

## Estimación experimental de la rugosidad y del factor de fricción en una tubería <sup>★</sup>

I. Santos-Ruiz <sup>\*</sup> J. R. Bermúdez <sup>\*</sup> F. R. López-Estrada <sup>\*,1</sup>  
V. Puig <sup>\*\*</sup> L. Torres <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, TURIX Dynamics - Grupo de diagnóstico y control de sistemas dinámicos. Carretera Panamericana km 1080 SN, 29050 - Tuxtla Gutiérrez, México. Tel. (52) 96150461, Fax: (52) 9616151687.*

<sup>\*\*</sup> *Department of Automatic Control (ESAI), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Rambla de Sant Nebridi 10, 08222 - Terrassa, España.*

<sup>\*\*\*</sup> *Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería. Cátedras CONACYT.*

---

**Resumen:** El presente trabajo tiene dos propósitos. (1) Presentar la evaluación numérica y experimental de algunos métodos propuestos para estimar el factor de fricción en régimen turbulento, entre ellos una solución explícita obtenida mediante la función  $W_0$  de Lambert. (2) Proponer un método para estimar el coeficiente de rugosidad, parámetro requerido para el cálculo del factor de fricción, mediante técnicas de optimización no lineal. La evaluación numérica se ejecutó para un intervalo de operación amplio, pero la evaluación experimental se particularizó a las condiciones específicas de la tubería de laboratorio en donde se realizaron las pruebas. Los cálculos y el análisis de los resultados se ejecutaron en MATLAB.

**Keywords:** Tuberías, flujo turbulento, factor de fricción, coeficiente de rugosidad, estimación de parámetros, mínimos cuadrados.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Dado que las tuberías son el principal medio para transportar fluidos, su adecuada gestión involucra tareas de diagnóstico, control y optimización (ver Verde y Torres (2017); Puig et al. (2017)). Muchas de estas tareas se basan en algoritmos diseñados a partir de las leyes físicas que rigen el comportamiento del flujo a lo largo de las tuberías. Estos algoritmos han demostrado funcionar bastante bien; sin embargo, tienen una gran desventaja: necesitan ser actualizados frecuentemente para evitar ser inválidos debido a las consecuencias del paso del tiempo. En particular, en las tuberías que han estado en servicio durante un tiempo considerable, hay dos parámetros físicos que cambian notoriamente: la rugosidad y el diámetro. Ambos parámetros varían debido a la corrosión interna, al desgaste de las paredes internas o a la acumulación de partículas minerales. La variación de ambos parámetros afecta la disipación de energía en una tubería (Torres y Verde (2018)).

En las tuberías, la disipación de energía causada por la fricción se denomina pérdida de carga y se puede dividir en: “pérdidas mayores”, asociadas con la pérdida de ener-

gía por la rugosidad y la viscosidad, y “pérdidas menores”, asociadas con codos, bridas o válvulas que cambian la dirección del gasto provocando disipación de energía. La ecuación más común para el cálculo de las pérdidas mayores es la ecuación de Darcy-Weisbach (DW) (Chaudhry, 2014). Algunas otras fórmulas empíricas también utilizadas son las ecuaciones de Hazen-Williams (HW) y de Manning, que son leyes potenciales, y la ecuación de Prony, que es una aproximación cuadrática.

La ecuación de HW se usa ampliamente porque tiene la ventaja de que no es una función del número de Reynolds, es decir, no depende de la temperatura y la viscosidad. La ecuación, sin embargo, tiene la desventaja de que solo es válida para el agua y su rango de aplicabilidad es limitado (Liou, 1998).

La ecuación de DW es más precisa con respecto a las ecuaciones de HW y de Manning, ya que es dimensionalmente homogénea y aplicable al agua, así como a otros fluidos (Liou, 1998). Se expresa en términos del diámetro y el factor de fricción, el cual a su vez es función de la rugosidad y la viscosidad cinemática.

La forma con mayor consenso para calcular el factor de fricción es mediante el uso de la ecuación de Colebrook-White (CW), que lamentablemente es una fórmula implícita que exige el uso de métodos iterativos para su solución. Hay muchas aproximaciones explícitas para la

<sup>\*</sup> Agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su financiamiento mediante el proyecto 3595 de Atención a Problemas Nacionales.

<sup>1</sup> Autor de correspondencia: frlopez@ittg.edu.mx.

ecuación de CW, que pueden calcular el factor de fricción con alta precisión, como la ecuación propuesta por Swamee y Jain (1976). Sin embargo, al igual que la ecuación de CW, tal aproximación requiere los valores actuales de la rugosidad y del diámetro a lo largo de la tubería. El problema es que dichos parámetros no pueden estimarse fácilmente, por lo que es necesario desarrollar metodologías para estimar tanto la fricción como la rugosidad.

El primer objetivo del presente artículo es presentar los resultados de evaluaciones numéricas y experimentales de varios métodos propuestos para calcular el factor de fricción requerido por la ecuación de DW. La evaluación numérica se realiza calculando el error porcentual entre los resultados de los métodos evaluados con respecto a los resultados proporcionados por la ecuación de CW que en este trabajo se utiliza como el patrón de referencia. La evaluación experimental se lleva a cabo calculando la fricción con los diferentes métodos estudiados y utilizando la rugosidad estimada para una tubería de laboratorio. El error porcentual para cada método se calcula a partir de los resultados que arroja cada uno y de la fricción experimental obtenida, la cual se calcula a partir de mediciones de presión en los extremos de la tubería y el flujo en cualquier punto.

El segundo objetivo de este trabajo es presentar una metodología para estimar la rugosidad promedio en una tubería resolviendo un problema de optimización no lineal por mínimos cuadrados. Esta rugosidad estimada es utilizada para calcular la fricción mediante los diferentes métodos que son evaluados en este artículo.

La principal motivación para sistematizar el procedimiento de cálculo de la fricción es que actualmente en el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez (ITTG) se trabaja en el análisis y diseño de algoritmos para diagnóstico de fugas en tuberías presurizadas, los cuales dependen de estimaciones precisas de la fricción. Considerando que en flujo turbulento el factor de fricción es bastante sensible a la incertidumbre en la rugosidad de la tubería, una parte del trabajo presentado se refiere a la estimación del coeficiente de rugosidad.

En la Sección 2 se presenta el fundamento teórico de la pérdida de carga, incluyendo la presentación de la ecuación de DW y de la ecuación de CW. En la Sección 3, se presentan algunos enfoques conocidos para calcular el factor de fricción. En la Sección 4, se propone un método para estimar la rugosidad en un ducto utilizando optimización no lineal. En la Sección 5, se presenta la evaluación numérica y la evaluación experimental de los métodos para calcular la fricción presentados en la sección previa. En la Sección 5, también se presenta el resultado de la estimación de la rugosidad para una tubería de laboratorio utilizando el método propuesto. Finalmente, en la Sección 6, se presentan algunas conclusiones, así como la dirección que tomará la investigación que motivó la presentación de este artículo.

## 2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Las pérdidas mayores debidas a la viscosidad del fluido y la rugosidad de la tubería,  $h_f$ , se pueden calcular con la ecuación de DW, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = f \frac{8L Q^2}{g\pi^2 D^5}, \quad (1)$$

donde  $V$  es la velocidad del fluido,  $Q$  es el caudal,  $f$  es el factor de fricción, también conocido como factor cuasi-estático de fricción,  $D$  es el diámetro y  $L$  es la longitud de la tubería.

Cuando se dispone de sensores de presión en los extremos de la tubería, se puede calcular la pérdida de carga de la siguiente manera  $h_f = H_{in} - H_{out}$ , donde  $H_{in}$  denota la medición del cabezal de presión aguas arriba mientras que  $H_{out}$  representará el cabezal de presión aguas abajo. Si además, se mide el caudal  $Q$ , se puede calcular el factor de fricción despejando  $f$  de (1). El único requisito para calcular la fricción de esta manera es que el gasto y las presiones hayan alcanzado un estado estacionario, ya que en estado transitorio son otras leyes las que rigen la disipación de energía.

El diagrama de Moody (Moody, 1944; White, 2011) permite estimar gráficamente el factor de fricción en términos del número de Reynolds y de la rugosidad de la tubería; sin embargo, esto resulta poco práctico cuando los cálculos deben automatizarse en un algoritmo. Una forma de estimar numéricamente  $f$ , sin depender de la inspección visual del diagrama de Moody, es mediante la solución de la ecuación de Colebrook-White (Colebrook, 1939; White, 2011):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right), \quad (2)$$

donde  $\varepsilon = k_s/D$  es la rugosidad relativa (adimensional), que relaciona la rugosidad absoluta  $k_s$  con el diámetro interno de la tubería.

Un inconveniente al utilizar (2) para calcular  $f$ , es que su dependencia de  $\text{Re}$  y  $\varepsilon$  es implícita y no lineal, por lo que su solución requiere de métodos numéricos iterativos (Newton-Raphson, bisección, u otros similares), lo que dificulta la implementación de algoritmos en tiempo real debido a que las iteraciones requieren un esfuerzo computacional considerable. Una forma de superar esta dificultad es mediante aproximaciones explícitas para  $f$  obtenidas a partir de (2); entre las más utilizadas se encuentran las de Swamee y Jain (1976), Haaland (1983) y Serghides (1984). En la siguiente sección de describen tales aproximaciones mientras que en la Sección 5 se presenta una evaluación de cada una de estas aproximaciones considerando los tiempos necesarios para su cálculo y su error respecto al valor exacto determinado por la fórmula implícita (2).

Recientemente, se han encontrado soluciones analíticas de ecuaciones no lineales similares a (2) en términos de la función  $W$  de Lambert (Clamond, 2009; Brkić, 2012). Partiendo de este antecedente, en la siguiente sección

se presenta una formulación que mediante dicha función determina explícitamente el valor de  $f$ .

### 3. CÁLCULO DEL FACTOR DE FRICCIÓN

A continuación se describen diferentes ecuaciones para estimar el factor de fricción en régimen turbulento, a partir del número de Reynolds y de la rugosidad de la tubería, que se asumen conocidos.

#### 3.1 Solución iterativa de la ecuación de Colebrook-White

La forma inmediata de abordar el cálculo de  $f$  a partir de la ecuación de Colebrook-White es utilizando un método numérico iterativo. Para ello, se reescribe la ecuación no lineal (2) en la forma

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) = 0, \quad (3)$$

de modo que el problema se reduce a encontrar los ceros de  $\phi(f)$  o los mínimos de  $\phi^2(f)$ .

Debido a la no linealidad de (3), los procedimientos iterativos pueden converger hacia falsas “soluciones” cuando se utilizan métodos abiertos (por ejemplo, el de Newton-Raphson) si no se escoge adecuadamente la aproximación inicial. Por ello, resulta más conveniente utilizar métodos cerrados que acoten la solución dentro de un intervalo proporcionado por el usuario, como lo hacen los métodos de bisección y de interpolación lineal.

#### 3.2 Aproximaciones explícitas de $f$

Se han desarrollado fórmulas que permiten hallar un valor aproximado para  $f$  en la ecuación (2) de manera directa, sin iteraciones. La aproximación (4) de Swamee y Jain (1976) y la aproximación (5) de Haaland (1983) se encuentran entre las más referenciadas:

$$f \approx 0.25 / \left( \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right)^2, \quad (4)$$

$$f \approx 1 / \left( -1.8 \log_{10} \left( \left( \frac{\varepsilon}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right) \right)^2. \quad (5)$$

Las aproximaciones “de un paso” (4) y (5) resultan útiles por sí mismas, debido a que su error de aproximación típico es menor a 1%, lo cual resulta suficiente para algunas aplicaciones; sin embargo, cuando se requiere una mayor exactitud, la estimación de  $f$  dada por (4) o (5) puede ser usada como aproximación inicial en una resolución iterativa de la ecuación de Colebrook-White para acelerar la convergencia.

Existe una aproximación iterativa de  $f$  que se obtiene aplicando el método de Steffensen (Jain, 2007) a la ecuación de Colebrook-White; de esta manera, la fórmula de Serghides (1984) logra estimar  $f$  con mayor exactitud que (4) y (5) a partir de tres aproximaciones auxiliares:

$$\begin{aligned} A &= -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{12}{\text{Re}} \right), \\ B &= -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51A}{\text{Re}} \right), \\ C &= -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{2.51B}{\text{Re}} \right), \\ f &\approx 1 / \left( A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Una diferencia de (6) respecto de los métodos iterativos tradicionales es que el número de pasos intermedios es fijo (tres), por lo que su costo computacional no es tan alto. De hecho, como se mostrará en la Sección 5, el tiempo necesario para evaluar (6) es comparable al que se requiere para calcular las aproximaciones (4) y (5), debido a que —a diferencia de éstas— en su cálculo no intervienen potencias fraccionarias.

#### 3.3 Cálculo de $f$ con la función $W$ de Lambert

La función  $W$  de Lambert (Corless et al., 1996) se define por

$$z = W(z) e^{W(z)}, \quad (7)$$

para todo número complejo  $z$ .  $W(z)$  es una función no inyectiva (multivaluada, excepto en  $z = 0$ ) usada frecuentemente en la solución de ecuaciones que contienen exponenciales o logaritmos, como es el caso de la ecuación de Colebrook-White. Cuando se consideran sólo números reales, con las restricciones  $\{z \geq -1/e, W(z) \geq -1\}$  se obtiene la función univaluada  $W_0(z)$  que se denomina “rama principal” de  $W(z)$ .

Clamond (2009) y Brkić (2012) han reportado usos de  $W_0(z)$  en la solución de problemas hidráulicos que involucran el cálculo del factor de fricción. Mediante artificios algebraicos de cambios de variable en (2), con la función  $W_0$  se obtiene una solución cerrada  $f = F(\varepsilon, \text{Re})$  para el factor de fricción, tal que:

$$f = \frac{1}{((2/\ln(10)) W_0((\ln(10)/2a) 10^{b/2a}) - b/a)^2}, \quad (8)$$

donde  $a = 2.51/\text{Re}$  y  $b = \varepsilon/3.7$ .

Aunque (8) proporciona una forma directa de obtener el valor exacto de  $f$ , su uso en las aplicaciones de diagnóstico y control requiere que el lenguaje de programación utilizado disponga de subrutinas nativas para evaluar numéricamente la función  $W_0$  de Lambert. En las versiones recientes de MATLAB, Maple y C++ se pueden ejecutar este tipo de cálculos directamente<sup>2</sup>.

## 4. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD

En la sección precedente se ha supuesto que el cálculo de  $f$  se hace a partir de valores de  $\text{Re}$  y  $\varepsilon$  conocidos. Sin embargo, aunque el número  $\text{Re}$  se determina de una forma

<sup>2</sup> Para evaluar la función  $W$  de Lambert, algunos compiladores de C++ pueden requerir la instalación de la *GNU Scientific Library*.

relativamente simple en términos del caudal que se mide continuamente, la determinación de la rugosidad  $\varepsilon$  no es tan directa. Dado que  $\varepsilon$  indica que tan ásperas o lisas son las paredes internas de la tubería, lo cual depende de los materiales y técnicas empleados para fabricarla, no es necesario que su cálculo se realice en forma continua, por lo que este parámetro sólo se determina una vez, cuando la tubería se instala. Aunque, con el uso, las paredes de la tubería pueden erosionarse o recubrirse con partículas transportadas por el flujo, de modo que es conveniente una “recalibración” periódica de  $\varepsilon$ . A continuación se describe el procedimiento empleado para estimar el coeficiente de rugosidad relativa  $\varepsilon$ .

Inicialmente, se obtiene un conjunto de mediciones de presión y caudal,  $(H_{in}, H_{out}, Q)$ , para diferentes puntos de operación en estado estacionario. En la tubería experimental, el punto de operación se cambia por medio de un variador de frecuencia que regula la potencia de la bomba centrífuga que impulsa el flujo por la tubería. Luego, para cada punto de operación, se determina la pérdida de carga  $h_f = \Delta H = H_{in} - H_{out}$  que junto con el caudal  $Q$  se sustituyen en la ecuación de Darcy-Weisbach (1) para calcular el factor de fricción  $f$ . También se calcula  $Re$  para cada punto de operación mediante

$$Re = \frac{DQ}{A\nu}, \quad (9)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática [ $m^2/s$ ] del fluido.

Con los valores de  $f$  y  $Re$  obtenidos de las mediciones en  $N$  puntos de operación diferentes, se construye el arreglo de datos mostrado en la Tabla 1. Finalmente, el conjunto de datos  $(Re_k, f_k)$  se ajusta a la fórmula explícita  $f = F(\varepsilon, Re)$  establecida en (8) resolviendo el siguiente problema de optimización no lineal por mínimos cuadrados:

$$\min_{\varepsilon} \sum_{k=1}^N (F(\varepsilon, Re_k) - f_k)^2. \quad (10)$$

Tabla 1. Datos requeridos para estimar  $\varepsilon$ .

$Re_k$	$f_k$
$Re_1$	$f_1$
$Re_2$	$f_2$
$\vdots$	$\vdots$
$Re_N$	$f_N$

Se pueden utilizar métodos de región de confianza (Coleman y Li, 1996) o de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963; Moré, 1978) para resolver el problema (10). Aunque teóricamente es posible usar un único par  $(Re, f)$  para estimar  $\varepsilon$  con la ecuación de Colebrook-White, en la práctica esto resulta en estimaciones de  $f$  sesgadas, debido al ruido de medición y a la “sensibilidad” de (2) por su no linealidad.

## 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presenta una evaluación numérica y experimental de los métodos para calcular la fricción

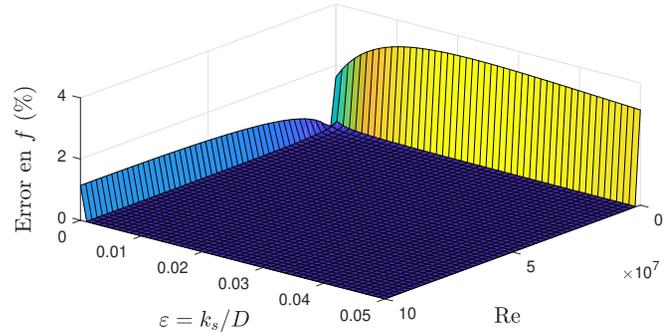


Figura 1. Error en la aproximación de Swamee-Jain.

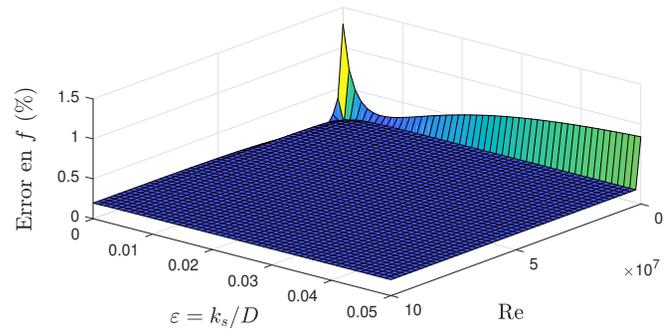


Figura 2. Error en la aproximación de Haaland.

descritos en la Sección 3. También se presenta la estimación de la rugosidad para una tubería de laboratorio. Tal estimación se utiliza para la evaluación experimental de los métodos descritos en la Sección 3.

### 5.1 Evaluación numérica

Para determinar la exactitud de las aproximaciones explícitas (4), (5) y (6), se evaluaron éstas sobre una malla regular de  $1000 \times 1000$  puntos en la región definida por  $4 \times 10^3 \leq Re \leq 1 \times 10^8$ ,  $1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 5 \times 10^{-2}$ . Los resultados se contrastaron con los valores exactos de  $f$  obtenidos resolviendo iterativamente la ecuación de Colebrook-White; el error porcentual de las diferentes aproximaciones se muestra gráficamente en las figuras 1, 2 y 3. En general, las aproximaciones explícitas de  $f$  que se evaluaron muestran una tendencia al error para coeficientes de rugosidad pequeños o para números de Reynolds cercanos al flujo laminar. De las tres aproximaciones, la de Serghides presentó un error porcentual mucho menor que las otras, con tres órdenes de magnitud de diferencia.

Un resumen más detallado de los resultados se presenta en la Tabla 2, donde además del error de aproximación por cada método se muestra el tiempo necesario para completar un millón de evaluaciones de  $f$  sobre la malla descrita en el párrafo precedente. Los tiempos de cálculo efectivos se midieron utilizando la herramienta *profiler* de MATLAB. La solución iterativa de la ecuación de Colebrook-White se obtuvo con una combinación de los métodos de bisección e interpolación lineal.

Los resultados en las figuras 1, 2 y 3, así como en la Tabla 2, evidencian que el método de Serghides presenta

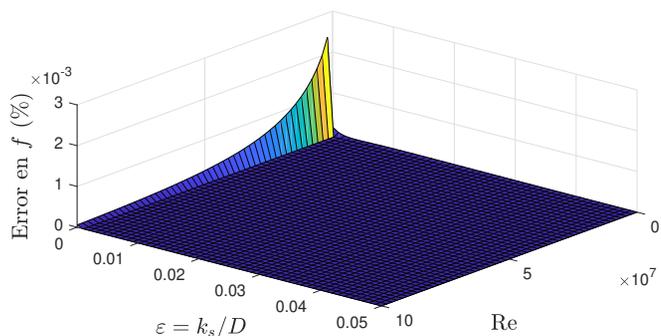


Figura 3. Error en la aproximación de Serghides.

Tabla 2. Resumen del desempeño de los diferentes métodos para estimar la fricción.

Método	Error promedio (%)	Error máximo (%)	Tiempo (s)
Iterativo	0	0	41.4026
Swamee-Jain	0.0148	3.3583	0.1002
Haaland	0.1997	1.4203	0.1067
Serghides	$5.26 \times 10^{-7}$	$3.09 \times 10^{-3}$	0.0905
W de Lambert	0 <sup>(*)</sup>	0 <sup>(*)</sup>	0.0759

(\*) Problemas de convergencia en algunas regiones, usando MATLAB.

el mejor desempeño global, pues su tiempo de cálculo es equiparable al de los métodos de Swamee-Jain y Haaland, pero con un error de aproximación mucho menor. Por otro lado, la ecuación (8) basada en la función  $W_0$  de Lambert produjo resultados tan exactos como la solución iterativa, pero al ejecutarla en MATLAB presentó algunos problemas de convergencia para flujos altamente turbulentos ( $Re > 5 \times 10^7$ ) al usar coeficientes de rugosidad grandes. Aunque esta condición ( $Re$  grande,  $\varepsilon$  grande) rara vez se presenta en la práctica, es importante considerar esa deficiencia cuando se utilice dicho software. Los mismos cálculos se efectuaron en Maple sin problemas, de modo que el error se atribuye a la implementación que hace MATLAB, más que a la estructura matemática de (8).

## 5.2 Evaluación experimental

Aunque la evaluación del desempeño de los diferentes métodos para estimar  $f$  inicialmente abarcó una región de operación amplia (Figuras 1–3, Tabla 2), finalmente se acotó a las condiciones de operación de la tubería experimental del ITTG. Para ello, se determinó el coeficiente de rugosidad relativa según el procedimiento descrito en la Sección 4 a partir de las mediciones en cuatro puntos de operación diferentes obtenidos con una bomba centrífuga de 5 hp trabajando a las frecuencias de 25 Hz, 35 Hz, 45 Hz y 55 Hz. En la Tabla 3 se presentan los datos obtenidos de los sensores de presión y caudal, así como los valores derivados de ellos que se usaron para la estimación de  $\varepsilon$  por mínimos cuadrados. Otros parámetros de la tubería experimental usados en los cálculos son  $L = 64.48$  m,  $D = 0.0486$  m,  $\nu = 8.03 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s y  $g = 9.79$  m/s<sup>2</sup>.

La solución del problema de optimización (10) mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt, con los datos de la Tabla 3, produjo el coeficiente de rugosidad relativa  $\varepsilon = 4.81 \times 10^{-4}$  para la tubería experimental. En la

Tabla 3. Datos usados para estimar la rugosidad relativa en la tubería experimental.

$H_{in}$ [m]	$H_{out}$ [m]	$Q$ [m <sup>3</sup> /s]	Re	$f$
2.1826	1.2299	0.0014567	47525	0.022786
3.7503	1.5707	0.0022904	74725	0.021086
5.7087	1.9998	0.0030494	99490	0.020241
8.0448	2.5267	0.0037705	123013	0.019698

Figura 4 se contrasta la solución de la ecuación de Colebrook-White para el valor estimado de  $\varepsilon$  con los valores experimentales de  $f$  obtenidos directamente de la ecuación de Darcy-Weisbach; las gráficas abarcan sólo el intervalo  $45000 \leq Re \leq 125000$  que corresponde a la región de operación en la tubería. El error cuadrático medio en la estimación de  $f$  para los cuatro puntos de operación utilizados resultó de  $|f_{est} - f_{exp}|_{RMS} = 4.5 \times 10^{-5}$ . En la Figura 4 también se incluye la curva de  $f$  para la estimación de  $\varepsilon$  calculada a partir de un único punto de operación; en este caso, el error cuadrático medio aumentó hasta  $|f_{est} - f_{exp}|_{RMS} = 1.1 \times 10^{-4}$  (casi tres veces mayor), por lo que se evidencia la necesidad de estimar  $\varepsilon$  considerando varios puntos de operación de la tubería, para evitar estimaciones sesgadas.

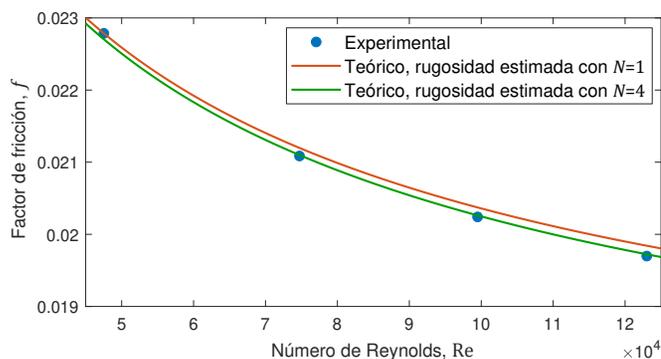


Figura 4. Estimación de  $f$  con el valor de  $\varepsilon$  calculado por mínimos cuadrados.

En la Figura 5 se muestran las diferentes estimaciones de  $f$  que incorporan el valor calculado de  $\varepsilon$  para la región de operación de la tubería, y también se comparan contra el valor experimental de  $f$  obtenido directamente de la ecuación de Darcy-Weisbach. Las gráficas confirman localmente el comportamiento global descrito al inicio de esta sección, que la aproximación de Serghides coincide casi puntualmente con la solución exacta de la ecuación de Colebrook-White y con los valores experimentales de  $f$ , por lo que supera a las aproximaciones de Swamee-Jain y de Haaland que se utilizan frecuentemente en los algoritmos de monitoreo de tuberías y diagnóstico de fugas. De hecho, dentro de la región de operación de la tubería experimental, la exactitud en la aproximación de Serghides es comparable a la que se obtiene con la función  $W_0$  de Lambert. Esta última sería preferible sobre cualquier otra, excepto por los problemas de convergencia que presenta y porque, al tratarse de una función “no elemental”, podría no estar disponible en algunos lenguajes de programación.

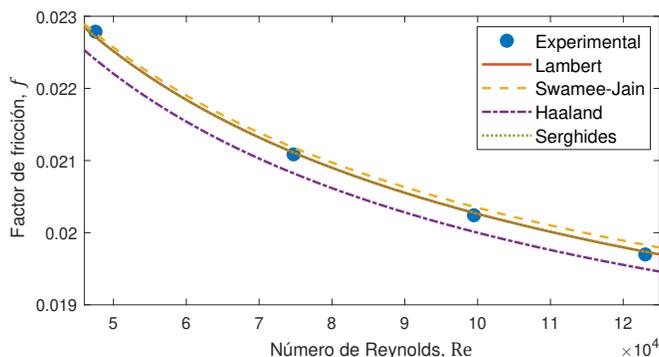


Figura 5. Diferentes estimaciones de  $f$  en las condiciones de operación de la tubería experimental.

## 6. CONCLUSIONES

Se abordó el problema de la determinación del factor de fricción  $f$  para flujo turbulento considerando tres enfoques: la solución iterativa de la ecuación de Colebrook-White, la utilización de aproximaciones explícitas de  $f$  (Swamee-Jain, Haaland y Serghides), y el cálculo exacto de  $f$  mediante la función  $W_0$  de Lambert. En el análisis, esta última resultó la mejor opción, debido a que requiere el menor tiempo de procesamiento y a que se trata de una solución exacta de la ecuación de Colebrook-White. Sin embargo, si se considera el cálculo de  $f$  con un lenguaje de programación donde no exista una subrutina para evaluar  $W_0$  —por ejemplo, en algunos sistemas embebidos—, la aproximación de Serghides resulta también una buena opción.

En el análisis de la dependencia de  $f$  del coeficiente de rugosidad  $\varepsilon$  en la tubería experimental, se encontró que el valor real de éste puede diferir considerablemente del reportado por el fabricante (cuando existe, en el mejor de los casos) o del que se asume según las tablas o manuales de hidráulica; por ello, el coeficiente de rugosidad debe ser estimado experimentalmente. El procedimiento que se propuso para ajustar  $\varepsilon$  en la tubería experimental dio buenos resultados, considerando que el valor de  $f$  derivado de él coincide con el obtenido a partir de las mediciones usando la ecuación de Darcy-Weisbach. Sin embargo, dado que la rugosidad de la tubería puede variar con el tiempo, se recomienda la aplicación periódica de este procedimiento como una medida de recalibración.

Como trabajo futuro se ha considerado hacer un análisis del efecto que tienen las distintas aproximaciones del factor de fricción en los algoritmos para diagnóstico de fugas, considerando su influencia en la exactitud al estimar el caudal y la posición de las fugas (análisis de propagación de los errores), así como sus exigencias en términos del tiempo total de procesamiento para implementar en tiempo real los algoritmos de diagnóstico.

## REFERENCIAS

Brkić, D. (2012). Lambert W function in hydraulic problems. *Mathematica Balkanica*, 26(3), 285–292.  
 Chaudhry, M.H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer-Verlag New York, 3ª edición.

Clamond, D. (2009). Efficient resolution of the Colebrook equation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48(7), 3665–3671.  
 Colebrook, C.F. (1939). Turbulent Flow in Pipes, with particular reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11(4), 133–156. doi:10.1680/ijoti.1939.13150. URL <https://doi.org/10.1680/ijoti.1939.13150>.  
 Coleman, T.F. y Li, Y. (1996). An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on optimization*, 6(2), 418–445.  
 Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E., Jeffrey, D.J., y Knuth, D.E. (1996). On the Lambert W function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1), 329–359.  
 Haaland, S.E. (1983). Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *Journal of Fluids Engineering*, 105(1), 89–90.  
 Jain, P. (2007). Steffensen type methods for solving non-linear equations. *Applied Mathematics and computation*, 194(2), 527–533.  
 Liou, C.P. (1998). Limitations and Proper Use of the Hazen-Williams Equation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(9), 951–954. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:9(951).  
 Marquardt, D.W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431–441.  
 Moody, L.F. (1944). Friction factors for pipe flow. *Transactions of ASME*, 66, 671–684.  
 Moré, J.J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory. En *Numerical analysis*, 105–116. Springer.  
 Puig, V., Ocampo-Martinez, C., Pérez, R., Cembrano, G., Quevedo, J., y Escobet, T. (2017). *Real-time Monitoring and Operational Control of Drinking-Water Systems*. Springer.  
 Serghides, T.K. (1984). Estimate friction factor accurately. *Chemical Engineering*, 91(5), 63–64.  
 Swamee, P.K. y Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(5), 657–664.  
 Torres, L. y Verde, C. (2018). Nonlinear estimation of a power law for the friction in a pipeline. En *Second Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, MICNON 2018*. IFAC.  
 Verde, C. y Torres, L. (eds.) (2017). *Modeling and Monitoring of Pipelines and Networks: Advanced Tools for Automatic Monitoring and Supervision of Pipelines*, volumen 7 de *Applied Condition Monitoring*. Springer International Publishing.  
 White, F.M. (2011). *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, 3ª edición.