

# Estimación Adaptable para Sistemas No-Lineales Inciertos: Enfoque por Modos Deslizantes

Roberto Franco\* y Héctor Ríos\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

\*\* *CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México.*

---

**Abstract:** Este artículo estudia el problema de la estimación adaptable, *i.e.*, la estimación simultánea del estado y los parámetros, para cierta clase de sistemas no-lineales inciertos. Un observador no-lineal adaptable por modos deslizantes es propuesto basado en un algoritmo de estimación de parámetros no-lineal. El algoritmo de estimación de parámetros no-lineal proporciona una velocidad de convergencia más rápida que la exponencial mientras que el observador por modos deslizantes asegura acotamiento final para el error de estimación atenuando los efectos de perturbaciones externas. Desigualdades lineales matriciales son propuestas para la síntesis del observador adaptable y se presentan resultados de simulación que demuestran la factibilidad del esquema propuesto.

*Keywords:* Observador Adaptable, Sistemas No-Lineales, Modos Deslizantes.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Las perturbaciones e incertidumbres existen en casi todos los sistemas físicos, en la forma de perturbaciones externas, dinámicas no modeladas y/o parámetros desconocidos. Uno de los principales problemas para el diseño de control robusto es la existencia de ciertas perturbaciones y el hecho de que todo el estado no está disponible para su medición. Una herramienta útil para lidiar con este problema ha sido estudiada durante las últimas décadas, *i.e.*, la teoría de control adaptable. Esta teoría ha recibido gran atención dada la necesidad del diseño de controles adaptables. El área de control adaptable ha crecido para convertirse en una de las áreas más amplias en términos de algoritmos, herramientas analíticas y técnicas para su diseño (veáse, *e.g.* Astolfi et al. (2008)). Particularmente, el diseño de observadores estimando simultáneamente el estado y los parámetros del sistema por alguna ley adaptable en línea es un problema importante en el área de control adaptable (veáse Besançon (2007)).

En este ámbito, una clase de observadores adaptables para un sistema extendido es propuesto en Pu et al. (2015) el cual incrementa significativamente las aplicaciones de los observadores para sistemas extendidos a sistemas no-lineales perturbados. En Ekramian et al. (2013) el problema de observadores adaptables para sistemas Lipschitz no-lineales es abordado. Condiciones

suficientes están dadas en términos de Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs) que aseguran la convergencia a cero del error de estimación del estado con parámetros conocidos. Por otro lado, un observador adaptable híbrido es diseñado en Folin et al. (2016) y se demuestra que el error de estimación paramétrica converge exponencialmente a cero si el periodo de muestreo es suficientemente pequeño y la condición de excitación persistente se satisface. Sobre este tema, en Farza et al. (2009) un observador adaptable fue propuesto para estimar el estado y los parámetros desconocidos los cuales convergen exponencialmente a cero bajo una condición de excitación persistente para sistemas no-lineales uniformemente observables con Múltiples-Entradas-Múltiples-Salidas (MIMO). Los autores también proponen un observador adaptable para cierta clase de sistemas no-lineales MIMO uniformemente observables con parametrización no-lineal, la cual provee convergencia exponencial a cero del error de estimación adaptable. Observadores adaptables usando retardos son propuestos en Oyvind et al. (2010). Los autores proponen un método para el rediseño de observadores adaptables para sistemas no-lineales que incrementan el cálculo computacional pero que otorgan mejores estimaciones de los parámetros y algunas propiedades de robustez. En este contexto de parametrización no-lineal pocos resultados se encuentran disponibles en la literatura. Por ejemplo, en Kojic and Annaswamy (2002) un control adaptable es propuesto para cierta clase de sistemas no-lineales con una estructura triangular y parametrización no-lineal.

---

\* Los autores agradecen el apoyo financiero de CONACYT 772057 y 270504, además al TECNM por sus proyectos.

Este enfoque proporciona acotamiento final para tareas de regulación y seguimiento. En Tyukin et al. (2013) observadores adaptables son propuestos para cierta clase de sistemas con no linealidades en los parámetros. Estos observadores pueden reconstruir asintóticamente el estado y los parámetros desconocidos.

En el área de modos deslizantes, también se han propuesto diferentes observadores adaptables. En Zhang and Wang (2016) un observador adaptable por modos deslizantes es diseñado para un sistema de reducción de selección catalítica en un motor diésel después de su tratamiento, obteniendo mejor desempeño con respecto a un observador de Luenberger. En el problema de detección de fallas, un observador adaptable por modos deslizantes es propuesto por Rahme and Meskin (2015) para solucionar el problema del diagnóstico de fallas en sensores en una turbina de gas industrial. En Laghrouche et al. (2015) un observador de ganancia adaptable por modos deslizantes de segundo orden es desarrollado para estimar los estados del sistema y los parámetros desconocidos. El desempeño del observador propuesto se muestra en un sistema de alimentación de aire por medio de simulaciones tipo hardware-in-the-loop. Un observador adaptable por modos deslizantes es propuesto en Yan and Edwards (2008) para cierta clase de sistemas no lineales con parámetros desconocidos y fallas. Basados en las principales propiedades de los observadores por modos deslizantes, una reconstrucción asintótica de la falla es proporcionada tomando en cuenta que el grado relativo de la salida, con respecto a la falla, es igual a uno. Es importante resaltar que la mayoría de los observadores adaptables propuestos están basados en algoritmos de estimación de parámetros lineales. Adicionalmente, la mayoría de estos trabajos no consideran perturbaciones externas y la velocidad de convergencia es asintótica o exponencial. En este contexto, en Efimov and Fradkov (2015) se ha demostrado que no se pueden lograr mejoras, en la velocidad de convergencia para el error de estimación de parámetros, simplemente incrementando las ganancias del observador adaptable, pero sí cambiando la estructura de dichos observadores.

En este artículo un observador adaptable por modos deslizantes es propuesto, basado en un algoritmo no-lineal de estimación de parámetros, para cierta clase de sistemas no-lineales. El observador adaptable no-lineal propuesto es una extensión del propuesto en Ríos et al. (2018). Esta extensión incrementa la clase de sistemas no-lineales para los cuales el observador adaptable puede ser aplicado permitiendo tener una matriz de distribución de parámetros y términos no-lineales dependiendo de todo el estado y la entrada. En Ríos et al. (2018), tales funciones dependen únicamente de la salida y de la entrada. El observador adaptable propuesto garantiza el acotamiento final del error de estimación tanto del estado como de los parámetros atenuando los efectos de las perturbaciones externas. La síntesis del observador está dada en términos de LMIs. Las pruebas de convergencia son desarrolladas por medio de la Teoría de Lyapunov y la teoría de estabilidad entrada-estado (ISS). Resultados de simu-

lación muestran la eficiencia del observador adaptable propuesto.

El artículo tiene la siguiente estructura. El planteamiento del problema se encuentra en la Sección 2. Los preliminares son discutidos en la Sección 3. Las ecuaciones del observador y el análisis de sus propiedades así como sus pruebas de estabilidad son presentadas en la Sección 4. Los resultados de simulaciones y la comparación con el algoritmo lineal se muestran en la Sección 5. Finalmente, las conclusiones se encuentran en la Sección 6.

**Notación:** La norma Euclideana de un vector  $q \in \mathbb{R}^n$  es representada por  $\|q\|$ . Para una matriz  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $\sigma_{\min}(Q) = \sqrt{\lambda_{\min}(Q^T Q)}$  y  $\|Q\| := \sigma_{\max}(Q) := \sqrt{\lambda_{\max}(Q^T Q)}$ , donde  $\lambda_{\max}$  es el eigenvalor máximo y  $\lambda_{\min}$  el mínimo,  $\sigma_{\max}$  es el valor singular más grande. Para una función Lebesgue medible  $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se define  $\|u\|_{(t_0, t_1)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|u(t)\|$ , entonces  $\|u\|_{\infty} := \|u\|_{(0, +\infty)}$  y el conjunto de funciones  $u$  con la propiedad  $\|u\|_{\infty} < +\infty$  es representado por  $\mathcal{L}_{\infty}$ . Para una matriz  $Q : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$   $\|Q\|_{\infty} := \|Q\|_{(0, +\infty)}$ . Una función continua  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ ; pertenece a la clase  $\mathcal{K}_{\infty}$  si además es radialmente no acotada. Una función continua  $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si, para cada valor fijo  $s$ ,  $\beta(r, s) \in \mathcal{K}$  con respecto a  $r$ , y para cada valor fijo  $r$ ,  $\beta(r, s)$  es decreciente a cero con respecto a  $s$ . El término  $\nabla V(x)f(x)$  representa la dirección de la derivada de una función continuamente diferenciable  $V$  con respecto al campo vectorial  $f$  evaluado en cualquier punto  $x$ .

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de sistemas no-lineales inciertos,

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u) + G(t, x, u)\theta + D\omega, \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $y \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salida,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $\theta \in \mathbb{R}^q$  es el vector de parámetros constantes desconocidos, y  $w \in \mathbb{R}^l$  es un vector de perturbaciones externas. Las matrices  $A$ ,  $C$  y  $D$  son conocidas con dimensiones correspondientes; y además el par  $(A, C)$  es detectable. Las funciones  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$  son conocidas y aseguran la unicidad y la existencia de las soluciones para el sistema (1) para cualquier perturbación permisible. Es importante recalcar que en Ríos et al. (2018) las funciones  $\phi(x, u)$  y  $G(t, x, u)$  fueron consideradas solo dependientes de la salida medible  $y$  y la entrada  $u$ .

El objetivo de este artículo es estimar el vector de estados y parámetros, *i.e.*,  $x$  y  $\theta$ , respectivamente; utilizando únicamente la información de la salida, atenuando tanto como sea posible los efectos de las perturbaciones externas.

Se considera que el sistema (1)-(2) satisface las siguientes restricciones.

**Suposición 1.** Asuma que  $\|x\|_\infty < +\infty$ ,  $\|u\|_\infty < +\infty$ ,  $\|\omega\|_\infty < +\infty$ , y  $\|G(t, x(t), u(t))\|_\infty < +\infty$  para todo  $t \geq 0$ .

**Suposición 2.** Las funciones  $\phi(x, u)$  y  $G(t, x, u)$  son globalmente Lipschitz con respecto a  $x$ ; y el vector de parámetros  $\theta$  está acotado; i.e., para toda  $t \geq 0$ , toda  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$  y toda  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq L_\phi \|x - \hat{x}\|$ ,  $\|G(t, x, u) - G(t, \hat{x}, u)\| \leq L_G \|x - \hat{x}\|$ ,  $\|\theta\| \leq \theta^+$ , con  $L_\phi, L_G, \theta^+ > 0$  constantes positivas y conocidas.

### 3. PRELIMINARES

Considere el siguiente sistema no lineal,

$$\dot{x} = f(x, \omega), \quad (3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $\omega \in \mathbb{R}^l$  son las perturbaciones externas, y  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente Lipschitz. Para una condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y una perturbación externa  $\omega \in \mathcal{L}_\infty$ , la solución es representada por  $x(t, x_0, \omega)$  para cualquier  $t \geq 0$ .

Las siguientes propiedades de estabilidad para el sistema (3) son introducidas (para más detalles véase Ríos et al. (2018), Bernuau et al. (2013) y Jiang et al. (1996)).

**Definición 1.** Bernuau et al. (2013). *El sistema (3) se dice que es Estable Entrada-Estado (ISS) si para cualquier  $\omega \in \mathcal{L}_\infty$  y cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existen ciertas funciones  $\beta \in \mathcal{KL}, \gamma \in \mathcal{K}$  tal que*

$$\|x(t, x_0, \omega)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|\omega\|_\infty), \forall t \geq 0.$$

Considere el siguiente sistema interconectado no-lineal

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \omega), \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \omega), \quad (5)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^l$ , y  $f_i : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  aseguran existencia de las soluciones del sistema al menos localmente, para  $i = 1, 2$ . Suponga que existen funciones de Lyapunov ISS  $V_1$  y  $V_2$ , para (4) y (5), respectivamente; y algunas funciones  $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3} \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\gamma_i, \chi_i \in \mathcal{K}$ , tales que, para toda  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  y cualquier  $\omega \in \mathcal{L}_\infty$ , las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\psi_{i1}(\|x_i\|) \leq V_i(x_i) \leq \psi_{i2}(\|x_i\|), i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &\geq \max[\chi_1(V_2(x_2)), \gamma_1(\|\omega\|)] \\ \Rightarrow \nabla V_1(x_1)f_1(x_1, x_2, \omega) &\leq -\psi_{13}(V_1(x_1)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_2(x_2) &\geq \max[\chi_2(V_1(x_1)), \gamma_2(\|\omega\|)] \\ \Rightarrow \nabla V_2(x_2)f_2(x_1, x_2, \omega) &\leq -\psi_{23}(V_2(x_2)). \end{aligned} \quad (8)$$

De esta manera, el siguiente resultado de pequeñas ganancias no-lineal es introducido en términos de propiedades de funciones de Lyapunov ISS para el sistema interconectado (4)-(5).

**Teorema 1.** Jiang et al. (1996). *Suponga que el sistema interconectado (4)-(5) tiene funciones de Lyapunov ISS  $V_1$  y  $V_2$  que satisfacen las condiciones (6)-(8). Entonces, el sistema (4)-(5) es ISS si*

$$\chi_1 \circ \chi_2(r) < r, \quad \forall r > 0. \quad (9)$$

### 4. OBSERVADOR ADAPTABLE POR MODOS DESLIZANTES

Considere el siguiente observador adaptable

$$\dot{\Omega} = (A - LC)\Omega + G(t, \hat{x}, u), \quad (10)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \Omega^T C^T [y - C\hat{x}]^\alpha, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + G(t, \hat{x}, u)\hat{\theta} + L(y - C\hat{x}) \\ &\quad + kD\text{sign}[F(y - C\hat{x})] + \Omega\hat{\theta}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde la función  $[a]^\alpha := |a|^\alpha \text{sign}(a)$ , para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  y cualquier  $a \in \mathbb{R}$ ; y la función  $\text{sign}[q] := \frac{q}{\|q\|}$ , para cualquier  $q \in \mathbb{R}^m$ , además  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$  y  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  son las estimaciones de  $\theta$  y  $x$ , respectivamente; y  $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times q}$  es una variable auxiliar. Si la señal  $G$  es de excitación persistente (PE), entonces, dada la propiedad de filtro de la variable  $\Omega$ , la variable  $C\Omega$  también es PE. Se puede apreciar que la función  $[y - C\hat{x}]^\alpha$  en (11) es entendida en un sentido elemento-a elemento. La matriz de ganancia del observador  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tiene que ser seleccionada tal que  $(A - LC)$  sea Hurwitz,  $\Gamma = \Gamma^T > 0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , mientras  $F \in \mathbb{R}^{l \times p}$  y  $k \geq 0$  son diseñadas más adelante. Considere que la siguiente suposición se satisface,

**Suposición 3.** Asuma que  $0 < \varrho_{\min} \leq \sigma_{\min}(C\Omega(t))$  para toda  $t \geq 0$  y  $\|C\Omega\|_\infty \leq \varrho_{\max} < +\infty$ .

La existencia de  $\varrho_{\max}$  está garantizada por la Suposición 2 y el hecho de que la matriz  $(A - LC)$  es Hurwitz; mientras que si la matriz  $C\Omega$  tiene rango columna completo, entonces la existencia de  $\varrho_{\min}$  se asegura. Los valores de  $\varrho_{\max}$  y  $\varrho_{\min}$  pueden ser evaluados numéricamente durante experimentos.

#### 4.1 Algoritmo de Identificación de Parámetros no-lineal

Se define el error  $\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta$  y  $\delta := \tilde{x} + \Omega\tilde{\theta}$  con  $\tilde{x} := x - \hat{x}$ . Entonces, la dinámica del error está dada por:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \Omega^T C^T [C\Omega\tilde{\theta} - C\delta]^\alpha, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= (A - LC)\delta + D(\omega - k\text{sign}[F(y - C\hat{x})]) \\ &\quad + \Delta_\phi(x, \hat{x}, u) + \Delta_g(t, x, \hat{x}, u)\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\Delta_\phi(x, \hat{x}, u) := \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)$  y  $\Delta_g(t, x, \hat{x}, u) := G(t, x, u) - G(t, \hat{x}, u)$ . Las propiedades de convergencia ISS de la dinámica del error (13) con respecto a la entrada  $\delta$  para  $\alpha \in [0, 1]$  están dadas por los siguientes resultados.

**Lema 1.** Ríos et al. (2018). *Si la Suposición 3 se satisface; entonces, la dinámica del error (13), con  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , es ISS con respecto a  $\delta$  y las trayectorias satisfacen:*

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \sqrt{r_1} \left( r_2^{\frac{\alpha-1}{2}} \|\tilde{\theta}_0\|^{1-\alpha} + \psi_\delta t \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \forall t \leq T_{\tilde{\theta}_0}, \quad (15)$$

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \mu_\delta, \quad \forall t > T_{\tilde{\theta}_0}, \quad (16)$$

donde  $\tilde{\theta}_0 := \tilde{\theta}(0)$ ,  $\psi_\delta := 2^{\alpha-1} \alpha^2 \varrho_{\min}^{\alpha+1} (2r_2)^{\frac{\alpha+1}{2}} / 2(1+\alpha)$ ,  $r_1 := 2\lambda_{\max}(\Gamma)$ ,  $r_2 := 2\lambda_{\min}(\Gamma)$  y

$$\mu_\delta = \frac{p^{\frac{1}{\alpha+1}} [(1+\alpha)^\alpha + 2^{2-\alpha} \alpha^{\alpha-1}]^{\frac{1}{\alpha+1}} \|C\| \|\delta\|_\infty}{\varrho_{\min} (1+\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}$$

$$T_{\tilde{\theta}_0} \leq \max \left[ 0, \frac{2^{1-\alpha} (1+\alpha) (\|\tilde{\theta}_0\|^{1-\alpha} - \mu_\delta^{1-\alpha})}{\alpha^2 \varrho_{\min}^{\alpha+1} r_2} \right],$$

para cualquier  $\tilde{\theta}_0 \in \mathbb{R}^q$  con  $p$  la dimensión de la salida.

Los resultados del Lema 1 establecen que las trayectorias de la dinámica del error (13), *i.e.*,  $\tilde{\theta}(t)$ , entran dentro de la cota  $\sqrt{r_1/r_2}\mu_{\tilde{\theta}}$  en tiempo finito para cualquier  $\alpha \in [0, 1)$ . Es claro que el tamaño de la cota depende de  $\alpha$ . En el mismo contexto, el siguiente Lema presenta las propiedades de convergencia ISS para la dinámica del error (14) con respecto a las entradas  $\tilde{\theta}$  y  $\omega$ .

**Lema 2.** *Asuma que las Suposiciones 1 y 2 se cumplen. Suponga que  $k = \|\omega\|_{\infty}$  y que las siguientes desigualdades matriciales*

$$PD \leq C^T F^T, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta & \frac{\beta}{2}I_n & P & P \\ \star & -\Lambda^{-1} & 0 & 0 \\ \star & \star & -\Lambda & 0 \\ \star & \star & \star & -\frac{\varepsilon}{\eta_2^2}I_n \end{bmatrix} \leq 0, \quad (18)$$

$$\zeta := (A - LC)^T P + P(A - LC) + \eta_1 P + \sigma C^T C,$$

*tienen solución para  $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $0 < \Lambda^T = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\eta_1 := 2(L_{\phi} + L_G \theta^+)$ ,  $\eta_2 := \eta_1 \|\Omega\|_{\infty}$ , y algunas constantes positivas  $\beta, \varepsilon, \sigma > 0$ . Entonces, el sistema (14) es ISS con respecto a las entradas  $\tilde{\theta}$  y  $\omega$ . Además, las trayectorias satisfacen:*

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\frac{\psi_{\delta}}{2}t} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\delta_0\|, \quad \forall t \leq T_{\delta_0}, \quad (19)$$

$$\|\delta(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \mu_{\delta}, \quad \forall t > T_{\delta_0}, \quad (20)$$

donde  $\tilde{\delta}_0 := \delta(0)$ ,  $\psi_{\delta} := \alpha_{\delta}(1 - \rho)/\lambda_{\max}(P)$ ,  $\alpha_{\delta} := \beta\lambda_{\min}(P) + \sigma\|C\|^2/2$ ,  $\rho \in (0, 1)$  y

$$\mu_{\delta} = \sqrt{\frac{2\varepsilon + \sigma\rho_{\max}^2}{2\rho\alpha_{\delta}} \|\tilde{\theta}\|_{\infty} + \sqrt{\frac{8\|F\|^2}{\rho\alpha_{\delta}\sigma}} \|\omega\|_{\infty}},$$

$$T_{\delta_0} \leq \max\left(0, \frac{2[\ln(\|\delta_0\|) - \ln(\mu_{\delta})]}{\psi_{\delta}}\right),$$

para cualquier  $\delta_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Es claro que el tamaño de  $\mu_{\delta}$  puede ser minimizado para atenuar los efectos de  $\omega$ . Por otro lado, note que la condición (17) introduce algunas restricciones estructurales en el sistema. Particularmente, se requiere que la tripleta  $(A, D, C)$  no tenga zeros invariantes, y que el grado relativo de la salida  $y$  con respecto a la entrada  $\omega$  sea igual a uno. La solución de (18) puede ser asegurada para valores pequeños de  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , dado que el par  $(A, C)$  es detectable. En este sentido, es importante mencionar que la desigualdad matricial (20) puede ser fácilmente reescrita para obtener una LMI con respecto a las matrices  $P$  y  $Y := PL$  fijando los valores para  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  y  $\Lambda$ .

#### 4.2 Convergencia del Observador Adaptable

Para mostrar las propiedades de convergencia del observador adaptable (10)-(12), los resultados dados por los Lemas 1, 2, y Teorema 1 son aplicados. El siguiente resultado demuestra que el sistema del error interconectado (13)-(14) es ISS con respecto a las perturbaciones externas  $\omega$ , para cualquier  $\alpha \in [0, 1)$ .

**Teorema 2.** *Si las Suposiciones 1, 2 y 3 se satisfacen y las desigualdades matriciales (17), (18) y*

$$\left(\frac{(p\kappa_{\delta})^{\frac{2}{\alpha+1}}\|C\|^2(2\varepsilon + \sigma\rho_{\max}^2)\lambda_{\min}(P)r_1}{\rho_{\min}^2(1 + \alpha)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\lambda_{\max}(P)\rho\alpha_{\delta}\sigma}\right) < 1, \quad (21)$$

*tienen solución para  $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $0 < \Lambda^T = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $0 < \Gamma^T = \Gamma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , constantes  $\alpha_{\delta} = \beta\lambda_{\min}(P) + \sigma\|C\|^2/2$ ,  $\eta_1 = 2(L_{\phi} + L_G \theta^+)$ ,  $\eta_2 = \eta_1 \|\Omega\|_{\infty}$ ,  $\kappa_{\delta} := (1 + \alpha)^{\alpha} + 2^{2-\alpha}\alpha^{\alpha-1}$ ,  $\beta, \varepsilon, \sigma > 0$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $r_1 = 2\lambda_{\max}(\Gamma)$ ,  $\rho \in (0, 1)$  y  $p$  la dimensión de la salida. Entonces, el sistema interconectado del error (13)-(14) es ISS con respecto a la entrada  $\omega$ .*

El Teorema 2 implica que la estimación del error  $e := x - \hat{x} = \delta + \Omega\tilde{\theta}$  es ISS con respecto a la entrada  $\omega$ , para cualquier  $\alpha \in [0, 1)$ , dado que

$$\|e(t)\| \leq (1 + \|\Omega\|) \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \right\|, \quad \forall t \geq 0.$$

En el caso ideal, *i.e.*,  $\omega \equiv 0$  y  $k = 0$ , las estimaciones  $\tilde{\theta}$  y  $\hat{x}$  convergen a sus valores reales y la velocidad de convergencia de  $\tilde{\theta}$  es más rápida que exponencial para cualquier  $\alpha \in [0, 1)$ , *i.e.*, tiempo finito. Para el caso perturbado, *i.e.*,  $\omega \neq 0$  con  $k = \|\omega\|_{\infty}$ , el efecto de la perturbación externa  $\omega$  está atenuado completamente.

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Consideremos el sistema de un Quadrotor García et al. (2013) representado por la siguiente dinámica,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u_z(\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) - k_x \dot{x}, \\ m\ddot{y} &= u_z(\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) - k_y \dot{y}, \\ m\ddot{z} &= u_z(\cos\phi \cos\theta) - mg - k_z \dot{z}, \\ J_x \ddot{\theta} &= u_{\theta} + (J_y - J_z) \dot{\phi} \dot{\psi}, \\ J_y \ddot{\phi} &= u_{\phi} + (J_z - J_x) \dot{\theta} \dot{\psi}, \\ J_z \ddot{\psi} &= u_{\psi} + (J_x - J_y) \dot{\theta} \dot{\phi}, \end{aligned}$$

donde  $x, y, z \in \mathbb{R}$  definen la posición del centro de masa del Quadrotor,  $\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R}$  son los ángulos de cabeceo, balanceo y guiñada respectivamente; las entradas de control  $u_{\theta}, u_{\psi}, u_{\phi}, u_z \in \mathbb{R}$ , además  $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  corresponde a la masa del Quadrotor y  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $J_x, J_y, J_z$  representan los momentos de inercia en su correspondiente eje. Finalmente  $k_x, k_y, k_z$  representan los coeficientes de arrastre los cuáles se consideran constantes y serán los parámetros desconocidos a estimar. Se define  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})^T = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi})^T$ . El sistema se puede reescribir como en (1) y (2) con las siguientes matrices y funciones,

$$A = \text{diag}(\bar{I}, \bar{I}, \bar{I}, \bar{I}, \bar{I}), \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_z}{m} (\cos x_9 \sin x_7 \cos x_{11} + \sin x_9 \sin x_{11}) \\ 0 \\ \frac{u_z}{m} (\cos x_9 \sin x_7 \sin x_{11} + \sin x_9 \cos x_{11}) \\ 0 \\ -g + \frac{u_z}{m} (\cos x_9 \cos x_7) \\ 0 \\ \frac{u_\theta}{J_x} + \frac{J_y - J_z}{J_x} x_{10} x_{12} \\ 0 \\ \frac{u_\phi}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y} x_8 x_{12} \\ 0 \\ \frac{u_\psi}{J_x} + \frac{J_x - J_y}{J_z} x_8 x_{10} \end{bmatrix},$$

$$G(t, x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 \\ \frac{u_z}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_4}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x_6}{m} \\ 0_{6 \times 3} & & \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No se consideran perturbaciones externas, por lo tanto  $\omega = 0$ . Los valores numéricos de los parámetros del sistema son  $J_x = 0.032[Kgm^2]$ ,  $J_y = 0.030[Kgm^2]$ ,  $J_z = 0.040[Kgm^2]$ ,  $g = 9.8 [m/s^2]$ ,  $m = 1 [Kg]$  y  $k_x, k_y, k_z = 1$ .

Puede ser demostrado que el sistema satisface las Suposiciones 1 y 2. Se considera que el Quadrotor realiza la tarea de seguimiento a una altura constante mientras que las condiciones iniciales para el observador adaptable (10)-(12) están dadas por  $\Omega(0) = 0$ ,  $\hat{\theta}(0) = 0$  y  $\hat{x}(0) = 1$ .

Ajustando  $\Gamma = \text{diag}(100, 100, 10000)$ ,  $k = 1$  y  $\Lambda = I_{12}$ , se utiliza el paquete SeDuMi a través de Yalmip en Matlab para encontrar la solución de las LMIs (17) y (18), y entonces, verificar (21). La solución es encontrada con  $L_{\phi_1} = 2$ ,  $L_{G_1} = 1$ ,  $\|\Omega\|_\infty = 0.577$ ,

$$P = \text{diag}(P_1, P_2),$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 14.5 & -0.9 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 14.3 & -0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0.34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 14.7 & -0.9 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0.34 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 14.7 & -0.9 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0.34 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 14.4 & -0.9 & 0 & 0 \\ * & 0.34 & 0 & 0 \\ * & * & 14.7 & -0.9 \\ * & * & * & 0.34 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 25.2 & 0 & 0.32 & -0.02 & -0.09 & 0.01 \\ 74.4 & 0 & 0.56 & -0.01 & -0.14 & 0.03 \\ -0.01 & 25.1 & -0.31 & 0.05 & 0.07 & 0 \\ -0.05 & 73.9 & -0.52 & 0.1 & 0.14 & 0 \\ -0.45 & 0.48 & 25.4 & -0.1 & -0.01 & 0 \\ -1.59 & 1.58 & 75.4 & -0.17 & -0.03 & 0 \\ 0.04 & -0.07 & 0.14 & 25.3 & -0.03 & -0.02 \\ 0.16 & -0.25 & 0.49 & 75.1 & -0.06 & -0.05 \\ 0.15 & -0.1 & 0.01 & 0.04 & 25.2 & 0.02 \\ 0.56 & -0.34 & 0.02 & 0.15 & 74.2 & 0.04 \\ -0.02 & -0.01 & 0.01 & 0.03 & -0.04 & 25.3 \\ -0.9 & -0.05 & 0.04 & 0.09 & -0.12 & 75 \end{bmatrix},$$

$$\beta = 0.4192, \epsilon = 833.3063, \sigma = 209.67.$$

Las simulaciones correspondientes fueron hechas en Matlab con el método de integración de Euler y un tiempo de muestreo igual a 0.001. Basado en simulaciones, se puede demostrar que la Suposición 3 se mantiene con  $\rho_{max} = 0.008$ ,  $\rho_{min} = 0.001$  y ajustando  $\rho = 0.9$ . Tomando los valores correspondientes, se demuestra que las condiciones del Teorema 2 se satisfacen. Los resultados de la simulación fueron realizados para distintos valores de  $\alpha \in [0, 1)$  los cuales son mostrados en las Figuras 1, 2 y 3. Se puede ver que los estimados de los parámetros convergen a su valor real, además de demostrar que converge más rápido que el algoritmo lineal, i.e.,  $\alpha = 1$ .

Para mostrar el desempeño del algoritmo propuesto se introduce el siguiente índice de error:

$$e_{RMS}(t) = \left( \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^t \|\tilde{\theta}(\tau), e(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde  $\Delta T = 2$  es el ancho de la ventana del tiempo en el cual la señal correspondiente es evaluada. Los resultados se muestran en la Figura 4. En este caso, se muestra que con  $\alpha = 0$  se obtiene el mejor resultado.

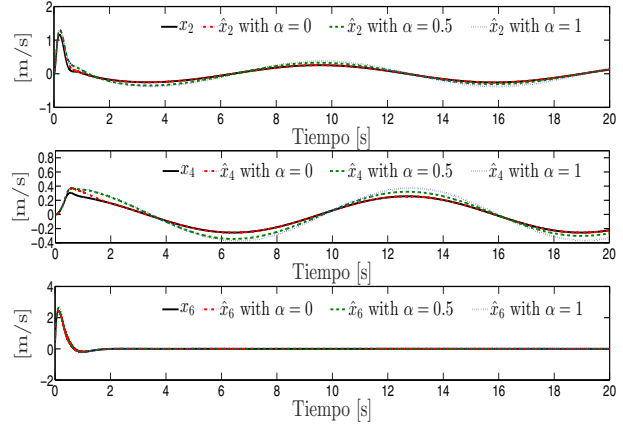


Figure 1. Estimación de las velocidades lineales.

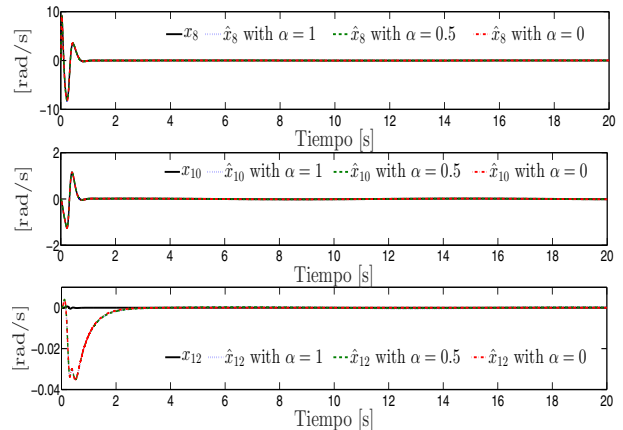


Figure 2. Estimación de las velocidades angulares.

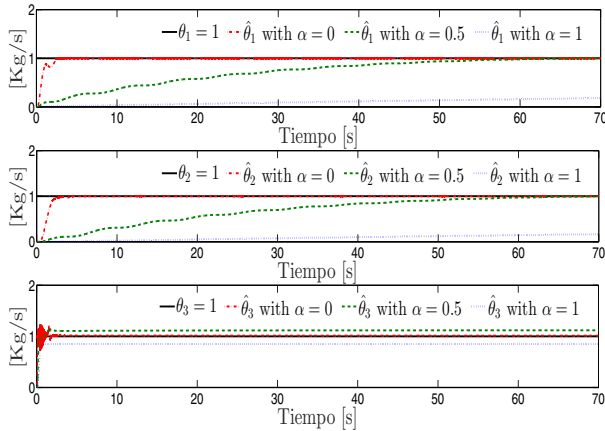


Figure 3. Estimación de los parámetros.

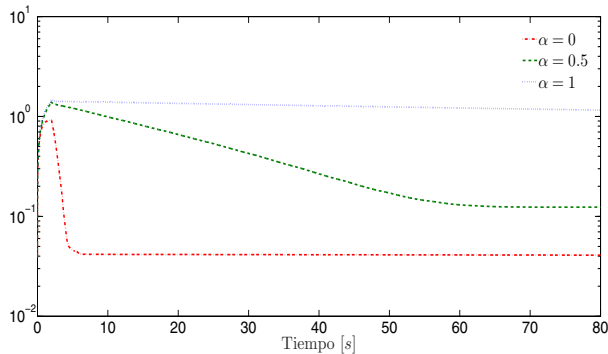


Figure 4. Índice del error de estimación  $e_{RMS}$ .

## 6. CONCLUSIONES

Este artículo contribuye con un Observador Adaptable por Modos Deslizantes basado en un algoritmo de estimación de parámetros no-lineal para cierta clase de sistemas no-lineales. El Observador Adaptable propuesto garantiza el acotamiento final del error de estimación tanto del estado como de los parámetros atenuando los efectos de las perturbaciones externas. La síntesis del observador está presentada en términos de LMIs. Las pruebas de convergencia son desarrolladas por medio de la teoría de Lyapunov y la teoría de estabilidad ISS. Resultados de simulación muestran la eficiencia del Observador Adaptable propuesto.

## REFERENCES

- Astolfi, A., Karaglannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlang London UK.
- Bernuau, E., Polyakov, A., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2013). Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying wighted homogeneity. *System and Control Letters*, 62, 1159–1167.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Application*. Springer-Verlang Berlin Heidelberg.
- Efimov, D. and Fradkov, A. (2015). Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation. *Int J Adapt Control Signal*, 29, 765–782.

Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., and Yazdanpanah, M. (2013). Adaptive state observer for Lipschitz nonlinear systems. *Systems and control letters*, 62, 319–323.

Farza, M., M Saad, M., Maatoug, T., and Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinear parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45, 2292–2299.

Folin, T., Ahmed-Ali, T., Giri, F., Burlion, L., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2016). Sampled-data adaptive observer for a class of state-affine output-injection nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61, 462–467.

García, R., Dzul, E., Lozano, R., and Pégard, C. (2013). *Quad Rotorcraft Control*. Springer-Verlag London, London.

Jiang, Z., Mareels, I., and Wang, Y. (1996). A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems. *Automatica*, 32, 1211–1215.

Kojic, A. and Annaswamy, A. (2002). Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure. *Automatica*, 38, 115–123.

Laghrouche, S., Liu, J., Ahmed, S., Harmouche, M., and Wack, M. (2015). Adaptive second-order sliding-mode observer-based fault reconstruction for PEM fuel cell air-feed system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23, 1098–1109.

Oyvind, N., Morten, A.O., and Glenn-Ole, K. (2010). Redesign of adaptive observers for improved parameter identification in nonlinear systems. *Automatica*, 47, 403–410.

Pu, Z., Yuan, R., Yi, J., and Tan, X. (2015). A class of adaptive extended state observers for nonlinear disturbed systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62, 5858–5869.

Rahme, S. and Meskin, N. (2015). Adaptive sliding-mode observer for sensor fault diagnosis of an industrial gas turbine. *Control Engineering Practice*, 38, 57–74.

Ríos, H., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2018). An adaptive sliding-mode observer for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 32, 511–527.

Tyukin, I., Nijmeijer, H., and van Leeuwen, C. (2013). Adaptive observers and parameter estimation for a class of systems nonlinear in the parameters. *Automatica*, 49, 2409–2423.

Yan, X. and Edwards, C. (2008). Adaptive sliding-mode-observer-based fault reconstruction for nonlinear systems with parametric uncertainties. *IEEE Trans Ind Electron*, 55, 4029–4036.

Zhang, H. and Wang, J. (2016). Adaptive sliding-mode observer design for a selective catalytic reduction system of ground-vehicle diesel engines. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 21, 2027–2038.