

Control Adaptable de Orden Fraccionario Aplicado a un Sistema Hidráulico

Jorge Alberto Pérez Gómez* Jair Servín Aguilar**
Marcos A. González Olvera***

* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
(e-mail: jorgeapg1995@comunidad.unam.mx).

** Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
(e-mail: jair-servin-aguilar@comunidad.unam.mx).

*** Colegio de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma de la
Ciudad de la México (e-mail: mangel@verona.fi-p.unam.mx)

Resumen

Este artículo aborda el problema del Control Adaptable Basado en Modelo de Referencia (MRAC, por sus siglas en inglés), añadiendo una ley de adaptación de orden fraccionario, derivada del mecanismo de ajuste conocido como regla MIT, aplicado experimentalmente en un sistema hidráulico. Con una adecuada elección del modelo de referencia, realizamos una serie de experimentos que nos permite hacer una comparación entre las diferentes elecciones de la ganancia de adaptación y el orden de integración, involucrado en el mecanismo de ajuste. Con ello se llegó a algunas conclusiones interesantes acerca de las ventajas de implementar una ley de adaptación de orden fraccionario. Los resultados obtenidos también nos permiten concluir acerca de la elección conjunta del orden de integración y la ganancia de adaptación, y las implicaciones de incrementar o disminuir esta última.

Keywords: Control adaptable, Control Fraccionario, Sistemas Fraccionarios.

1. INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios de cálculo de orden fraccionario se remontan a 1695, en la carta que Leibniz a L'Hôpital conjeturando la existencia de la derivada de orden $\alpha = 1/2$. Entre las aplicaciones encontradas existen algunos sistemas físicos que, por sus características dinámicas, son mejor representados y/o controlados mediante el enfoque del cálculo fraccionario, como osciladores caóticos (Xin and Jue-Bang, 2005), mecánica de fluidos (Kulish and Lage, 2002), fenómenos viscoelásticos en materiales biológicos (Makris and Constantinou, 1991), coordinación de múltiples robots (Goodwine, 2014). Además, dentro de la teoría de control, el uso del cálculo fraccionario, permite el tratamiento de señales, la estimación de parámetros y diseño de filtros (Vinagre and Monje, 2009).

Por otra parte, partir de la década de los 50's surge el control adaptable como una solución a los problemas propios del control. La motivación es controlar sistemas con parámetros desconocidos en su modelo matemático, y es en este marco donde un controlador adaptable busca modificar sus propios parámetros de acuerdo con los cambios en la dinámica del proceso y el carácter de las perturbaciones (Åström and Wittenmark, 2013). Sin embargo, una de las limitaciones del controlador adaptable es que si bien la salida deseada del sistema puede converger a un valor deseado, ello no siempre implica que los parámetros obtenidos sean los valores reales del sistema.

Una solución a los problemas de seguimiento y estabilización suele ser un control adaptable basado en modelo

de referencia (MRAC, por sus siglas en inglés), el cual, en el caso lineal, presenta la ventaja de soportar cambios paramétricos lentos con respecto a la planta. En general, se sabe que el uso de MRAC clásico no garantiza convergencia de los parámetros desconocidos a los parámetros reales, sobre todo si no se cumple con la condición de excitación persistente.

Algunos trabajos recientes (Ladaci and Charef, 2006; Vinagre et al., 2002) muestran que al emplear una integral de orden fraccionario en la ley de adaptación se puede mantener la estabilidad en lazo cerrado y una alta capacidad de adaptación, aún en presencia de perturbaciones, así como contar con un mayor número de parámetros de diseño. Esta mejora del desempeño radica principalmente en las propiedades de no localidad y memoria de los operadores fraccionarios. En (Ladaci and Charef, 2006) son muy claras las ventajas que ofrece la inclusión de una derivada de orden fraccionario en la ley de adaptación del MRAC gracias a que, la derivada fraccionaria, es un proceso largo de memoria. Un trabajo más reciente (Navarro-Guerrero and Tang, 2015), presenta el análisis de estabilidad y convergencia de un sistema adaptable basado en modelo de referencia de orden fraccionario, con adaptación de orden fraccionario. En él, destacan la ventaja que tiene una ley de adaptación de orden fraccionario en la velocidad de convergencia del error de seguimiento a cero y la importancia de la ganancia de adaptación, así como el diseño del control para el suministro de anestesia en pacientes.

La principal contribución de este trabajo es la aplicación del control adaptable basado en modelo de referencia con

una ley de adaptación de orden fraccionario en un sistema hidráulico con una sola entrada de control. El objetivo de control es estabilizar el nivel de agua de un tanque $y(t)$, mediante la selección de un modelo de referencia que defina el valor de ajuste $y_m(t)$, así como mostrar la mejora del desempeño cuando se hace la adaptación de los parámetros mediante una derivada de orden fraccionario.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presentan los antecedentes matemáticos relacionados a la teoría del cálculo fraccionario y los sistemas de orden fraccionario. En la sección 3 hacemos una breve descripción del problema, abordando el sistema a controlar, así como el problema del control adaptable basado en modelo de referencia y la inclusión de una derivada de orden fraccionario en la ley de adaptación. En la sección 4 mostramos el diseño del controlador y el análisis de estabilidad del sistema. En la sección 5 se presentan los resultados y la discusión sobre los mismos. Finalmente, en la sección 6 presentamos algunas conclusiones a destacar.

2. ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

El cálculo fraccionario busca extender las definiciones de los operadores derivada e integral a los casos en que el orden de derivación o integración no es entero, sino cualquier número real o complejo, y existen distintas definiciones para las derivadas e integrales de orden fraccionario. Todas ellas son generalizaciones de las definiciones habituales de los operadores derivada e integral, que las incluyen como un caso particular. En primer lugar, definimos la integral de orden fraccionario de Riemann-Liouville:

Definición: Sea $f \in L_1(a, t)(-\infty < a < t < \infty)$. La *integral fraccionaria de Riemann - Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}(\alpha) > 0)$ de f se define por

$${}_a I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (1)$$

para $\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

A partir de (1) se define la *integral fraccionaria de Riemann-Liouville*:

Definición: Sea $f \in L_1(a, t)(-\infty < a < t < \infty)$. La *derivada fraccionaria de Riemann - Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}(\alpha) \geq 0)$ de f se define por

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

para $\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, (n-1 < \alpha < n)$, a y t son los límites del operador.

Por su parte, una definición alternativa a la derivada de orden fraccionario la presenta la *derivada fraccionaria de Caputo*:

Definición: Sea $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}(\alpha) \geq 0)$ y $f \in AC^n[a, t)(-\infty < a < t < \infty)$, con $n = [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$. La *derivada fraccionaria de Caputo* de orden α de f se define por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (3)$$

para $n-1 < \alpha < n$.

Ambos operadores suelen dar resultados distintos, aunque sus resultados coinciden bajo la condición de condiciones iniciales nulas para $t < 0$. En el ámbito de control es preferida la definición de Caputo sobre la de Riemann-Liouville, ya que las condiciones iniciales pueden ser empleadas en forma similar al caso entero, mientras que en la definición de Riemann-Liouville esto no ocurre.

2.1 Sistemas de orden fraccionario

Un sistema lineal invariante en el tiempo general de orden fraccionario puede ser descrito por una ecuación diferencial fraccionaria (FDE) (Patil et al., 2014) de la forma:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t), \quad (4)$$

donde $a_k, (k = 0, \dots, n)$, $b_k, (k = 0, \dots, m)$ son constantes, y $\alpha_k, (k = 0, \dots, n)$, $\beta_k, (k = 0, \dots, m)$ son reales arbitrarios o números racionales, los cuales pueden ser elegidos tal que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$, y $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$. Aplicando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial fraccionaria dada en la ecuación (4) es representada en la forma

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s^{\beta_k})}{P(s^{\alpha_k})}.$$

Si el sistema es *conmensurado*, esto es, que $\alpha_i = k(1/v)$, $\beta_i = p(1/v)$, $k, p, m, n, v \in \mathbf{Z}_+$, se puede expresar en la forma equivalente

$$G(s) = \frac{b_m s^{m/v} + \dots + b_1 s^{1/v} + b_0}{a_n s^{n/v} + \dots + a_1 s^{1/v} + a_0}, \text{ para } v > 1. \quad (5)$$

Todos los sistemas de orden fraccionario conmensurado pueden ser expresados como la ecuación (5), donde el dominio de $H(s)$ es una superficie de Riemann con v las hojas de Riemann.

3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

3.1 Sistema hidráulico

El sistema que se quiere controlar es un sistema de tanques acoplados Quanser® como el que se muestra en la figura 1 (*Quanser Two-Tank Experiment*), empleado como sistema de prueba para diferentes tipos de estrategias de control (Olivar-Domínguez et al., 2015). Cuenta con dos tanques de dimensiones iguales instrumentados con sensores de nivel, una bomba controlada que entrega un caudal proporcional al voltaje de entrada. Cuando la bomba es accionada, extrae el agua de un recipiente y lo transporta al tanque 1 a través de una de las mangueras. Luego, el agua sale del tanque 1 por un orificio al fondo del mismo tanque, y cae dentro del tanque 2. Por último, el agua sale del tanque 2 a través de un orificio y cae sobre el recipiente que la contiene (Quanser Inc, 2012).

En la figura 1.b, el nivel de agua está representado por $y(t)$ y el flujo de entrada por $u(t)$.

El modelo del sistema, considerando únicamente el nivel del tanque superior, está dado por

$$\dot{y}(t) = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gy(t)} + \frac{1}{A_1} u(t), \quad (6)$$

donde $A_1 = 15,5179 \times 10^{-4} [m^2]$, $a_1 = 17,814 \times 10^{-6} [m^2]$ y $g = 9,81 [m/s^2]$.

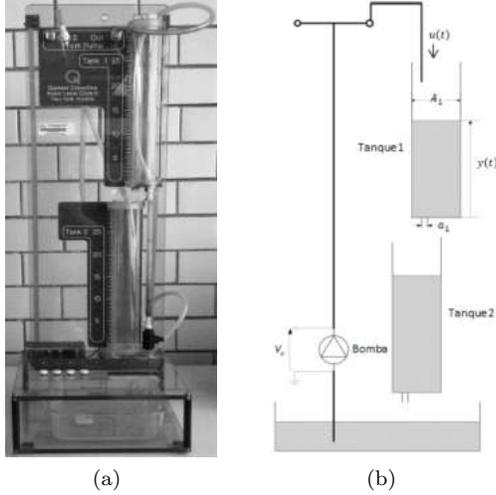


Figura 1. a) Sistema de tanques acoplados Quanser®. b) Diagrama del sistema de tanques acoplados Quanser®.

El sistema linealizado es

$$\dot{\bar{y}}(t) = -\frac{a_1 g}{A_1 \sqrt{2g Y_{eq}}} \bar{y}(t) + \frac{1}{A_1} \bar{u}(t), \quad (7)$$

donde $\bar{y} = y(t) - Y_{eq}$ es la salida del sistema trasladado alrededor del punto de operación, $\bar{u}(t) = u(t) - U_{eq}$, con Y_{eq} y U_{eq} el punto de operación deseado para el sistema.

3.2 Control adaptable

En el control adaptable basado en modelo de referencia el comportamiento deseado es determinado por el modelo de referencia seleccionado. El ajuste de parámetros se logra mediante el error entre la salida de la planta y la salida del modelo de referencia, mostrado en la figura 2.

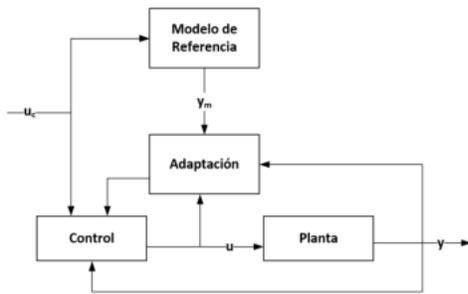


Figura 2. Diagrama de bloques de un sistema adaptable basado en modelo de referencia.

Consideremos un sistema en lazo cerrado, como el de la figura 2, con un parámetro ajustable θ . Un modelo de referencia con salida y_m , que determina la salida del sistema en lazo cerrado y . Y sea e el error entre la salida del sistema en lazo cerrado y , y la salida del modelo de referencia y_m . Una forma de ajustar el parámetro θ es minimizando la función costo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2.$$

La ley de adaptación del parámetro en sentido negativo del gradiente de J es

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}. \quad (8)$$

La expresión (8) es conocida como la regla MIT, por haber sido desarrollada en el Laboratorio de instrumentación en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) (Åström and Wittenmark, 2013). Si asumimos que el cambio del parámetro θ es mucho más lento que el cambio de las demás variables del sistema en lazo cerrado, la derivada de sensibilidad del sistema $\frac{\partial e}{\partial \theta}$ puede ser evaluada asumiendo que θ es constante.

Considere el sistema adaptable descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= kG(p)u, \quad y_m = k_0 G_m(p)u_c, \\ u &= \theta u_c, \quad e = y - y_m, \end{aligned} \quad (9)$$

donde y es la salida del sistema, y_m es la salida del modelo de referencia, u es el control, u_c es la señal de entrada de referencia, e es el error y con $\theta = \frac{k_0}{k}$ (Åström and Wittenmark, 2013). El parámetro desconocido a adaptar es la ganancia proporcional del sistema, k .

De la expresión (8) obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e, \quad (10)$$

y decimos que la tasa de cambio del parámetro θ solo depende de la ganancia de adaptación γ .

El siguiente sistema adaptable es el caso de un sistema de primer orden y considerando la adaptación de dos parámetros desconocidos a y b .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ay + bu, \quad \dot{y}_m = -a_m y_m + b_m u_c, \\ u &= \theta_1 u_c - \theta_2 y, \quad e = y - y_m, \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\theta_1 = \frac{b_m}{b}$, $\theta_2 = \frac{a_m - a}{b}$.

La regla MIT para este sistema adaptable resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \theta_1}{dt^\alpha} &= -\gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} u_c \right) e, \\ \frac{d^\alpha \theta_2}{dt^\alpha} &= \gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} y \right) e, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$ (Åström and Wittenmark, 2013).

3.3 Control adaptable con integración de orden fraccionario

Tomando en cuenta las propiedades del operador diferencial (Petráš, 2011) es posible lograr que la tasa de cambio del parámetro θ dependa, no solo de la ganancia de adaptación γ , también del orden de derivación α (Ladaci and Charef, 2003). Con ello, la regla MIT resulta

$$\frac{d^\alpha \theta}{dt^\alpha} = -\gamma y_m e. \quad (13)$$

Considerando un sistema LTI de primer orden del tipo $G(s) = \frac{b}{s+a}$, y el esquema de control (9) con la ley de adaptación (13). Además, suponga $u_c = u_c^0$ y $y_m = y_m^0$ constantes (Petráš, 2011). La ecuación diferencial que representa al sistema adaptable es

$$y^{(1+\alpha)} + a y^\alpha + \gamma b y_m^0 u_c^0 y = \gamma b u_c^0 (y_m^0)^2. \quad (14)$$

Y la ecuación característica, que determina su estabilidad, es

$$s^{(1+\alpha)} + a s^{(\alpha)} + \gamma b y_m^0 u_c^0 = 0. \quad (15)$$

La expresión (15) es una función multivaluada de variable compleja s , y su dominio se puede asumir como una superficie de Riemann con un número de hojas finito (Vinagre and Monje, 2009). Si $\alpha = \frac{1}{v}$, las v hojas de Riemann son las regiones del plano dadas por

$$s = |s|e^{j\phi}; \quad (2k+1)\pi < \phi < (2k+3)\pi, \quad (16)$$

con $k = -1, 0, \dots, (v-2)$. Si $k = -1$, estaremos hablando de la hoja principal de Riemann. Además, sabemos que la condición de estabilidad, si estamos en el plano complejo s , es $|\phi_i| > \frac{\pi}{2}$.

Bajo el cambio de variable $w = s^{\frac{1}{v}}$, el polinomio característico es

$$w^{(v+1)} + a w^{(1)} + \gamma b y_m^0 u_c^0 = 0. \quad (17)$$

Las hojas de Riemann son las regiones del plano w definidas por

$$w = |w|e^{j\phi_w}; \quad \alpha(2k+1)\pi < \phi_w < \alpha(2k+3)\pi \quad (18)$$

con $k = -1, 0, \dots, (v-2)$. De esta forma, la condición de estabilidad en el plano complejo w está dada por $|\phi_w| > \alpha\frac{\pi}{2}$. Por lo que se puede observar, que la región de estabilidad del sistema fraccionario sufre una transformación, y esta región queda definida por el valor α .

Las raíces del polinomio que se encuentran en alguna hoja secundaria de Riemann, tienen soluciones que siempre son funciones monótonicamente decrecientes (tienden a cero sin oscilaciones, cuando $t \rightarrow \infty$). Sólo las raíces que se encuentra en la hoja principal de Riemann ($k = -1$) resultarán con una dinámica que pueda afectar la estabilidad del sistema, como podrían ser oscilaciones de amplitud constante o crecimiento monótono (Vinagre and Monje, 2009).

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE ORDEN FRACCIONARIO

Para el diseño del control MRAC, es fundamental el diseño del modelo de referencia. Considere que, del sistema (6), se quiere controlar solo el primer tanque. La función de transferencia (tomada del sistema linealizado (7)) es

$$G(s) = \frac{b}{s+a}; \quad a = \frac{a_1 g}{A_1 \sqrt{2} g Y_{eq}}; \quad b = \frac{1}{A_1}. \quad (19)$$

Entonces, el valor de a depende de la condición de equilibrio deseada. Se elige como punto de operación $Y_{eq} = 0,1[m]$, ya que esta altura respresenta un tercio de la altura máxima del sistema experimental. Con ello, el sistema es

$$\dot{y}(t) = -0,0804 \bar{y}(t) + 644,4171 \bar{u}(t).$$

Y, su representación en función de transferencia es

$$G(s) = \frac{644,4}{s+0,0804}. \quad (20)$$

Para el diseño del modelo de referencia $G_m(s) = \frac{k_0}{\tau s+1}$, se desea una respuesta al escalón unitario, es decir $u_c = 1$, lenta y con valor final $y_m^0 = 0,1 [m]$ (definida por el punto de equilibrio deseado), con una constante de tiempo $\tau = 10 [s]$ y ganancia $k_0 = 0,1$. Con ello el modelo de referencia se elige como:

$$G_m(s) = \frac{0,1}{10s+1}. \quad (21)$$

Ahora, en el esquema de control propuesto (9), consideramos los valores de $y_m^0 = 0,1$ y $u_c^0 = 1$ del diseño del modelo de referencia. Y, para la ley de adaptación, consideramos la derivada de orden fraccionario, como en (13). De (15) la ecuación característica, que gobierna la estabilidad del sistema en lazo cerrado, es

$$s^{(1+\alpha)} + 0,0804s^{(\alpha)} + 64,444\gamma = 0. \quad (22)$$

Utilizando la teoría desarrollada en la sección anterior, y con $\alpha = \frac{1}{2}$, obtuvimos un polinomio característico del sistema en lazo cerrado. El polinomio característico obtenido es

$$w^3 + 0,0804 w + 64,44\gamma = 0. \quad (23)$$

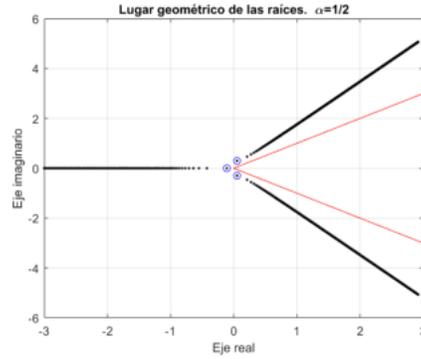


Figura 3. LGR con $\alpha = \frac{1}{2}$. y la región de estabilidad acotada por líneas rojas.

En la figura 3 se ilustra la trayectoria de los polos con $\alpha = \frac{1}{2}$. Se puede observar que la expresión (23) sólo depende del valor del parámetro γ . Debido a lo anterior, los polos permanecen estables para cualquier valor de $\gamma > 0$ (Vinagre and Monje, 2009).

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El primer conjunto de experimentos se realizó, considerando la adaptación de un solo parámetro, tomando el modelo de referencia (21), de donde $k_0 = 0,1$ y con una condición inicial del parámetro de adaptación $\theta(0) = 1 \times 10^{-5}$.

$\alpha \backslash \gamma$	0.1	0.01	0.001
0.25	0.00239	0.00181	0.00314
0.33	0.00206	0.00188	0.00313
0.5	0.00189	0.00209	0.00291
0.75	0.00217	0.00214	0.00299
1	0.00245	0.00261	0.00267

Cuadro 1. Tabla de los errores RMS por experimento

Para la solución de las ecuaciones de orden fraccionario se empleó el paquete *Fractional Variable Order Derivative Simulink Toolkit* (Sierociuk, 2014).

La figura 4 muestra el error RMS para cada experimento. Se observa que el experimento con mejor desempeño se presentó cuando $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\gamma = 0,01$. Además, los resultados muestran que el sobrepaso aumenta con el incremento de α y γ .

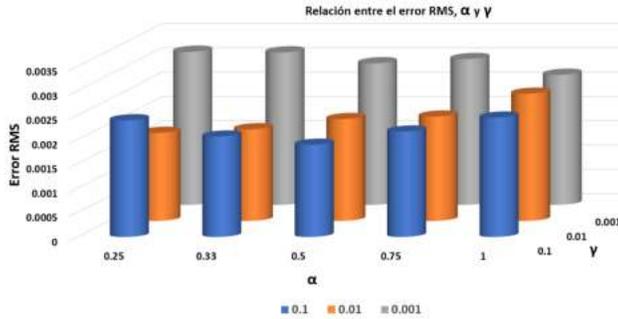


Figura 4. Gráfica del error RMS por experimento. Cada cilindro ilustra el RMSE del experimento correspondiente a los valores de γ y α .

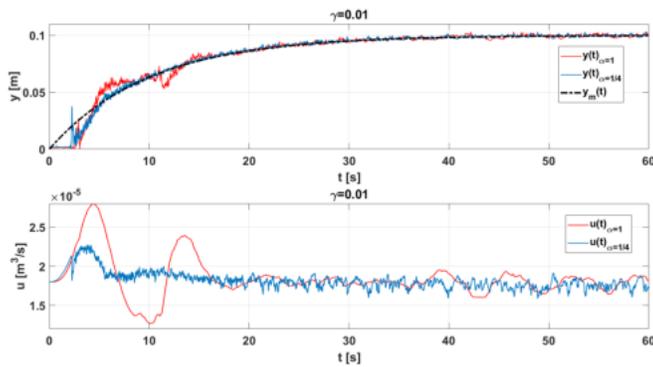


Figura 5. Resultados experimentales, salida del sistema y señal de control.

En la figura 5 presentamos un gráfico comparativo de la salida del sistema, para el mejor caso, con $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\gamma = 0,01$, y el caso de orden entero, con $\gamma = 0,01$ y $\alpha = 1$. La convergencia con la salida del modelo de referencia se da en menor tiempo cuando $\alpha = \frac{1}{4}$, presentando un error $RMSE = 18,095 \cdot 10^{-4}$. Cuando $\alpha = 1$ se da en un tiempo mayor y con un error $RMSE = 26,137 \cdot 10^{-4}$. Además, a pesar de presentar un nivel de ruido más alto, con $\alpha = \frac{1}{4}$, tenemos una señal de control con oscilaciones de menor amplitud. En la figura 6 mostramos la salida del sistema

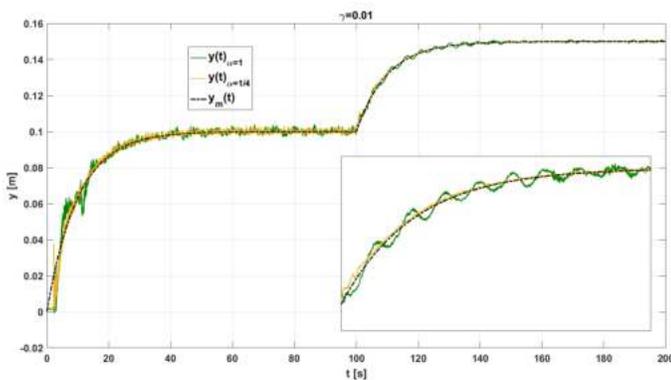


Figura 6. Resultados experimentales, comportamiento de la salida del sistema adaptable de un parámetro cuando se cambia la entrada u_c

del mismo experimento sumando a la señal de referencia un escalón de amplitud $u_c = 0,5[m]$ en $t = 100[s]$. Al cambiar la referencia, la respuesta del sistema con $\alpha = 1$ presenta oscilaciones no deseadas. Mientras que, la salida

del sistema cuando $\alpha = \frac{1}{4}$ converge rápidamente a la señal de referencia sin oscilaciones. Adicionalmente, en la figura 7 se presenta el comportamiento del parámetro adaptable θ , cuando $\gamma = 0,001$. Mostrando oscilaciones de amplitud mayor cuando incrementa α y, mostrando también, qué el valor al que converge el parámetro de adaptación θ cambia cuando cambia la condición de equilibrio.

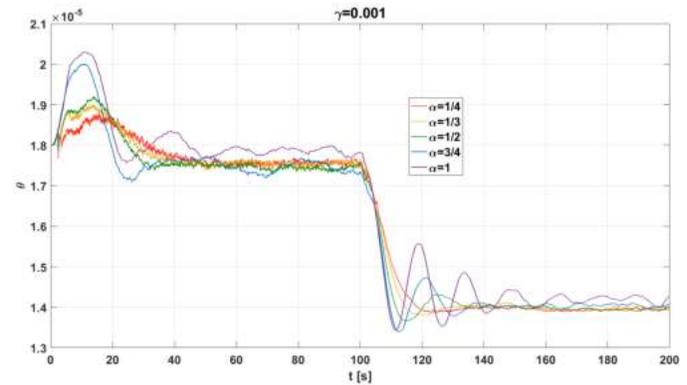


Figura 7. Resultados experimentales, dinámica del parámetro ajustable θ .

Se ha mencionado que tanto γ , como α , son de gran importancia para el desempeño del control. El análisis de estabilidad presentado en la sección 3, muestra la disminución de la zona de inestabilidad cuando α disminuye. Además, en (Navarro-Guerrero and Tang, 2015) se mostró que la velocidad con que el error de seguimiento converge a cero aumenta cuando crece el orden de integración α . Sin embargo, el incremento en el orden de integración α supone una disminución en el tamaño del intervalo de valores que puede tomar γ .

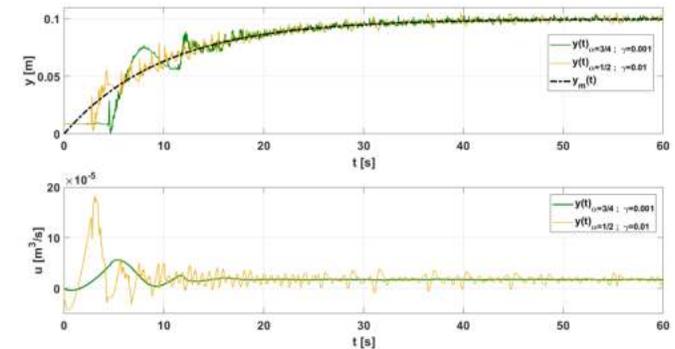


Figura 8. Resultados experimentales, salida y señal de control del sistema adaptable de dos parámetros.

Se realizó también un conjunto de experimentos con base en el esquema de control (11) para la adaptación de dos parámetros θ_1 y θ_2 . La figura 8 muestra la salida y la señal de control del mejor ($\alpha = \frac{1}{2}$ y $\gamma = 0,01$) y el peor de los casos ($\alpha = \frac{3}{4}$ y $\gamma = 0,001$) de acuerdo a su error RMS. Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\gamma = 0,01$ el sistema converge más rápido y con menos oscilaciones. Además, el sistema se adapta rápidamente cuando cambiamos la referencia como se muestra en la figura 9.

El comportamiento de los parámetros θ_1 y θ_2 se muestra en la figura 10. Se puede observar que una vez que el

sistema se estabiliza los parámetros tienden a un valor constante.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró un diseño de un controlador adaptable con ley de adaptación integral fraccionaria, y se mostró su empleo experimentalmente en un sistema hidráulico. Se observó que un MRAC con integrador de orden fraccionario en la ley de adaptación presenta un mejor desempeño que cuando se utiliza un MRAC con adaptación de orden entero. La adaptación de orden fraccionario, al poseer parámetros adicionales de diseño, permite moldear la dinámica de la salida del sistema y que converja en menor tiempo. Permite también que la amplitud de la señal de control disminuya y el error RMS sea pequeño, al compararlo con su contraparte de orden entero.

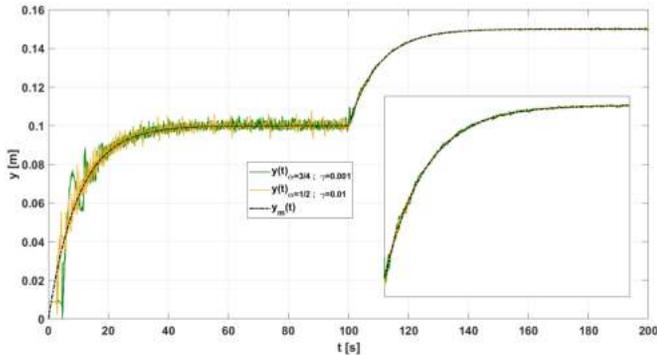


Figura 9. Resultados experimentales, comportamiento de la salida del sistema adaptable de dos parámetros cuando se cambia la referencia u_c

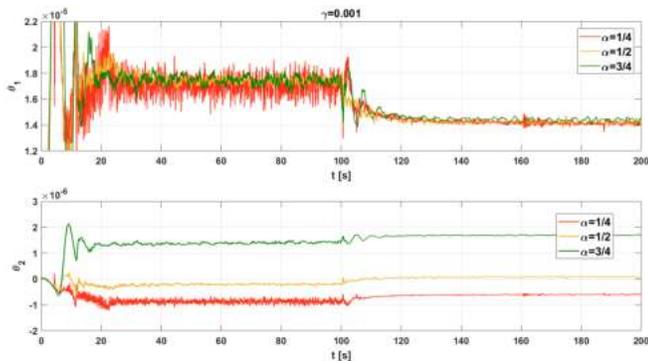


Figura 10. Resultados experimentales, dinámica de los parámetros ajustables θ_1 y θ_2 .

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México y a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por su apoyo para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

Åström, K.J. and Wittenmark, B. (2013). *Adaptive control*. Courier Corporation.

- Goodwine, B. (2014). Modeling a multi-robot system with fractional-order differential equations. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, 1763–1768. IEEE.
- Kulish, V.V. and Lage, J.L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3), 803–806.
- Ladaci, S. and Charef, A. (2003). Mit adaptive rule with fractional integration. In *Proceedings of CESA*, 9–11.
- Ladaci, S. and Charef, A. (2006). On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 43(4), 365–378.
- Makris, N. and Constantinou, M. (1991). Fractional-derivative maxwell model for viscous dampers. *Journal of Structural Engineering*, 117(9), 2708–2724.
- Navarro-Guerrero, G. and Tang, Y. (2015). Adaptive control for anesthesia based on a simple fractional-order model. In *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, 5623–5628. IEEE.
- Olivar-Domínguez, E., González-Olvera, M.A., and Tang, Y. (2015). Control adaptable pasivo para un sistema de dos tanques en cascada. In *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2015, Cuernavaca, Mor.*
- Patil, M.D., Vyawahare, V.A., and Bhole, M.K. (2014). A new and simple method to construct root locus of general fractional-order systems. *ISA transactions*, 53(2), 380–390.
- Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.
- Quanser Inc, C. (2012). *User Manual Couple Tank Experiment*.
- Sierociuk, D. (2014). Fractional variable order derivative simulink toolkit (2012).
- Vinagre, B.M. and Monje, C.A. (2009). Introducción al control fraccionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3(3), 5–23.
- Vinagre, B., Petráš, I., Podlubny, I., and Chen, Y. (2002). Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 269–279.
- Xin, G. and Jue-Bang, Y. (2005). Chaos and chaotic control in a fractional-order electronic oscillator. *Chinese Physics*, 14(5), 908.