

# Diseño de un observador dinámico generalizado para el proceso glucosa-insulina utilizando el enfoque Takagi-Sugeno

M.-A. Flores-Martínez \* G.-L. Osorio-Gordillo \*  
A.-J. Pérez-Estrada \*\*, J. Reyes-Reyes \* M. Adam-Medina \*

\* *Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor. Mexico. (e-mail: miguel.flores17ee@cenidet.edu.mx)*

\*\* *CRAN-CNRS (UMR 7039), Université de Lorraine, IUT Longwy, 186, Rue de Lorraine, 54400 Cosnes et Romain, France.*

Resumen: En este trabajo se desarrolla el diseño de un observador de estados para el sistema Glucosa-insulina de pacientes con diabetes mellitus tipo 1, representado por un modelo Takagi-Sugeno utilizando el enfoque de sector no lineal. El observador dinámico generalizado (GDO) presentado contiene una estructura más general que los observadores existentes como el proporcional (PO) y el proporcional-integral (PIO), lo cual aumenta su precisión en estado estable. El diseño del GDO se deriva de la solución de desigualdades matriciales lineales (LMIs). El desempeño del GDO es ilustrado mediante una simulación para la estimación de los estados del sistema Glucosa-insulina, donde la perturbación debida a la ingesta de alimentos fue considerada.

*Keywords:* Observador dinámico generalizado, sistema Takagi-Sugeno, Sistema Glucosa-insulina.

## 1. INTRODUCCIÓN

La diabetes mellitus es uno de los problemas más graves de salud pública que enfrenta México. Cerca del 10% de la población padece la enfermedad y se estima que la cifra podría ser del doble por aquellas personas que aún no han sido diagnosticadas. La mortalidad por diabetes mellitus se ha ido incrementando constantemente en el país, desde 1998 hasta 2014, llegando hasta las 94,029 defunciones, y se posicionó como la causa número uno de mortalidad a nivel nacional, según los datos del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Información desde 2013 (INEGI, 2014).

La diabetes mellitus es un conjunto de trastornos metabólicos, cuya característica común principal es la presencia de concentraciones elevadas de glucosa en la sangre de manera persistente o crónica, debido ya sea a un defecto en la producción de insulina, a una resistencia a la acción de ella para utilizar la glucosa, a un aumento en la producción de glucosa o a una combinación de estas causas, estos factores determinan el tipo de diabetes ya sea tipo 1 o tipo 2. Los pacientes con diabetes tipo 1 requieren terapia de insulina de por vida. La mayoría requiere dos o más inyecciones de insulina al día, con dosis ajustadas según el autocontrol de los niveles de glucosa.

El cuerpo regula de forma natural los niveles de glucosa en sangre en un rango estrecho, entre  $70 - 110 \frac{mg}{dL}$  gracias al sistema glucosa-insulina. El sistema glucosa-insulina es un ejemplo de un sistema fisiológico de lazo cerrado.

Para una mejor comprensión del sistema metabólico y una monitorización adecuada del nivel de glucosa, los investigadores, médicos e ingenieros han desarrollado modelos matemáticos, por ejemplo, Ackerman et al. (1964), Salzsieder et al. (1985), Sorensen (1985), Gaetano and Arino (2000), entre otros.

Los observadores de estado son algoritmos matemáticos que se han convertido en una herramienta útil para estimar variables que no se pueden medir directamente. Existen observadores con estructuras diferentes, por ejemplo, el Observador proporcional (PO), que es bien sabido que son sensibles a las incertidumbres paramétricas, ante tal hecho pueden presentar error en estado estable en sus estimaciones. Para hacer frente a este inconveniente, se introdujeron los observadores proporcionales integrales (PIO), que tienen una ganancia integral adicional del error de salida en su estructura (Osorio-Gordillo et al., 2016).

Existen diferentes enfoques para representar sistemas no lineales, uno de estos son los sistemas Takagi-Sugeno. El enfoque Takagi-Sugeno tiene como finalidad representar un sistema de una forma más simple, tomando en cuenta las no linealidades del sistema, es decir, es otra forma de representar modelos no lineales con las mismas características de un sistema no lineal pero relativamente sencillo de manipular para realizar control, dado que es considerado un modelo lineal, al que todas las herramientas desarrolladas para sistemas lineales pudiesen ser aplicadas.

En este trabajo se presenta una alternativa para la es-

timación de variables de estado, a través del Observador Dinámico Generalizado (GDO) para sistemas con representación Takagi-Sugeno. Este observador presenta una estructura más general que la de los observadores dinámicos existentes, como el PO y el PIO que pueden ser considerados como casos particulares. Mediante el uso de desigualdades matriciales lineales (LMIs) se presentan las condiciones necesarias para el diseño de este observador.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

### 2.1 Modelo no lineal glucosa-insulina

En la literatura existen diversos modelos para representar el sistema glucosa-insulina, por ejemplo, Ackerman et al. (1964), Salzsieder et al. (1985), Sorensen (1985), Gaetano and Arino (2000), entre otros.

Sin embargo, un sistema que se considera viable para fines de control, pero que además representa adecuadamente el proceso biológico, es aquel presentado por Bergman et al. (1981). Este modelo describe el sistema Glucosa-insulina de un paciente con diabetes mellitus tipo 1 como se muestra a continuación:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -(p_1 + X(t))G(t) + p_1G_b + D(t) \quad (1)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = -p_2X(t) + p_3(I(t) - I_b) \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -p_4I(t) + \frac{U(t)}{V_I} \quad (3)$$

donde las tres variables de estado son: la concentración de glucosa plasmática  $G(t)$  ( $mg/dL$ ), el efecto de la insulina activa  $X(t)$  ( $min^{-1}$ ) y la concentración de insulina plasmática  $I(t)$  ( $mU/dL$ ). La variable de control es la dosis de insulina exógena  $U(t)$  ( $mU/min$ ), mientras que la función de ingesta de alimentos  $D(t)$  ( $mg/dL/min$ ) representa una perturbación.

Una descripción para dicha perturbación presentada por Fisher (1991), está dada por la siguiente ecuación:

$$D(t) = Be^{-drate t} \quad (4)$$

Los parámetros del modelo se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1. Definición de los parámetros

Parámetro	Valor	Definición
$G_b$	81[ $mg/dL$ ]	Concentración de glucosa plasmática basal
$I_b$	2.5[ $mU/dL$ ]	Concentración de insulina plasmática basal
$V_I$	120[ $dL$ ]	Volumen de distribución de insulina en sangre
$p_1$	0.05[ $min^{-1}$ ]	Tasa de eliminación de glucosa independiente de insulina
$p_2$	0.1[ $min^{-1}$ ]	Tasa de eliminación de insulina activa
$p_3$	0.00065[ $\frac{dL}{mU} min^{-2}$ ]	Aumento en la capacidad de absorción causada por la insulina
$p_4$	5/54[ $min^{-1}$ ]	Tasa de desaparición de la insulina en la sangre
$drate$	0.05[ $\frac{mg}{dL} min$ ]	Tasa de descomposición de la perturbación de comida
$B$	15g, 19g, 18g	Cantidad de carbohidratos ingeridos en el desayuno, comida y cena.

### 2.2 Formulación Takagi-Sugeno

Los modelos Takagi-Sugeno fueron propuestos originalmente por Tomohiro Takagi y Michio Sugeno en Takagi and Sugeno (1985). El enfoque del sector no lineal ha sido bien descrito por Ohtake et al. (2001). Este enfoque es uno de los más usados para la construcción de modelos Takagi-Sugeno y para el diseño del control difuso, ya que se puede obtener una representación exacta de un sistema no lineal en un conjunto compacto del espacio de estado (Lendek et al., 2011).

Siguiendo la metodología para representar un modelo no lineal en un sistema Takagi-Sugeno utilizando el enfoque del sector no lineal, el sistema (1)-(3) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) + \Delta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{donde } A = \begin{bmatrix} -(p_1 + X(t)) & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{V_I} \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} p_1G_b \\ -p_3I_b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ X(t) \\ I(t) \end{bmatrix},$$

$u(t) = U(t)$ . En esta formulación en particular la perturbación por ingesta de alimentos  $D(t)$  fue considerada cero.

En este caso la no linealidad del sistema está dada por  $z(t) = -(p_1 + X(t))$ , al tener una sola no linealidad tendremos  $m = 2^p$  modelos locales, donde  $p$  es el número de no linealidades, en este caso se obtienen dos modelos locales.

Usando el enfoque del sector no lineal, se sabe que  $z(t)$  varía en una región acotada  $z(t) = [\underline{z} \ \bar{z}]$ , donde  $\underline{z}$  y  $\bar{z}$  son el límite inferior y superior de variación de  $z(t)$ .

De forma tal que las funciones de pertenencia están dadas por

$$\omega_1(z(t)) = \eta_0^1 = \frac{\bar{z} - z(t)}{\bar{z} - \underline{z}}, \quad \omega_2(z(t)) = \eta_1^1 = 1 - \eta_0^1 \quad (6)$$

Con lo que se obtiene la siguiente representación Takagi-Sugeno

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (A_i x(t)) + Bu(t) + \Delta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $A_1 = \begin{bmatrix} \underline{z} & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_4 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} \bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_4 \end{bmatrix}$ , matrices  $B$ ,  $\Delta$  y  $C$  están definidas en (5).

## 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR DINÁMICO GENERALIZADO

En esta sección se presenta el diseño del observador dinámico generalizado para un sistema con representación tipo Takagi-Sugeno, tal como la mostrada en (7).

Dado un sistema Takagi-Sugeno de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (A_i x(t)) + Bu(t) + \Delta \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados del

sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada y  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medidas.

**Suposición 1:** Considere que la siguiente condición de observabilidad se cumple en cada uno de los  $m$  modelos

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = [1, \dots, m] \quad (9)$$

El Observador Dinámico Generalizado está dado por

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (N_i \zeta(t) + H_i \nu(t) + F_i y(t)) + Ju(t) + T\Delta \quad (10)$$

$$\dot{\nu}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (S_i \zeta(t) + L_i \nu(t) + M_i y(t)) \quad (11)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (12)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $\nu(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i, H_i, F_i, J, S_i, L_i, M_i, P$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$ .

**Observación:** El GDO (10)-(12) se encuentra en forma generalizada. De hecho:

- Para  $H_i = 0, S_i = 0, M_i = 0$  y  $L_i = 0$  el observador se reduce a un PO para sistemas Takagi-Sugeno.

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (N_i \zeta(t) + F_i y(t)) + Ju(t) + T\Delta$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t)$$

- Para  $L_i = 0, S_i = -CP$  y  $M_i = -CQ + I$  entonces se obtiene el siguiente observador PIO para sistemas Takagi-Sugeno.

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (N_i \zeta(t) + H_i \nu(t) + F_i y(t)) + Ju(t) + T\Delta$$

$$\dot{\nu}(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t)$$

Considere una matriz  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  que define el error transformado  $\varepsilon(t) = \zeta(t) - Tx(t)$ , cuya derivada está dada por

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) [N_i \varepsilon(t) + H_i \nu(t) + (N_i T + F_i C - TA_i) x(t) + (J - TB) u(t)]$$

Usando la definición de  $\varepsilon(t)$  reescribimos (11) y (12)

$$\dot{\nu}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (S_i \varepsilon(t) + (S_i T + M_i C) x(t) + L_i \nu(t)) \quad (13)$$

$$\hat{x}(t) = P\varepsilon(t) + (PT + QC) x(t) \quad (14)$$

Si las siguientes consideraciones son verificadas

- $N_i T + F_i C - TA_i = 0$
- $J = TB$

- $S_i T + M_i C = 0$
- $PT + QC = I_n$

entonces la dinámica del error de estimación puede escribirse a partir de las ecuaciones (13) y (14) como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\nu}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\phi}(t)} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix}}_{A_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}}_{\varphi} \quad (15)$$

de (14) obtenemos

$$\hat{x}(t) - x(t) = e(t) = Pe(t) \quad (16)$$

En este caso si la matriz  $A_i$  es estable  $\forall i \in [1, \dots, m]$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

### 3.1 Parametrización del Observador

Antes de dar la solución al problema de diseño del GDO, se presenta la parametrización de las matrices del observador en base a las soluciones de las consideraciones algebraicas a)-d).

El siguiente lema muestra la forma general de las matrices  $N_i, F_i, S_i, M_i, P$  y  $Q$ .

**Lema 1:** La parametrización de las matrices  $N_i, F_i, S_i, M_i, P$  y  $Q$  es:

$$N_i = N_{1,i} - Z_i N_2 \quad (17)$$

$$F_i = F_{1,i} - Z_i F_2 \quad (18)$$

$$S_i = -U_{1,i} N_2 \quad (19)$$

$$M_i = -U_{1,i} F_2 \quad (20)$$

$$P = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix} - U_2 N_2 \quad (21)$$

$$Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix} - U_2 F_2 \quad (22)$$

donde  $Z_i, U_{1,i}$  y  $U_2$  son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas.

**Prueba.** Considere una matriz arbitraria  $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  de rango de fila completa tal que la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  sea de

rango de columna completa y una matriz  $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ .

Las consideraciones c) y d) pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (23) tenga una solución es:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} = n \quad (24)$$

Desde que el  $\text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$  es  $n$ , existen matrices  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  y  $K \in \mathbb{R}^{q_0 \times p}$  tal que  $T + KC = E$ , que puede ser reescrito como:

$$[T \ K] \Omega = E \quad (25)$$

si el  $rank(\Omega) = rank \begin{bmatrix} \Omega \\ E \end{bmatrix}$ , entonces la solución particular de la ecuación (25) está dada por:

$$T = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$K = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ahora insertando la equivalencia de la matriz  $T$  en la consideración a) se obtiene:

$$N_i E + \tilde{K}_i C = T A_i \quad (28)$$

donde  $\tilde{K}_i = F_i - N_i K$ . La ecuación (28) puede reescribirse como:

$$[N_i \ \tilde{K}_i] \Sigma = T A_i \quad (29)$$

La solución general de la ecuación (29) está dada por:

$$[N_i \ \tilde{K}_i] = T A_i \Sigma^+ - Z_i (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \quad (30)$$

reemplazando la matriz  $T$  de la ecuación (26) en (30) obtenemos:

$$N_i = N_{1,i} - Z_i N_2 \quad (31)$$

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_{1,i} - Z_i \tilde{K}_2 \quad (32)$$

donde  $N_{1,i} = T A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $N_2 = (I_{q0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_{q0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\tilde{K}_{1,i} = T A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K}_2 = (I_{q0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$  y  $Z_i$  son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas.

Como la estructura de las matrices  $N_i$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $\tilde{K}_i$  son conocidas podemos deducir la matriz  $F_i$  como:

$$F_i = F_{1,i} - Z_i F_2 \quad (33)$$

donde  $F_{1,i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix}$  y  $F_2 = (I_{q0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix}$ .

Por otro lado, a partir de la ecuación (25) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q0} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Sigma \quad (34)$$

insertando la ecuación (34) en (23) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{q0} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (35)$$

Dado que la matriz  $\Sigma$  es de rango de columna completa su inversa está dada por  $\begin{bmatrix} I_{q0} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{q0} & K \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$  y la solución general de (35) es:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} U_{1,i} \\ U_2 \end{bmatrix} (I_{q0+p} - \Sigma \Sigma^+) \right) \begin{bmatrix} I_{q0} & K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde  $U_{1,i}$  y  $U_2$  son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas. Entonces las matrices  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$  pueden ser determinadas como:

$$S_i = -U_{1,i} N_2 \quad (37)$$

$$M_i = -U_{1,i} F_2 \quad (38)$$

$$P = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q0} \\ 0 \end{bmatrix} - U_2 N_2 \quad (39)$$

$$Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q0} \\ 0 \end{bmatrix} - U_2 F_2 \quad (40)$$

Ahora, usando (17) y (31) la dinámica del error del observador de la ecuación (15) puede ser reescrita como:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) ((\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(t)) \quad (41)$$

donde  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} N_{1,i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I_{q0} \end{bmatrix}$ , y  $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Z_i & H_i \\ U_{1,i} & L_i \end{bmatrix}$

### 3.2 Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se presenta un método para diseñar el GDO.

El siguiente teorema muestra las condiciones LMI que permiten la obtención de todas las matrices del observador.

**Teorema 1:** Existe una matriz de parámetros  $\mathbb{Y}_i$  tal que el sistema (41) es asintóticamente estable si y solo si,

existe una matriz  $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$  tal que la siguiente LMI es verificada

$$N_2^{T\perp} [N_{1,i}^T X_1 + X_1 N_{1,i}] N_2^{T\perp T} < 0 \quad (42)$$

Entonces, usando el lema de eliminación (Skelton et al., 1998) la matriz  $\mathbb{Y}_i$  es parametrizada como:

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1} \left( -\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \vartheta_i^{1/2} \right)^T \quad (43)$$

donde  $\mathcal{L}$  es cualquier matriz tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  es cualquier escalar tal que:

$$\vartheta_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - \mathcal{Q}_i > 0 \quad (44)$$

con

$$\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} N_{1,i}^T X_1 + X_1 N_{1,i} & N_{1,i}^T X_2 \\ X_2^T N_{1,i} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -N_2^T & 0 \\ 0 & I_{q0} \end{bmatrix}.$$

**Prueba.** Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varphi(t)) = \varphi(t)^T X \varphi(t) > 0 \quad (45)$$

con  $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$ . Su derivada a lo largo de la trayectoria de (41) está dada por:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) \varphi(t)^T [(\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X + (\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)] \varphi(t) < 0 \quad (46)$$

la desigualdad  $\dot{V}(\varphi(t)) < 0$  es válido para todo  $\varphi(t) \neq 0$  si y solo si:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i(z) \left[ (\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X + X (\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \right] < 0 \quad (47)$$

que puede reescribirse como:

$$\sum_{i=1}^m \omega_i(z) \left( \mathcal{B} \mathcal{X}_i + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i)^T + \mathcal{Q}_i \right) < 0 \quad (48)$$

donde  $\mathcal{B} = -\mathbb{A}_2^T$ ,  $\mathcal{Q}_i = \mathbb{A}_i^T X + X \mathbb{A}_i$  y  $\mathcal{X}_i = \mathbb{Y}_i^T X$ .

De acuerdo al lema de eliminación (Skelton et al., 1998)

existe una matriz  $\mathcal{X}_i$  que satisface (48) si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{Q}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (49)$$

con  $\mathcal{B} = [-N_2^{T\perp} \ 0]$  y  $\mathcal{Q}_i \ \forall i \in [1, \dots, m]$  definida en (44). Considerando las matrices  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{Q}_i$  se obtiene la desigualdad (42). Si (49) es verificada, entonces la matriz  $\mathcal{Y}_i$  se obtiene como en (43).

**Observación:** A partir de estos resultados, la determinación de las matrices del GDO puede ser resumida como sigue: Las matrices  $Z_i, H_i, U_{1,i}$  y  $L_i$  son obtenidas de la solución de (43). La matriz  $N_i$  está definida en (31),  $F_i$  puede ser deducida como  $F_i = \tilde{K}_i + N_i K$ , matrices  $S_i$  y  $M_i$  son obtenidas de (37) y (38), respectivamente. La matriz  $J$  está definida en la consideración b). Finalmente, las matrices  $P$  y  $Q$  son obtenidas de (39) y (40) al tomar  $U_2 = 0$  por simplicidad.

#### 4. RESULTADOS

Considerando los parámetros de la Tabla 1 se obtienen las siguientes matrices para el sistema Takagi-Sugeno (7):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0415 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.0006 \\ 0 & 0 & -0.0926 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0083 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.0006 \\ 0 & 0 & -0.0926 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \Delta = \begin{bmatrix} 4.05 \\ -0.0016 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El GDO se obtiene resolviendo las LMIs del Teorema 1, considerando la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{L} = ones_{8,6} \times 0.1$  y  $\sigma = 100$  obteniendo las siguientes matrices para el observador (10)-(12):

$$N_1 = \begin{bmatrix} -51.1702 & 0 & 0 \\ 0 & -51.1849 & 0.0003 \\ 0 & -0.0446 & -0.0926 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 22.9947 & 0 & 0 \\ 0 & 22.9947 & 0 \\ 0 & 0.0147 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -51.1599 & 0 & 0 \\ 0 & -51.1849 & 0.0003 \\ 0 & -0.0446 & -0.0926 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 22.9947 & 0 & 0 \\ 0 & 22.9947 & 0 \\ 0 & 0.0147 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 48.6276 & 2.638 & 2.638 \\ 2.6386 & 48.628 & 2.668 \\ -2.5785 & -2.549 & 26.627 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 48.6256 & 2.636 & 2.636 \\ 2.6386 & 48.628 & 2.668 \\ -2.5785 & -2.549 & 26.627 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -95.3403 & 6.9794 & 6.9794 \\ 6.9783 & -95.3414 & 6.9782 \\ 10.0345 & 10.0343 & -92.2009 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 25.5644 & 0 \\ 0 & 25.5424 \\ 0 & 0.0223 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -95.3397 & 6.98 & 6.98 \\ 6.9783 & -95.3414 & 6.9782 \\ 10.0345 & 10.0343 & -92.2009 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 25.5799 & 0 \\ 0 & 25.5424 \\ 0 & 0.0223 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -11.4974 & 0 \\ 0 & -11.4974 \\ 0 & -0.0074 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -11.4974 & 0 \\ 0 & -11.4974 \\ 0 & -0.0074 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0083 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para evaluar el desempeño del observador en simulación se aplicó la perturbación por ingesta de alimentos presentada en la ecuación (4). Dicha perturbación se añade al sistema (7) de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (A_i x(t)) + Bu(t) + Fw(t) + \Delta$$

donde  $F = [1 \ 0 \ 0]^T$  y  $w(t) = D(t)$ , de acuerdo a la ecuación presentada en (1).

En la Figura 1 se muestra la perturbación  $w(t)$  que está asociada a la ingesta de alimentos en el transcurso del día, en el minuto 420 el paciente comió un durazno, en el minuto 720 una tortilla de papa frita y en el minuto 1140 la persona ingirió 200 gramos de leche desnatada.

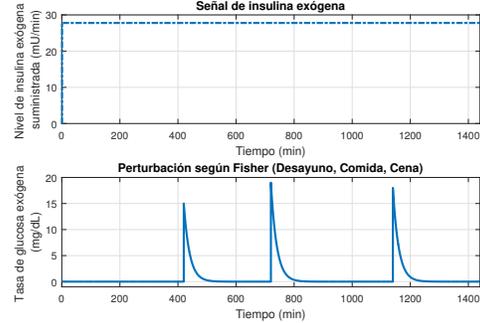


Figura 1. Señal de entrada,  $u(t)$  y perturbación aplicada al sistema,  $w(t)$ .

En la Figura 1 se muestra la señal de infusión de insulina exógena aplicada al sistema, es una señal constante que fue calculada como:  $u(t) = p_4 V_I I_b$  De Gaetano et al. (2003).

Las condiciones iniciales de simulación fueron  $x(0) = [100, 0, 0]^T$  y para el GDO  $\zeta(0) = [120, 0.25, 2]^T$ ,  $\nu(0) = [0, 0, 0]^T$ . En este caso la entrada de insulina exógena fue considerada en un valor constante de  $u(t) = 27.7778 \text{ mU/min}$ , lo que hace alusión a un paciente con suministro de insulina exógena. La estimación de los estados se muestra en las Figuras 2-4, donde puede destacarse que el observador presenta una buena estimación de los estados del sistema. En la Figura 2, se muestra la concentración de glucosa en la sangre  $G(t)$  y su comportamiento ante la perturbación, el estado estimado converge al real siendo sensible a dichas perturbaciones.

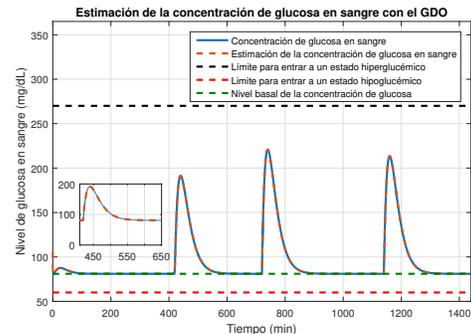


Figura 2. Estimación de la concentración de glucosa en sangre  $G(t)$ .

En la Figura 3 se muestra el efecto de la insulina activa  $X(t)$  y su estimación, el efecto de la insulina activa  $X(t)$  toma valores pequeños, debido a la sensibilidad de la insulina, expresada en una relación  $S_I = \frac{p_3}{p_2}$ , cuando  $p_3$  toma valores grandes el efecto de la insulina incrementa.

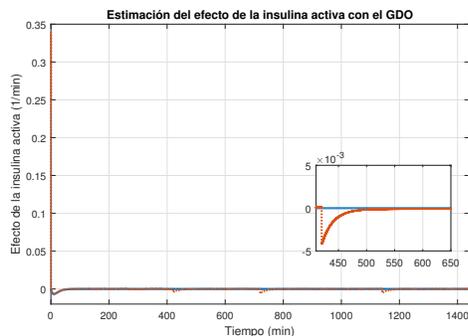


Figura 3. Estimación del efecto de la insulina activa  $X(t)$ .

En la Figura 4 se muestra la concentración de insulina en la sangre  $I(t)$ , es importante recalcar que, en el caso de un paciente con diabetes tipo 1, el páncreas produce muy poca o nada de insulina. En este caso tenemos concentración de insulina debido al suministro de insulina desde una fuente exógena.

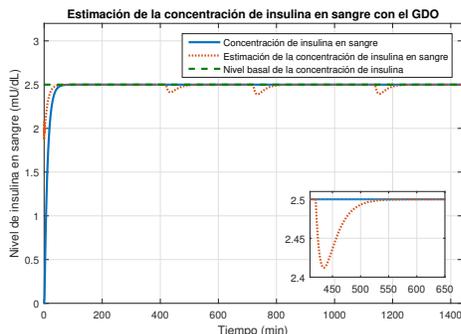


Figura 4. Estimación de concentración de insulina en sangre  $I(t)$ .

En estos resultados de simulación hemos probado el desempeño del GDO para reconstruir las señales no medidas en el sistema Glucosa-insulina para un paciente con diabetes tipo 1. Es importante hacer notar que en este caso la cantidad de insulina exógena  $u(t)$  fue suministrada de forma arbitraria.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se diseñó un observador para la estimación de los estados de un sistema Glucosa-insulina. El sistema Glucosa-insulina se representó mediante un modelo Takagi-Sugeno cuya función de pertenencia depende del efecto de la insulina activa  $X(t)$ . Se demostró mediante simulación la convergencia de los estados estimados con los estados del sistema Glucosa-insulina, ante perturbaciones debidas a la ingesta de alimentos. Como trabajos futuros se desarrollará una ley de control utilizando los estados estimados para controlar la cantidad de insulina exógena  $u(t)$  evitando así un suministro arbitrario y no apropiado a lo requerido dependiendo de la cantidad de carbohidratos ingeridos.

Los autores agradecen al CENIDET y al Tecnológico Nacional de México (TecNM) por el apoyo para la realización de la presente investigación en el marco del proyecto 6376.18-P. Miguel Agustín Flores Martínez agradece al CONACYT por el financiamiento económico para el desarrollo de sus estudios de posgrado.

## REFERENCIAS

- Ackerman, E., Rosevear, J.W., and McGuckin, W.F. (1964). A mathematical model of the glucose tolerance test. *Physics in Medicine and Biology*, 9(2), 203–213.
- Bergman, R.N., Phillips, L.S., and Cobelli, C. (1981). Physiologic evaluation of factors controlling glucose tolerance in man: measurement of insulin sensitivity and beta-cell glucose sensitivity from the response to intravenous glucose. *The Journal of clinical investigation*, 68(6), 1456–1467.
- De Gaetano, A., Di Martino, D., Germani, A., and Manes, C. (2003). Mathematical models and state observation of the glucose-insulin homeostasis. In *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, 281–294. Springer.
- Fisher, M.E. (1991). A semiclosed-loop algorithm for the control of blood glucose levels in diabetics. *IEEE transactions on biomedical engineering*, 38(1), 57–61.
- Gaetano, A.D. and Arino, O. (2000). Mathematical modeling of the intravenous glucose tolerance test. *Journal of mathematical biology*, (40), 136–168.
- Lendek, Z., Guerra, T.M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer.
- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H.O. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 333–341.
- Osorio-Gordillo, G.L., Darouach, M., Astorga-Zaragoza, C.M., and Boutat-Baddas, L. (2016). New dynamical observers design for linear descriptor systems. *IET Control Theory & Applications*, 10(17), 2223–2232.
- Salzsieder, E., Albrecht, G., Fischer, U., and Freyse, E.J. (1985). Kinetic modeling of glucoregulatory system to improve insulin therapy. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 32(10), 846–855.
- Skelton, R., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K. (1998). A unified algebraic approach to linear control design, 1998.
- Sorensen, J.T. (1985). *A physiologic model of glucose metabolism in man and its use to design and assess improved insulin therapies for diabetes*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, (1), 116–132.
- INEGI (2014). Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Información, Principales causas de mortalidad por residencia habitual, grupos de edad y sexo del fallecido.