Scharein para visualizar y crear nudos en 3 dimensiones; y calcular varios tipos de polinomios, entre ellos el de HOMFLY.

Cuadro 1. Polinomio de HOMFLY del nudo 0_1 , 3_1 , 4_1 , 5_1 y 5_2 .

Nudo	Polinomio de HOMFLY
0_1 (nudo trivial)	1
3_1	$-l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$
4_1	$-l^{-2} - 1 - l^2 + m^2$
5_1	$2l^{-6} + 3l^{-4} - m^2l^{-6} - 4m^2l^{-4} + m^4l^{-4}$
5_2	$l^{-6} + l^{-4} - l^{-2} - m^2l^{-4} + m^2l^{-2}$

por una trayectoria tridimensional. Los nudos pueden ser generados por una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, por el conjunto de tres ecuaciones matemáticas que representen a un sistema o por tres series de tiempo de un sistema [Ghrist (2011)]. Topológicamente, la trayectoria anudada se puede representar como una solución global a las ecuaciones matemáticas del sistema [Ghrist (2011)].

Los nudos mejor estudiados en teoría de nudos son los nudos tóricos y se llaman así porque se construyen sobre una superficie llamada toroide. Sean p y q un par de enteros entre sí. En el toro existen dos circunferencias: el meridiano y el longitudinal. Un nudo tórico de tipo (p, q) la trayectoria da q vueltas alrededor del meridiano y p vueltas alrededor de la longitud. La ecuación de los nudos tóricos (p, q) está dada por la multiplicación de la matriz de rotación por la del círculo [Cromwell (2004)] :

$$K = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R + r\cos(\theta) \\ r\text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

la ecuación paramétrica generada es:

$$\begin{aligned} X &= -\text{sen}(q)(R + r\cos(p)), \\ Y &= \cos(q)(R + r\cos(p)), \\ Z &= r\text{sen}(p), \end{aligned} \quad (2)$$

Donde los parámetros R y r controlan la geometría del toro: r es el radio del tubo del toro y R es el radio del agujero del toro. El ángulo ϕ esta dado por q y el ángulo θ esta dado por p . En la figura 3(a) y 3(b) se representa un nudo del tipo (p, q) donde $(p, q) = (3, 2)$, el cual representa al nudo trébol.

3. CINEMÁTICA DIRECTA DE UN ROBOT

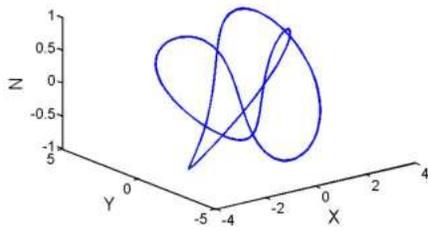
El análisis de la cinemática en robótica ayuda a comprender y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot. La *cinemática directa* es el estudio analítico del movimiento del robot que relaciona las coordenadas articulares $q \in R^n$, donde n representa el número de grados de libertad, con las coordenadas cartesianas $[x, y, z] \in R^3$ así como la orientación del extremo final del robot [Reyes (2011)]. También ayuda a conocer el comportamiento de la trayectoria del extremo final del robot.

3.1 Cinemática directa del péndulo robot

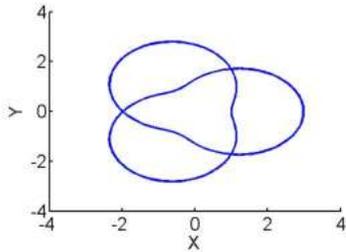
El diagrama del péndulo robot se representa como se muestra en la figura 4. La ecuación (3) representa la ya conocida cinemática directa del péndulo robot.

$$\begin{aligned} X &= l\cos(q_1), \\ Y &= l\text{sen}(q_1). \end{aligned} \quad (3)$$

La representación geométrica que genera la ecuación (3) es un círculo como se muestra en la figura 5.



(a)



(b)

Figura 3. Representación de un nudo trébol. a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

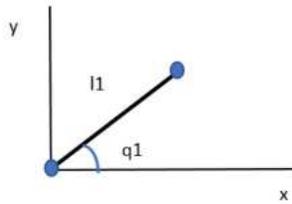


Figura 4. Diagrama representativo del péndulo robot .

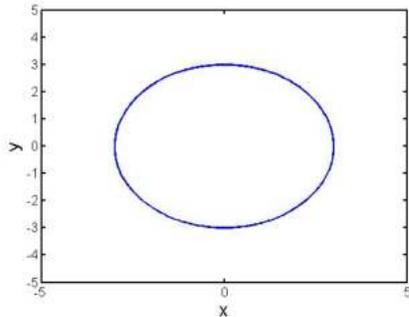


Figura 5. Representación gráfica de la ecuación (3).

3.2 Cinemática directa del robot RR

El diagrama del robot RR se representa como se muestra en la figura 4. La ecuación (4) representa la ya conocida cinemática directa del robot RR.

$$\begin{aligned} X &= l1\cos(q1) + l2\cos(q1 + q2), \\ Y &= l1\sen(q1) + l2\sen(q1 + q2). \end{aligned} \quad (4)$$

La representación geométrica que genera la ecuación (4) se muestran en las figuras 7 y 8; y va depender de los parámetros $q1$, $q2$, $l1$ y $l2$.

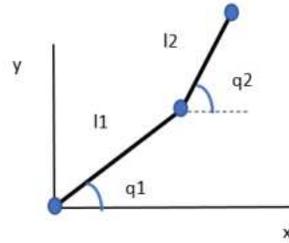


Figura 6. Diagrama representativo del robot RR .

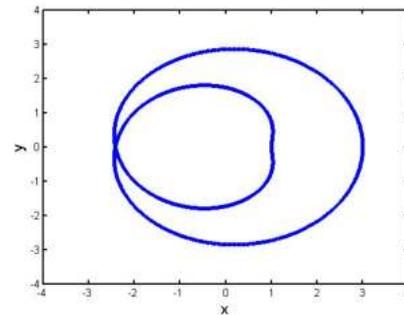


Figura 7. Representación gráfica de la ecuación (4).

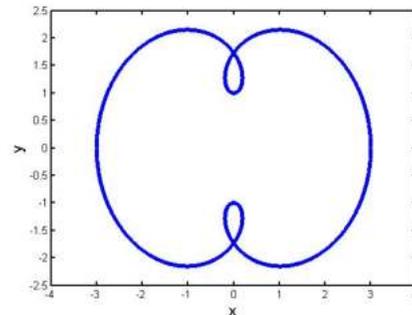


Figura 8. Representación gráfica de la ecuación (4).

4. RESULTADOS

A continuación, la ecuación paramétrica (5) presenta la cinemática directa modificada del péndulo robot de acuerdo a la ecuación de los nudos tóricos.

$$\begin{aligned} X &= -\sen(q)(R + l1\cos(q1)), \\ Y &= \cos(q)(R + l1\cos(q1)), \\ Z &= R + l1\sen(q1), \end{aligned} \quad (5)$$

Como se observa en la ecuación (5), a la cinemática directa del péndulo robot se le agrega la matriz de rotación la cual es muy usada en robótica y a parte el parámetro R de los nudos tóricos, que en este caso desde el punto de vista de robótica el parámetro R va siendo un movimiento lineal o prismático. Como se puede observar la ecuación (5) es casi idéntica a la ecuación de los nudos tóricos.

En la figura 9(a) y 9(b) se presenta el nudo 3_1 , el cual se genera con la ecuación (5), donde los parámetros son: $q = 2\pi$, $q1 = 3\pi$, $R = 4$ y $l1 = 2$. En la figura 10(a) y 10(b) se presenta el nudo 5_1 , el cual se genera con la ecuación

(5), donde los parámetros son: $q = 2\pi$, $q_1 = 5\pi$, $R = 4$ y $l_1 = 2$.

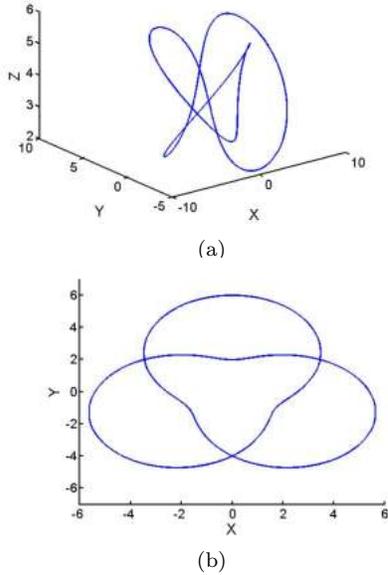


Figura 9. Representación del nudo 3_1 de la ecuación (5).
a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

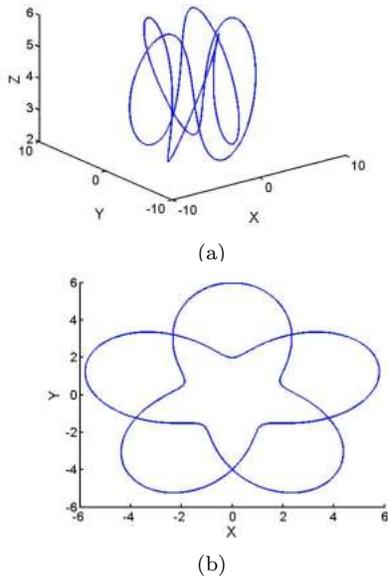


Figura 10. Representación del nudo 5_1 de la ecuación (5).
a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

A continuación, la ecuación paramétrica (6) presenta la cinemática directa modificada del robot RR de acuerdo a la ecuación de los nudos tóricos.

$$\begin{aligned} X &= -\text{sen}(q)(R + l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1 + q_2)), \\ Y &= \cos(q)(R + l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1 + q_2)), \\ Z &= R + l_1\text{sen}(q_1) + l_2\text{sen}(q_1 + q_2), \end{aligned} \quad (6)$$

En la figura 11(a) y 11(b) se presenta el nudo 3_1 , el cual se genera con la ecuación (6), donde los parámetros son:

$q = 2\pi$, $q_1 = 2\pi$, $q_2 = \pi$, $R = 5$, $l_1 = 1$ y $l_2 = 2$. En la figura 12(a) y 12(b) se presenta el nudo 5_1 , el cual se genera con la ecuación (6), donde los parámetros son: $q = 2\pi$, $q_1 = 2\pi$, $q_2 = 3\pi$, $R = 5$, $l_1 = 1$ y $l_2 = 2$.

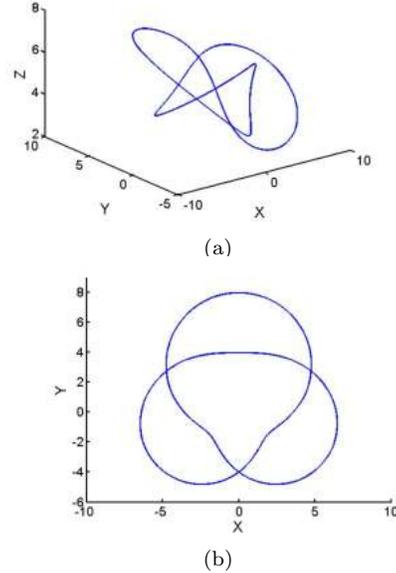


Figura 11. Representación del nudo 3_1 de la ecuación (6).
a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

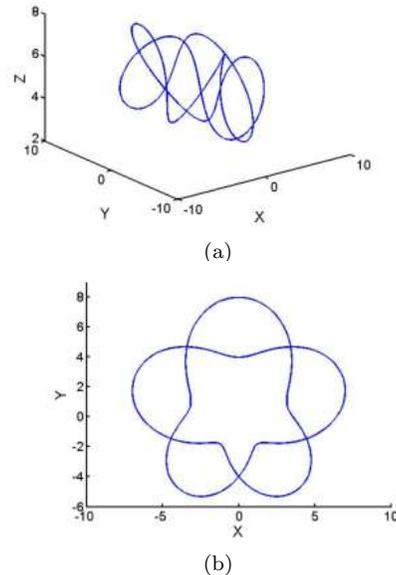


Figura 12. Representación del nudo 5_1 de la ecuación (6).
a) Nudo en R^3 . b) Proyección del nudo en R^2 .

Las ecuaciones (5) y (6) son diferentes pero con la modificación realizada las dos ecuaciones generan los mismos nudos que la ecuación (2). La ecuación (5) cambiando las variables de los ángulos es del tipo $(p, q) = (q_1, q)$ por lo que a nivel topológico y con los resultados obtenidos la ecuación (5) y (2) son equivalentes. Para la ecuación (6) y con respecto con resultados obtenidos se puede inferir

que $((q_1 + q_2), q_1, q) = (p, q)$, para la cual existe una restricción, la cual es que $q = q_1 = n\pi$ donde $n = 2$ y que $q_2 = m\pi$ donde m es impar. Por ejemplo para que la ecuación (6) genere el nudo 3_1 se tiene que $((2 + 1), 2, 2) = (3, 2, 2)$ donde $(q_1 + q_2)$ debe ser igual a p de la ecuación (2), de acuerdo al resultado obtenido la ecuación (6) y (2) son topológicamente equivalentes ya que $(3, 2, 2) = (3, 2)$.

5. CONCLUSIONES

La modificación de la cinemática directa a partir de las ecuaciones de los nudos tóricos, generaron las mismas trayectorias anudadas que las ecuaciones paramétricas de los nudos del tipo (p, q) . De acuerdo a los resultados obtenidos, a partir de la modificación de la cinemática directa realizada en el trabajo se podría rediseñar la estructura física del robots para que el extremo final ejecute trayectorias anudadas específicas de acuerdo al trabajo a ejecutar, así como también catalogar topológicamente a los robots de acuerdo a su trayectoria anudada generada, tal como se mencionó en el trabajo [Rivas (2017)].

REFERENCIAS

- R. Ghrist, P.J. Holmes and M.C. Sullivan, Knots and Links in the Three-Dimensional Flows, (*Springer, 2011*).
- R. Ghrist, Configuration spaces, braids, and robotics *Lecture Note Series, Inst. Math. Sci., NUS*, **40(5)**(2002) 1556.
- R. Ghrist and D.E. Koditschek, Safe cooperative robot dynamics on graphs *SIAM J. Cont. & Opt*, **19**(2002) 263.
- A. Abrams and R. Ghrist, Finding topology in a factory: configuration space *Amer. Math. Monthly*, **109**(2002) 140.
- M. Katsev, A. Yershova, B. Tovar, R. Ghrist, and S. LaValle, Mapping and Pursuit-Evasion Strategies For a Simple Wall-Following Robot *IEEE Transactions on Robotics*, **27(1)**(2011) 128.
- R. Ghrist, Configuration spaces of graphs and robotics *Braids, Links, and Mapping Class Groups: the Proceedings of Joan Birman's 70th Birthday*, **24**(2001) 29.
- S. Bhattachayra, R. Ghrist, and V. Kumar, Multi-robot Coverage and Exploration on Riemannian Manifolds with Boundary, *Intl. J. Robotics. Res.*, **33(1)**(2013) 113.
- F. Reyes Cortes, Robótica: Control de Robots Manipuladores, 1st ed. (*Alfaomega, 2011*)
- H. Kang and J.T. Wen, Robotic Knot Tying in Minimally Invasive Surgeries, *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ, Intl. Conference on intelligent Robots and Systems*, (2002) 1421.
- K. Ohnishi, H. Miyagawa and R. Kitamura, Development of a Robotic Digit Joint Mechanism for Knot Tying Task, *IEEE International Workshop on Robots and Human Interactive Communication*, (2005) 253.
- H. Mayer, F. Gomez, D. Wierstra, I. Nagy, A. Knoll and J. Schmidhuber, A System for Robotic Heart Surgery that Learns to Tie Knots Using Recurrent Neural Networks, *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ, International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (2006) 543 .
- L. Yue, Y. Cao, S. Wang and H. Wang, Twisting Knot Tying Method of Suture A Novel Method for Robotic Knot Tying, *IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering*, (2007) 87.
- Der-Lin Chow, W. Newman, Improved Knot-Tying Methods for Autonomous Robot Surgery, *IEEE International Conference on Automation Science*, (2013) 461.
- G. Watanabe, *Robotic Surgery, Springer, 2014* .
- C. Gao, *Robotic Cardiac Surgery, Springer, 2014*.
- B. Lu, H. K. Chu and L. Cheng, Dynamic Trajectory Planning for Robotic Knot Tying, *Proceedings of The 2016 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics*, (2016).
- T. Osa, N. Sugita and M. Mitsuishi, Online Trajectory Planning and Force Control for Automation of Surgical Tasks, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, (2017).
- H. Wakamatsu, A. Tsumaya, E. Arai and S. Hirai, Planning of One-Handed Knotting/Raveling Manipulation of Linear Objects, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (2004) 1719.
- J. Takamatsu, T. Morita, K. Ogawara, H. Kimura and K. Ikeuchi, Representation for Knot-Tying Tasks, *IEEE Transactions on Robotics*, **22**(2006) 1552.
- L. He, Q. Zhang and H.J. Charvet, A knot-tying end-effector for robotic hop twining, *Biosystems Engineering*, **114**(2013) 344.
- S. Kudoh, T. Gomi, R. Katano, T. Tomizawa and T. Suehiro, In-air Knotting of Rope by a Dual-arm Multi-nger Robot, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, (2015).
- W. Wang and D. Balkcom, Tying knot precisely, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, (2016).
- D.E. Rivas-Cisneros, Análisis por teoría de nudos de trayectorias tridimensionales

- generadas por el extremo final de un robot,
Congreso Nacional de
Control Automático,
(2017).
- P.R. Cromwell, Knots and Links,
1st ed. *Cambridge*
University Press ,2004
- C.C. Adams, The Knot Book, *W.H Freeman and*
Company, 1994 .
- L.H. Kauffman, Knots and physics, *Series on Knots*
and Everything-Vol.1., 1991 .
- R.G. Scharein, Knotplot, *http://www.knotplot.com/*.
- R. Ghrist, *Chaos, Solitons &*
*Fractals*9(1998) 583.
- D.A. Díaz, Knotted Dynamical Systems, *PhD thesis, The*
University of Sheffield, 2007 .