

Control distribuido asíncrono de múltiples robots tipo péndulo invertido vía una estrategia basada en eventos

O. D. Ramírez-Cárdenas* J.F. Guerrero-Castellanos**
J. Linares-Flores* S. Durand***

* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, (e-mail: oscar6ri@hotmail.com, jlinares@mixteco.utm.mx).*

** *Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México (e-mail: fermi.guerrero@correo.buap.mx)*

*** *ICube, INSA Strasbourg, Univ. Strasbourg, CNRS (UMR 7357), Strasbourg, France (e-mail: sylvain@durandchamontin.fr)*

Resumen

Este artículo presenta la síntesis de una estrategia de control distribuido que resuelve el problema de consenso líder-seguidor para una red de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). Para ello, se presenta el modelo matemático no lineal de los RMPI que incluye la dinámica de los actuadores, así como el modelo alrededor de un punto de funcionamiento. De ahí, mediante un adecuado cambio de coordenadas basado en planitud diferencial se parametriza el sistema en función de la salida plana. Entonces, asumiendo que la red de vehículos se forma mediante un grafo no dirigido y fuertemente conectado, se diseña una ley de control distribuido y se desarrolla un algoritmo disparado por eventos, donde la función de evento indica el instante en el que el vehículo i debe transmitir su información (estado) a sus vecinos. El análisis de estabilidad del sistema completo es llevado a cabo en el sentido ISS (Input-to-State Stability). Los resultados en simulación numérica muestran las ventajas en términos de intercambio de información entre RMPI, así como el buen desempeño en la estabilización de la postura de cada RMPI y del consenso del sistema multi-RMPI.

Keywords: Robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI), consenso, sistema multi-agente, control disparado por eventos, Control por planitud diferencial.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el control descentralizado para sistemas multi-vehículos también llamados sistemas multi-agentes, ha emergido como un nuevo reto para los investigadores en el área de control y robótica. Esto ha originado el interés de investigadores en un ámbito multidisciplinario que incluye la física, la biofísica, la neurología, la biología de sistemas, la matemática aplicada, la mecánica, la informática y la teoría del control. Las aplicaciones de los sistemas multi-agentes (SMA) son diversas, tales como el control cooperativo de vehículos aéreos no tripulados, el control de la formación de robots móviles, el control de las redes de comunicación, el diseño de redes de sensores, agrupamiento de insectos, entre otros (Xie and Wang (2005)). Para realizar las diferentes aplicaciones cooperativas es necesario utilizar técnicas de control que involucren el intercambio de información entre los agentes. Por lo anterior, el control cooperativo de un SMA debe permitir que los agentes interactúen en el uso racional de los recursos y la coordinación adecuada de su propio comportamiento. Recientemente,

se han reportado diversos trabajos sobre los problemas de formación cooperativa (Kuriki and Namerikawa (2013); Dong et al. (2015)). Sin embargo, existen pocos trabajos reportados donde se apliquen estas metodologías en sistemas multivariables y de naturaleza inestable, como vehículos de dos ruedas y de auto-balanceo o ruedas giratorias (Tsai et al. (2017)).

El control de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) ha sido estudiado por diversos investigadores (ver Tsai et al. (2017); Grasser et al. (2002); Tsai et al. (2010)). Sin embargo el enfoque propuesto por Grasser et al. (2002) y Tsai et al. (2010) no se han aplicado al enfoque de control cooperativo para la formación de multi-RMPI. Esto debido a la dificultad que existe en controlar tanto el desplazamiento de cada uno de los robots, como el de la correcta postura de cada uno de ellos. Uno de los trabajos donde se ha comenzado a resolver el problema de consenso, donde se emplean sistemas RMPI es en Tsai et al. (2017), en este trabajo se realiza un control cooperativo tipo líder seguidor virtual para la formación de dos robots móviles de dos ruedas y un RMPI mediante un control backstepping y un control por modos deslizantes. Si bien es cierto que la metodología propuesta realiza la formación de los robots,

solo se preocupa por la postura de uno de ellos.

Por otro lado, algunos trabajos han abordado el manejo adecuado de los recursos de computo y comunicación, mediante leyes de control basadas en eventos también llamadas disparados por eventos o muestreo de Lesbesgue. Con dicho paradigma la señal de control se actualiza sólo cuando es absolutamente necesario, es decir, cuando la dinámica del sistema cambia, *i.e* cuando ocurre algún evento. El desarrollo de estrategias de control basadas en eventos tiene su origen en los trabajos presentados por Åström and Bernhardsson (2002) y Årzén (1999), donde ellos desarrollan el primer controlador PID disparado por eventos. Donde este control se basa en un algoritmo desencadenante que toma la forma de una función de evento $e : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que indica si se necesita ($e \leq 0$) o no ($e > 0$) para actualizar el valor de control. \mathcal{X} en general representa el espacio de estado. Con enfoques más sofisticados, la función e toma el estado actual x como la entrada y una memoria, m de x , como el estado anterior e , el cual se vuelve negativo como puede verse en Marchand et al. (2013); Guerrero-Castellanos et al. (2014).

El objetivo principal del trabajo es realizar un control de auto-balanceo y formación de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) en el plano x , utilizando la propiedad de planitud diferencial del sistema en combinación con una función de evento y un algoritmo de consenso. La función de evento diseñada está en función de la dinámica de los agentes y decide cuando el agente transmite su información a los vecinos con los que existe comunicación, mientras que el algoritmo de consenso se encarga del consentimiento de todos los robots para llevar acabo su formación pre-especificada.

El resto del artículo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 presenta los preliminares matemáticos involucrados en el desarrollo del trabajo. En la sección 3 se realiza el planteamiento del problema y se desarrolla la estrategia de control cooperativo distribuido basado en eventos para un sistema Multi-vehículos con N -RMPI. La sección 4 se dedicada a la simulación numérica y se analizan los resultados para mostrar la efectividad de la estrategia de control propuesta. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se establecen en la sección 5.

2. PRELIMINARES

2.1 Teoría de grafos

La interacción de un sistema multiagente puede ser representada mediante grafos. La teoría de grafos es un recurso que permite definir la topología de comunicación entre los agentes y desde el punto de vista de control, permite establecer propiedades de estabilidad. Considere que $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ consiste en un conjunto de vértices (o nodos) $\mathcal{V} = 1, \dots, N$ y enlaces \mathcal{E} . Si hay un enlace (i, j) entre los nodos i y j , entonces i y j se llaman adyacentes, es decir, $\mathcal{E} = (i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : i, j \text{ adyacente}$. La matriz de adyacencia A esta definida por $a_{ij} = 1$ si i y j son adyacentes, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Un camino desde i hasta j es una secuencia de diferentes nodos, iniciando desde i y terminando con j , de modo que cada par de nodos consecutivos es adyacente. Si hay un camino de i a j , entonces i y j son llamados conectados. Si todos los pares de nodos en \mathcal{G} son conectados, entonces \mathcal{G} es

llamado conectado. La distancia $d(i, j)$ entre dos nodos es el número de enlaces de la ruta más corta desde i hasta j . El diámetro d de \mathcal{G} es la máxima distancia $d(i, j)$ sobre todos los pares de nodos. La matriz de grados D de \mathcal{G} es la matriz diagonal con elementos d_i igual a la cardinalidad del conjunto vecino del nodo i , $N_i = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$. La matriz laplaciana \mathcal{L} de \mathcal{G} se define como $\mathcal{L} = D - A$. Para grafos conectados, \mathcal{L} tiene exactamente un sólo valor propio igual a cero y dichos valores propios pueden ser listados en orden decreciente, $0 = \lambda_1(\mathcal{G}) < \lambda_2(\mathcal{G}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{G})$. $\bar{\mathcal{G}}$ representa el grafo que contiene al grafo \mathcal{G} y al líder.

2.2 Comunicación entre agentes basada en eventos

Un grafo teniendo como nodos sistemas dinámicos es denotado por (\mathcal{G}, x) , siendo \mathcal{G} el grafo que contiene N nodos y $x = (x_1^T \dots x_N^T)^T$ un vector de estado global, donde los estados de cada nodo evolucionan de acuerdo a la dinámica

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i) \quad (1)$$

donde $x_i \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ y $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$. La transmisión de información entre agentes basada en eventos relaciona dos funciones principales (Sánchez-Santana et al., 2017).

- Una función de evento: $e_i : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ que indica si es necesario que el agente i transmita ($e_i > 0$) o no ($e_i \leq 0$) su estado al agente j , con $j \in N_i$. La función de evento toma como entrada el valor actual del estado del agente i , x_i y una memoria m_i de x_i la última vez que e_i fue positivo.
- Control distribuido estático $u_i(x_i, m_i, m_j)$. El término estático significa que los estados son medidos y no son estimados por algún otro sistema dinámico, por ejemplo un observador. Que el control dependa de las memorias de los estados x_i y x_j con $j \in N_i$, significa que el control del agente i depende del estado transmitido por el propio agente la última vez que ocurrió un evento y el estado proveniente del agente j , así como del estado actual del agente i , *i.e.* x_i . El término distribuido se debe a que el control del agente i solo depende del conjunto N_i el cual es un subconjunto del conjunto total de nodos, *i.e.* $N_i \subset \mathcal{V}$.

Definición 2.1. Consenso práctico líder-seguidor: El consenso práctico líder seguidor de un sistema se lleva a cabo si, para cada uno de los agentes $i \in \{1, \dots, N\}$, existe una retroalimentación de estado local u_i tal que el sistema en lazo cerrado permanezca dentro de una vecindad teniendo como centro el punto punto x_0 y de radio Δ , es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = \Delta, \quad i = 1, \dots, N$$

para cualquier condición inicial $x_i(0)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

2.3 Modelo y descripción del sistema

Considere un RMPI, el cual se compone de dos motores de corriente continua (CC) acoplados a neumáticos. Con variables de estado la posición lineal (x_1), velocidad lineal (x_2), posición angular del péndulo (x_3) y velocidad angular del péndulo (x_4), se define el vector de estado $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ con entrada de control u y considerando que el RMPI operará cerca de la posición angular de equilibrio

$x_3 = \theta \approx 0$ y con velocidad angular cercana a cero, *i.e.* $x_4 = \dot{\theta} \approx 0$, el sistema puede escribirse en la forma de un sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}^4, u \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{M} = (m_w + m_r)R^2 + I_w \quad \bar{I} = I_r + m_r L^2$$

$$a_1 = \frac{-(\bar{I}\beta + (\bar{I} + m_r RL)T_s)}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \quad a_2 = \frac{-(m_r L)^2 Rg}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2}$$

$$a_3 = \frac{(\gamma m_r LR + (\bar{I} + m_r RL)T_s)}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2}$$

$$a_4 = \frac{\beta m_r RL + (\bar{M} + m_r RL)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \quad a_5 = \frac{\bar{M}m_r Lg}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2}$$

$$a_6 = \frac{(\gamma \bar{M} + (\bar{M} + m_r RL)T_s)}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2}$$

$$b_1 = \frac{(\bar{I} + m_r RL)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \quad b_2 = \frac{-(\bar{M} + m_r RL)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2}$$

donde

- m_w := masa de la rueda
- m_r := masa del vástago
- I_w := inercia de la rueda
- I_r := inercia del vástago
- τ := par o torque generado por los motores
- R := radio de la rueda
- L := longitud entre el eje de las ruedas
- g := gravedad ($9,81m/s^2$)
- β y γ := coeficientes de fricción de la rueda y del vástago, respectivamente.

2.4 Modelo del RMPI representado mediante la salida plana

Considere el sistema lineal mostrado en (2). Sea el par (A, B) controlable, *i.e.*, la matriz de controlabilidad de Kalman

$$\mathcal{K} = (B \ AB \ A^2B \ A^3B)$$

es de rango completo. La salida plana $y \in \mathbb{R}$ esta dada por las variables obtenidas de la multiplicación del último renglón de la inversa de la matriz de controlabilidad \mathcal{K} por el vector de estado (ver Hebertt Sira-Ramírez (2017)):

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathcal{K}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

de ahí que

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$$

Debido al poco espacio, los cálculos no son presentados aquí, sin embargo se pueden obtener siguiendo los procedimientos mostrados en Hebertt Sira-Ramírez (2017) y Müllhaupt (2009).

Sea $y = z_1$, $\dot{y} = z_2$, $\ddot{y} = z_3$, $\dddot{y} = z_4$ y considerando $\bar{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, el sistema puede ser parametrizado a partir de la salida plana mediante la siguiente cadena de integradores

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = \bar{u}$$

de tal manera que el sistema general queda representado como

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\bar{u} \quad (3)$$

$$z \in \mathbb{R}^4, \bar{u} \in \mathbb{R}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

con

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. CONTROL MULTI-AGENTE

En esta sección se presenta el algoritmo de control propuesto para el consenso de múltiples sistemas RMPI, con el cual se controla tanto la postura del péndulo como el desplazamiento en el eje x de cada agente bajo un esquema líder-seguidor virtual. Sin embargo, el RMPI líder es considerado como un comando que genera las señales de referencias deseadas, el cual es un sistema autónomo y no es afectado por ningún RMPI seguidor. Se presenta también, la función de evento que determina el instante en el que el i -ésimo RMPI debe transmitir su estado al j -ésimo RMPI con $j \in N_i$.

3.1 Control de múltiples RMPI

Considere un sistema multi-agente con esquema líder seguidor y con una topología de grafo conectado. Donde el la dinámica de cada agente esta parametrizada mediante la salida plana $y_i = z_i$. La dinámica del líder se considera como un sistema exógeno con de la forma

$$\dot{z}_0 = \bar{A}z_0 \quad (4)$$

y los RMPI seguidores tienen una dinámica de la forma

$$\dot{z}_i = \bar{A}z_i + \bar{B}\bar{u}_i \quad (5)$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Considere el grupo de N -vehículos RMPI y un líder virtual representados por (4) y (5) los cuales interactúan bajo el grafo conectado y dirigido $\bar{\mathcal{G}}$. Si existe comunicación entre el RMPI i y el líder, entonces existe un peso $g_i > 0$, $g_i = 0$ en caso contrario. Entonces la función de control distribuido estático $u_i(x_i, m_i, m_j)$ está definida por

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right] \quad (6)$$

con $K = \rho \bar{B}^T P$. Siendo P la solución de la ecuación de Riccati

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - 2\rho P \bar{B} \bar{B}^T P = -Q$$

Además la función de evento esta dada por:

$$e_i(x_i, m_i) = e_{i_1} \cap e_{i_2} \cap e_{i_3} \cap e_{i_4} \quad (7)$$

donde $e_{i_s} = |\bar{e}_{i_s}| - \delta$ con $\bar{e}_{i_s} = m_{i_s} - z_{i_s}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ es el umbral para la activación de la función de evento, con $i \in \mathcal{V}$ y $s \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces el vector z_i tiende a una vecindad del punto z_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t) - z_0(t)\| = \Delta$$

Dicha vecindad tiene radio igual a $\Delta = \frac{2\sqrt{N}\delta\|\tilde{B}\|\alpha}{\lambda_1^{\tilde{A}}}$. Con $\lambda_1^{\tilde{A}} = \lambda_{\min}(\tilde{A})$ siendo $\tilde{A} = I_N \otimes \tilde{A} - \tilde{B}$, $\alpha = \|R\| \|R^T\|$, con R una matriz que diagonaliza a la matriz \tilde{A} y $\tilde{B} = -H \otimes \tilde{B}K$, donde $H = \mathcal{L} + G$, con $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$.

Prueba 3.1. Sea el control de consenso de múltiples RMPI determinado por las memorias m_i del estado z_i la ultima vez que ocurrió un evento de la forma

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right]$$

y si ahora definimos el error de la memoria con respecto al estado $\bar{e}_i = m_i - z_i$ y el error del estado con respecto a la referencia z_0 como $\varepsilon_i = z_i - z_0$, el control puede escribirse en términos de ε_i

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + g_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - g_i \bar{e}_i \right]$$

recuerde que el objetivo es $\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\|z_i - z_0\|}_{\varepsilon_i} = 0$ o al menos

a una vecindad del origen, entonces la dinámica del error es:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \dot{z}_i - \dot{z}_0 = \tilde{A}z_i + \tilde{B}\bar{u}_i - \tilde{A}z_0 = \tilde{A}(z_i - z_0) + \tilde{B}\bar{u}_i \\ \dot{\bar{e}}_i &= \tilde{A}\bar{e}_i + \tilde{B}\bar{u}_i \end{aligned}$$

Por lo que la dinámica del error en lazo cerrado se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \tilde{A}\varepsilon_i + \tilde{B} \left(K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + K g_i \varepsilon_i \right. \\ &\quad \left. + K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - K g_i \bar{e}_i \right) \\ &= \tilde{A}\varepsilon_i + \tilde{B}K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + \tilde{B}K g_i \varepsilon_i + \tilde{B}K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) \\ &\quad - \tilde{B}K g_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

haciendo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$, $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$, $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N)$ podemos escribir el sistema multi-agente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (I_N \otimes \tilde{A})\varepsilon - (I_N \otimes \tilde{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \tilde{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \tilde{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ &\quad - (I_N \otimes \tilde{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ \dot{\bar{e}} &= [I_N \otimes \tilde{A} - (\mathcal{L} + G) \otimes \tilde{B}K]\varepsilon + [-(\mathcal{L} + G) \otimes \tilde{B}K]\bar{e} \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon} = \underbrace{\left[(I_N \otimes \tilde{A}) - H \otimes \tilde{B}K \right]}_{\tilde{A}} \varepsilon + \underbrace{\left[-H \otimes \tilde{B}K \right]}_{\tilde{B}} \bar{e} \quad (8)$$

Observación 1: La matriz $H = \mathcal{L} + G$ corresponde al grafo $\bar{\mathcal{G}}$ y tiene las siguientes propiedades (ver Lewis et al. (2013)):

- H contiene valores propios positivos
- H es definida positiva

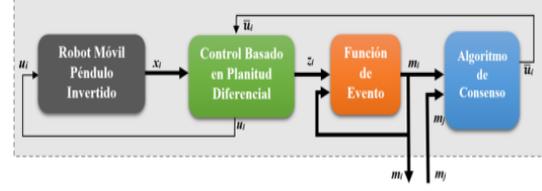


Figura 1. Diagrama general de cada agente

Observación 2: En este trabajo se asume que el grafo $\bar{\mathcal{G}}$ fuertemente conectado, es decir, existe un camino entre cada par de vértices.

Asumamos primero que $\bar{e} = 0$ y probemos primeramente que el sistema $\dot{\varepsilon} = \tilde{A}\varepsilon$ es asintóticamente estable. Para esto se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T (I_N \otimes P)\varepsilon$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= \varepsilon^T [(I_N \otimes \tilde{A}^T) - (H \otimes K^T \tilde{B}^T) (I_N \otimes P)] \varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^T [(I_N \otimes P) (I_N \otimes \tilde{A} - H \otimes \tilde{B}K)] \varepsilon \\ &= \varepsilon^T [I_N \otimes (P\tilde{A} + \tilde{A}^T P) - H \otimes (2P\tilde{B}\tilde{B}^T P)] \varepsilon \end{aligned}$$

puesto que H es simétrica, existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $THT^T = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son los valores propios de H los cuales por la observación 1 son positivos.

Sea $\tilde{\varepsilon} = (T \otimes I_N)\varepsilon$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\varepsilon}^T [(I_N \otimes (P\tilde{A} + \tilde{A}^T P)) - \Lambda \otimes (2P\tilde{B}\tilde{B}^T P)] \tilde{\varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T [P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - \lambda_i (2P\tilde{B}\tilde{B}^T P)] \tilde{\varepsilon}_i \\ \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \left[\underbrace{P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - \rho (2P\tilde{B}\tilde{B}^T P)}_{-Q} \right] \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T Q \tilde{\varepsilon}_i \leq - \sum_{i=1}^N \underbrace{\varepsilon_i^T (I_N \otimes T^T) Q (T \otimes I_N) \varepsilon_i}_{\bar{Q}} \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^T \bar{Q} \varepsilon_i < 0 \quad \forall \quad \varepsilon_i \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies \tilde{A}$ es Hurwitz y $\varepsilon_i \rightarrow 0$ cuando $\bar{e} = 0$ y $t \rightarrow \infty$.

Ahora consideremos el caso general donde $\bar{e} \neq 0$ y vamos a asumir que el valor propio más pequeño de \tilde{A} es $\lambda_1^{\tilde{A}}$, entonces

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{A}\varepsilon + \tilde{B}\bar{e}$$

la solución de esta ecuación es

$$\varepsilon(t) = e^{\tilde{A}t} \varepsilon(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B}\bar{e}(\tau) d\tau$$

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|e^{\tilde{A}t} \varepsilon(0)\| + \int_0^t \|e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B}\bar{e}(\tau)\| d\tau$$

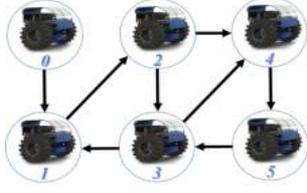


Figura 2. Grafo dirigido

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}(t-\tau)} \|\tilde{B}\tilde{e}(\tau)\| d\tau$$

$$\alpha = \|R\| \|R^T\|$$

note que $\|\tilde{B}\tilde{e}\| \leq \|\tilde{B}\| \|\tilde{e}\|$, puesto que la condición de evento fuerza a

$$\|\tilde{e}\| = \sqrt{4\delta^2 + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^2} = 2\delta\sqrt{N}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}(t-\tau)} 2\delta\sqrt{N} \|\tilde{B}\| d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\varepsilon(0)\| + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\tilde{B}\| \delta\sqrt{N} \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} \tau} d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\varepsilon(0)\| \\ &\quad + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t} \|\tilde{B}\| \delta\sqrt{N} \left(\frac{1}{\lambda_1^{\tilde{A}}} - \frac{e^{-\lambda_1^{\tilde{A}} t}}{\lambda_1^{\tilde{A}}} \right) \end{aligned}$$

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \frac{2\alpha\delta\sqrt{N} \|\tilde{B}\|}{\lambda_1^{\tilde{A}}}$$

esto finaliza la prueba.

3.2 Implementación de la estrategia de control

La estrategia de control fue implementada siguiendo el diagrama a bloques de la Fig. 1. Dicho diagrama muestra el esquema general del control propuesto para cada agente i . El primer bloque (gris) representa el modelo dinámico del robot móvil i , con la entrada de control u_i y el estado del sistema representado por $x_i = (x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ x_{4i})^T$. Estas variables de estado x_i son transformadas al marco de referencia plano $z_i = (z_{1i} \ z_{2i} \ z_{3i} \ z_{4i})^T$ mediante el segundo bloque (verde). Este bloque recibe la señal de control \tilde{u}_i determinado por el algoritmo de consenso y envía la señal correspondiente de control u_i al robot para regular la postura y desplazamiento, dada por

$$u_i = \frac{1}{C_i A_i^3 B_i} (\tilde{u}_i - C_i A_i^4 x_i) \quad (9)$$

El tercer bloque (naranja) es la función de evento que determina cuando el estado z_i debe actualizarse a m_i y éste se retroalimenta y se envía también al algoritmo de consenso (bloque azul). Este último bloque contiene el control de consenso del robot i (\tilde{u}_i) calculado, determinado por los agentes j con los que existe comunicación.

4. RESULTADOS

En los robots se realizaron simulaciones de 5 robots móviles fueron probados mediante el algoritmo de control distribuido y disparado por eventos. El objetivo del control cooperativo

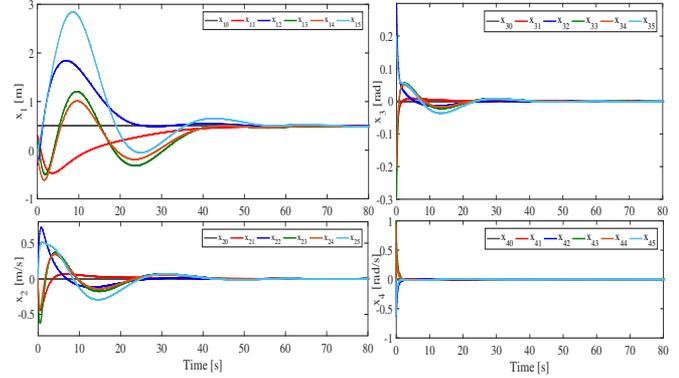


Figura 3. Respuesta de los estados de los 5 agentes

Parámetro	Descripción	Valor
m_r	Masa del móvil	3.05 Kg
m_w	Masa de las ruedas (x2)	0.04 Kg
I_w	M. de inercia ruedas (x2)	0.0009356 Kg m^2
I_r	M. de inercia móvil	0.021 Kg m^2
K_e	Constante de F.C.E	0.3093
K_m	Constante de torque	0.3093
R_m	Resistencia de armadura	5.15 Ω
g	Gravedad	9.8 $\frac{m}{s^2}$
R	Radio de la rueda	0.06 m
d	Dis. entre ruedas	0.2 m
L	Dis. ruedas y CM móvil	0.15 m

Tabla 1. Parámetros del vehículo

es verificar que los robots móviles se muevan a la referencia deseada, de manera que se controle el desplazamiento de cada agente y a su vez se controle la postura de los mismos. La intercomunicación entre los agentes del sistema multi-robot se muestra en la Fig. 2, la cual consiste en un grafo fuertemente conectado dirigido y donde sólo el RMPI₁ puede obtener información del nodo líder. Se asume que no existe un retardo en la comunicación entre los agentes y las condiciones iniciales se establecen como: $x_{0_{init}} = (0,5 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $x_{1_{init}} = (0,3 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$, $x_{2_{init}} = (-0,3 \ 0 \ 0,3 \ 0)^T$, $x_{3_{init}} = (0,2 \ 0 \ -0,3 \ 0)^T$, $x_{4_{init}} = (0,2 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$, $x_{5_{init}} = (0 \ 0 \ 0,2 \ 0)^T$ y $K = \{1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5\}$. Se usan los parámetros mostrados en la tabla 1. El nodo cero es denotado como el líder y es considerado como un exosistema que genera la trayectoria deseada.

La Fig. 3 muestra los cuatro estados de cada uno de los agentes. Se observa que el estado x_{1i} , corresponde a la respuesta de posición en el eje x de cada uno de los robots, la cual alcanza la posición de referencia deseada. Del mismo modo, el estado x_{3i} , corresponde a la respuesta de posición de la postura de cada uno de los péndulos, llega de forma colaborativa a la referencia deseada, es decir, a una postura erguida. La Fig. 4 muestra la señal de control calculada por el algoritmo propuesto para cada uno de los robots. Se puede observar en esta figura que el control aplicado para cada robot es suave y depende de los estados de cada uno de los agentes con los que existe comunicación. En la parte inferior de la Fig. 4 se encuentran el conteo de eventos de cada uno de los móviles. Dicho conteo determina las ocasiones en la que la función de eventos se activa, es decir, cuando existe envío de información entre los agentes. Se observa que existe un gran ahorro computacional en comparación con un esquema tradicional de transmisión continua en el tiempo. La Fig. 5 muestra los

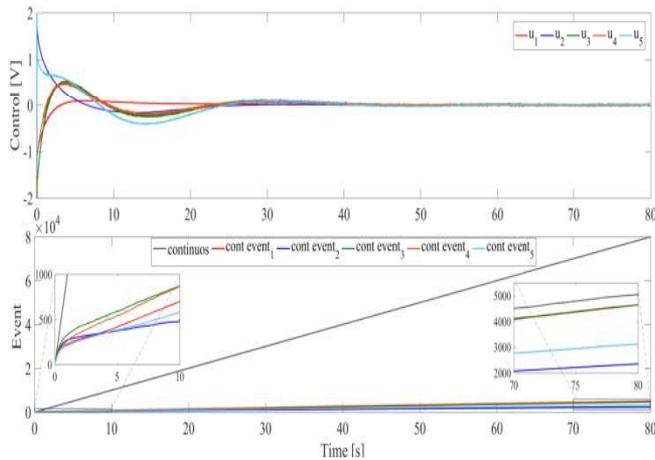


Figura 4. Respuesta de las señales de control de los cinco agentes

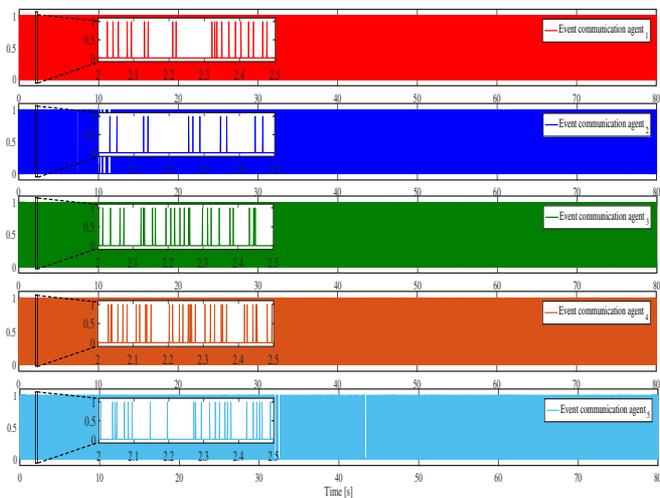


Figura 5. Eventos realizados por los 5 agentes

eventos realizados por cada uno de los agentes. También se puede ver que existen momentos en los que cada agente no envía información a sus vecinos con los que existe comunicación, lo que permite un ahorro energético desde el punto de vista computacional. Se observa que los eventos son efectuados cuando se cumple la función de evento mostrada en la sección anterior, por lo que no son generados de manera constante. Esta figura muestra que el consenso de múltiples RMPI se realiza, aún cuando los agentes no envían información en todo momento. Cabe señalar que la simulación se realizó con un tiempo de muestreo de 1 ms.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo, un algoritmo de control colaborativo aplicado al problema de interacción entre varios robots tipo péndulo invertido es propuesto. Se verificó mediante resultados de simulación el desempeño del controlador para un grupo de 5 RMPI. Se muestra que con un control distribuido que incluye una función de evento se reduce de forma considerable el tráfico de información en una red de comunicación, sin perder el objetivo principal de control, además del desempeño del sistema en lazo cerrado. Como

trabajo futuro se abordará la experimentación en tiempo real y se extenderá el control de posición al plano.

REFERENCIAS

- Årzén, K.E. (1999). A simple event-based PID controller. In *Preprints 14th World Congress of IFAC*. Beijing, P.R. China.
- Åström, K.J. and Bernhardsson, B. (2002). Comparison of riemann and lebesgue sampling for first order stochastic systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*, volume 2, 2011–2016. IEEE.
- Dong, X., Yu, B., Shi, Z., and Zhong, Y. (2015). Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1), 340–348.
- Grasser, F., D’Arrigo, A., Colombi, S., and Rufer, A.C. (2002). Joe: a mobile, inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(1), 107–114. doi:10.1109/41.982254.
- Guerrero-Castellanos, J., Téllez-Guzmán, J., Durand, S., Marchand, N., Alvarez-Muñoz, J., and Gonzalez-Diaz, V.R. (2014). Attitude stabilization of a quadrotor by means of event-triggered nonlinear control. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 73(1-4), 123–135.
- Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, M.R.N.E.W.Z.B. (2017). *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems*. Butterworth-Heinemann.
- Kuriki, Y. and Namerikawa, T. (2013). Formation control of uavs with a fourth-order flight dynamics. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 6706–6711.
- Lewis, F.L., Zhang, H., Hengster-Movric, K., and Das, A. (2013). *Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches*. Springer Science & Business Media.
- Marchand, N., Durand, S., and Guerrero-Castellanos, J.F. (2013). A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(5), 1332–1337.
- Müllhaupt, P. (2009). *Introduction à l’analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques.
- Sánchez-Santana, J., Guerrero-Castellanos, J., Villarreal-Cervantes, M., and Ramírez-Martínez, S. (2017). Control distribuido y disparado por eventos para la formación de robots móviles tipo (3, 0). *Congreso Nacional de Control Automático 2018*.
- Tsai, C.C., Huang, H.C., and Lin, S.C. (2010). Adaptive neural network control of a self-balancing two-wheeled scooter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(4), 1420–1428. doi:10.1109/TIE.2009.2039452.
- Tsai, C.C., Li, Y.X., and Tai, F.C. (2017). Backstepping sliding-mode leader-follower consensus formation control of uncertain networked heterogeneous nonholonomic wheeled mobile multirobots. In *2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*.
- Xie, G. and Wang, L. (2005). Consensus control for a class of networks of dynamic agents: fixed topology. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC 05. 44th IEEE Conference on*, 96–101. IEEE.