

# Fast Extremum Seeking para un biorreactor tipo CSTR

Ulises Ramírez-Carmona\* Jaime A. Moreno\*  
 Alejandro Vargas\*\*

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Coyoacán, D.F., 04510, México.

(e-mail: URamirezC@iingen.unam.mx, JMorenoP@ii.unam.mx)

\*\* Unidad Académica Juriquilla, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Blvd. Juriquilla 3001, 76230, Querétaro, Qro., México.  
 (e-mail: AVargasC@ii.unam.mx)

Resumen: Una técnica novedosa *extremum-seeking* para maximizar la producción de biogás en un reactor de segundo orden es propuesta. La estrategia es una ley de control conmutada, con sólo dos valores de entrada, la cual conduce a las trayectorias del sistema al punto de operación óptimo, empleando únicamente la información de la salida (la producción de biogás). Para sintonizar la ley de control no es necesario el conocimiento de la tasa de reacción ni de los parámetros del sistema. En contraste con las estrategias *extremum-seeking* clásicas, la estrategia de control propuesta no asume un comportamiento cuasi-estacionario de la planta, y por lo tanto es capaz de alcanzar el punto de operación óptimo rápidamente.

*Keywords:* Biotecnología, control conmutado, extremum seeking.

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se diseña una estrategia de control para maximizar la producción de biogás del modelo de un biorreactor de segundo orden considerando incertidumbre paramétrica y en el modelo. La estrategia propuesta garantiza una convergencia más rápida que la proporcionada por las técnicas *extremum-seeking* (ES) tradicionales. Se considera un modelo (típico) simplificado para un biorreactor (Andrews, 1968), (Antonelli y Astolfi, 2000), el cual tiene dos estados: una concentración de biomasa  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y otra de sustrato  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , el cual es descrito por las ecuaciones de balance de masa (modelo no lineal)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-u + \mu(s))x, \\ \dot{s} &= -d\mu(s)x + u(s_{in} - s), \\ Q &= q\mu(s)x, \end{aligned} \quad (1)$$

donde:  $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es la tasa de dilución (entrada),  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una función continua que representa la tasa de reacción (se asume que  $\mu(0) = 0$ ),  $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es el coeficiente de producción (constante),  $s_{in}$  es la concentración de sustrato (se asume que es constante) en el flujo de entrada al biorreactor,  $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es un factor de conversión constante y  $Q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es la tasa de flujo de gas producido en el biorreactor.

Dos tasas de reacción típicas están dadas por:

- Modelo Monod: es una función monótonamente creciente dada por la expresión

$$\mu(s) = \frac{\mu_0 s}{K_s + s}. \quad (2)$$

- Modelo Haldane: corresponde a un sustrato inhibitorio que usualmente es descrito por la expresión

$$\mu(s) = \frac{\mu_0 s}{K_s + s + \frac{s^2}{K_I}}. \quad (3)$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que  $s_{in} > s_c$  para eliminar el caso monótono, donde  $s_c$  es el valor donde ocurre el máximo (punto crítico):  $s_c = \sqrt{K_s K_I}$  y  $\mu(s_c) < \mu_0$ .

La operación del biorreactor con valores constantes de  $u$  es muy común, y distintos puntos de operación son obtenidos para valores diferentes de  $u$  (constante). Puesto que la producción de biogás es de interés, se desea operar el biorreactor en el punto de operación con el cual se maximiza  $Q$ , es decir, donde la producción de biogás es máxima entre todos los puntos de operación posibles.

La optimización de este sistema ha sido estudiada ampliamente. Hay muchas formas de alcanzar el objetivo, tales como regular el punto de operación óptimo o técnicas ES. Por ejemplo, una estrategia (natural) para alcanzar el objetivo es calcular el valor de (por ejemplo)  $x$  en el punto de operación en el cual se maximiza  $Q$  ( $Q_{\max}$ ) y regularla en dicho valor. Por ejemplo, Schaum et al. (2012) diseñaron un control saturado por realimentación de salida para regular el punto de operación óptimo considerando tasa de reacción Haldane. Sin embargo, se requiere la medición de  $x$  y del conocimiento de sus parámetros de una manera precisa.

Una forma de evitar ese problema es utilizar algún tipo de ES. Wang et al. (1999) requieren del conocimiento de la forma particular de la tasa de reacción, es decir, si es Monod o Haldane. Su desventaja principal ocurre en el caso de Haldane porque es requerido un controlador adicional para estabilizar el punto de operación. La técnica ES sólo requiere la medición de la salida, pero tiene la desventaja

de que el objetivo se alcanza lentamente, puesto que se necesita operar la planta en estados cuasi-estacionarios.

Otro ejemplo es el adoptado por el controlador ES propuesto por Marcos et al. (2004), quienes utilizaron un algoritmo adaptable para estimar los parámetros del sistema, pero posee la desventaja de que sólo funciona para tasa tipo Haldane. Adicionalmente, se asume que  $s$  y  $Q$  son medidas, lo cual es una condición más restrictiva que en el caso de la implementación tradicional de ES.

Utilizando un enfoque de redes neuronales, Wang et al. (1999) diseñaron un controlador ES que funciona para tasas de reacción continuas y acotadas, es decir, que no sólo aplica para las tasas Monod y Haldane. No obstante, se supone que ambos estados ( $x$  y  $s$ ) están disponibles para ser medidos.

En el caso de Dieulot (2012), propone un controlador por realimentación de salida, el cual es independiente de la tasa de reacción, pero con Haldane tiene algunos problemas evitando el lavado del reactor. Asume que  $x$  y  $P = ux$  se miden.

El objetivo de este trabajo es proponer un controlador diferente para lidiar con los problemas mencionados, el cual podría llamarse estrategia *fast extremum seeking* (FES), puesto que es capaz de alcanzar el objetivo más rápido que con ES tradicional, es decir, con un tiempo de asentamiento en lazo cerrado similar al de un control a lazo abierto (cuando la entrada constante  $u^*$  que maximiza la producción de biogás es aplicada directamente).

La idea básica consiste en conmutar entre dos valores constantes de entrada ( $u_L$  y  $u_H$ ) cada que  $Q$  alcanza un máximo transitorio, y esto (sorprendentemente) conduce a alcanzar y mantener el punto de operación óptimo (estacionario)  $Q_{\max}$ . El controlador tiene asociadas dos curvas de conmutación, y también se forma un conjunto de deslizamiento atípico, ya que es una variedad de la misma dimensión del espacio de estados (y no, como tradicionalmente, de menor dimensión). El controlador conmuta a frecuencia alta en esa variedad.

## 2. PUNTO DE OPERACIÓN ÓPTIMO

El CSTR (Reactor Continuo Tanque Agitado, por sus siglas en inglés) se ha estudiado extensamente, por ejemplo Andrews (1968), Antonelli y Astolfi (2000), Lara-Cisneros et al. (2012) y Schaum et al. (2012) presentaron sus propiedades principales. Sin embargo, para los propósitos del presente escrito, es necesario recordar algunas de ellas haciendo los cálculos básicos.

### 2.1 Puntos de operación

Para calcular el equilibrio de (1), se deben resolver las siguientes ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} 0 &= (-\bar{u} + \mu(\bar{s}))\bar{x}, \\ 0 &= -d\mu(\bar{s})\bar{x} + \bar{u}(s_{in} - \bar{s}), \\ \bar{Q} &= q\mu(\bar{s})\bar{x}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\bar{z}$  indica el valor estacionario de la variable correspondiente. Se sigue que hay diferentes puntos de operación, dependiendo del valor de la entrada  $\bar{u}$ . Sin embargo, independientemente de  $u$ , el punto conocido como lavado

del reactor siempre existe ( $\bar{x} = 0$  y  $\bar{s} = s_{in}$ ), es decir, no hay biomasa en el bioreactor y por lo tanto  $\bar{Q} = 0$ ; por ello corresponde a un modo de operación indeseable.

1. Si  $\bar{u} = 0$ , entonces el conjunto de puntos de operación está dado por  $\bar{s} = 0$  y cualquier valor positivo de  $\bar{x}$ . Debido a que no hay producción de biogás en ese estado estacionario, corresponde a un modo de operación indeseable. Otra posibilidad es el lavado. Sin embargo, éste no puede ser alcanzado con entrada nula a menos que sea la condición inicial.
2. Además del lavado, los otros puntos de operación satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \mu(\bar{s}), \\ \bar{x} &= \frac{s_{in} - \bar{s}}{d}. \end{aligned} \quad (5)$$

- a) Monod: si  $0 < \bar{u} < \mu(s_{in})$  hay un punto de operación.
  - b) Haldane: si  $0 < \bar{u} < \mu(s_{in})$  hay un punto de operación, y si  $\mu(s_{in}) \leq \bar{u} < \mu(s_c)$  hay dos.
3. Si  $\bar{u} \geq \mu_{\max}$ , donde  $\mu_{\max} = \mu(s_{in})$  para Monod y  $\mu_{\max} = \mu(s_c)$  para Haldane, entonces se tiene que  $\bar{x} = 0$  y  $\bar{s} = s_{in}$ , la cual corresponde a la condición de lavado. Esto sucede por que en este caso  $\dot{x} = -ax$ , con  $a > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

### 2.2 Cálculo del punto operación óptimo

El punto de operación óptimo se encuentra utilizando las condiciones dadas por (5).

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\bar{s}) &= q\mu(\bar{s})\bar{x} = q\mu(\bar{s})\frac{s_{in} - \bar{s}}{d}, \\ &= \frac{q}{d}\mu(\bar{s})(s_{in} - \bar{s}). \end{aligned}$$

El valor máximo de  $\bar{Q}(\bar{s})$  satisface

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{d\bar{s}} &= \frac{d}{d\bar{s}} \left( \frac{q}{d}\mu(\bar{s})(s_{in} - \bar{s}) \right) = 0, \\ \frac{d\mu(\bar{s})}{d\bar{s}}(s_{in} - \bar{s}) - \mu(\bar{s}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Si (7) tiene una única solución  $s^*$  en el compacto  $\bar{s} \in [0, s_{in}]$ ,  $\bar{Q}(s^*)$  debe ser un máximo, porque  $\bar{Q}(0) = \bar{Q}(s_{in}) = 0$  y  $\bar{Q} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Entonces, se definen  $x^*$ ,  $s^*$ ,  $u^*$ ,  $Q_{\max} = \bar{Q}(s^*)$  como los valores óptimos. El punto de operación óptimo para tasas de reacción Monod y Haldane se obtienen al reemplazar (2) y (3) en (7), ( $s = \bar{s}$ ).

- Tasa de reacción Monod:

$$\begin{aligned} s_1^* &= -K_s + \sqrt{K_s^2 + s_{in}K_s}, \\ Q_{\max 1} &= \frac{q\mu_0}{d} \frac{s_{in}\bar{s}_{c1} - \bar{s}_{c1}^2}{K_s + \bar{s}_{c1}}, \\ u_1^* &= \mu_0 \frac{\sqrt{K_s^2 + s_{in}K_s} - K_s}{\sqrt{K_s^2 + s_{in}K_s}}. \end{aligned} \quad (8)$$

- Tasa de reacción Haldane:

$$\begin{aligned} s_2^* &= \frac{-K_s + \sqrt{K_s^2 + \left(1 + \frac{s_{in}}{K_I}\right) s_{in}K_s}}{1 + \frac{s_{in}}{K_I}}, \\ Q_{\max 2} &= \frac{q\mu_0}{d} \frac{s_{in}\bar{s}_{c2} - \bar{s}_{c2}^2}{K_s + \bar{s}_{c2} + \frac{\bar{s}_{c2}^2}{K_I}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_2^* = \mu_0 \frac{\bar{s}c_2}{K_s + \bar{s}c_2 + \frac{\bar{s}^2}{K_I}}.$$

### 3. CONTROLADOR FAST EXTREMUM SEEKING

En esta sección se define el controlador propuesto y se presentan sus propiedades (nominales) principales. Para ello, defina los siguientes sistemas con entrada constante  $\bar{u}$ :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = \mu(s)x, \\ \dot{s} = -d\mu(s)x, \end{cases} \quad (10)$$

and

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x} = -(u_H - \mu(s))x, \\ \dot{s} = -d\mu(s)x + u_H(s_{in} - s), \end{cases} \quad (11)$$

los cuales fueron obtenidos haciendo  $u = u_L = 0$  y  $u = u_H$  en (1), respectivamente (para tasa de reacción Monod  $u_H > \mu(s_{in})$  y para Haldane  $u_H > \mu(s_c)$ ).

Para cada valor de  $\bar{u}$  se define una función  $\eta(x, s, \bar{u})$  como la derivada de  $Q$  a lo largo de las trayectorias del sistema (1), es decir,

$$\begin{aligned} \eta(x, s, u) &\triangleq \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial s} \dot{s} \\ &= q\mu(s)\dot{x} + q\frac{d\mu(s)}{ds}x\dot{s}, \\ &= q\mu(s)(-u + \mu(s))x + \\ &\quad q\frac{d\mu(s)}{ds}x(-d\mu(s)x + u(s_{in} - s)). \end{aligned} \quad (12)$$

Para cada entrada constante  $\bar{u}$ , la curva  $S(\bar{u}) = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 | \eta(x, s, \bar{u}) = 0\}$  (en el plano de fase) consiste de los puntos críticos transitorios de las trayectorias del sistema (1) con la entrada  $\bar{u}$ , dicho de otra manera, los puntos donde  $Q$  tiene un mínimo, un máximo o un punto de inflexión con dicha entrada (constante).

La ley de control propuesta se define como un sistema conmutado (vea por ejemplo Liberzon (2012)) que alterna entre los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , el cual tiene como curvas de conmutación las superficies  $S_1 = \{(x, s) | \eta(x, s, u_L) = 0\}$  y  $S_2 = \{(x, s) | \eta(x, s, u_H) = 0\}$  (por extrañamiento que parezca, se puede probar que la intersección de las curvas  $S_1$  y  $S_2$  siempre ocurre en el punto de operación óptimo independientemente del valor de  $u_L$  y  $u_H$ ):

**Definición 1. (Controlador)** Defina a las regiones  $\Omega_1 = \{\eta(x, s, u_L) > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{\eta(x, s, u_H) > 0\}$  e introduzca el estado discreto  $\sigma$ , cuyo rol es especificar, en cada instante  $t \geq 0$ , el índice  $\sigma \in \{1, 2\}$  del sistema activo. Al principio, se asigna  $\sigma(0) = 1$ , es decir que  $\Sigma_1$  es el sistema inicial. Para cada tiempo  $t > 0$ , si  $\sigma(t^-) = i \in \{1, 2\}$  y  $(x(t), s(t)) \in \Omega_i$ , se mantiene  $\sigma(t) = i$ . Por otra parte, si  $\sigma(t^-) = 1$  pero  $(x(t), s(t)) \notin \Omega_1$ , se asigna  $\sigma(t) = 2$ . De la misma forma, si  $\sigma(t^-) = 2$  pero  $(x(t), s(t)) \notin \Omega_2$ , se asigna  $\sigma(t) = 1$ . Se dice que ocurrió un evento de conmutación cuando  $\sigma$  cambia su valor.  $\triangle$

La Definición 1 se puede entender de la siguiente manera. Al principio se encuentra activo  $\Sigma_1$  y éste permanece hasta que la producción de biogás alcance un máximo transitorio (ahí se alcanza la superficie de conmutación  $S_1$ ), posteriormente se activa  $\Sigma_2$  hasta que nuevamente se alcance un nuevo máximo transitorio (cuando se alcanza

$S_2$ ). Y así sucesivamente hasta que se llegue al punto de operación óptimo. Sus propiedades se enuncian en el Teorema 2. (En el apéndice se da una idea de la prueba).

**Teorema 2.** Asuma que se tiene una partición del tiempo  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ , y que la conmutación sólo puede realizarse en esos instantes, los cuales pueden entenderse como tiempos de muestreo. Considere el controlador de la Definición 1, que se tiene el modelo del biorreactor (1) con parámetros desconocidos constantes, y además que la tasa de reacción es del tipo Monod o Haldane.

Para cualquier condición inicial  $(x(0), s(0)) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  se alcanza una vecindad del punto de operación óptimo (acotamiento final), y el radio de dicha vecindad depende de la separación máxima en los tiempos de conmutación.  $\triangle$

Note que para la convergencia de las trayectorias al punto de operación óptimo, el controlador no requiere del conocimiento ni de la tasa de reacción, ni de los parámetros de la planta. Sólo se requiere que el modelo del biorreactor sea (1) y fijar apropiadamente el valor de  $u_H$  (con un conocimiento mínimo de  $\mu_{\max}$ ). Ésta propiedad es muy útil para la implementación práctica del controlador.

### 4. OPERACIÓN DEL CONTROLADOR: RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección, el controlador propuesto es implementado para tasa de reacción Monod (el comportamiento en lazo cerrado es cualitativamente el mismo para Monod y Haldane), empleando los parámetros numéricos mostrados en la Tabla 1, los cuales fueron seleccionados para comparar los resultados con los obtenidos con la estrategia ES por Wang et al. (1999).

Tabla 1. Parámetros seleccionados para simulación.

Parámetro	Valor
$\mu_0$	1
$K_s$ (Monod)	0.02
$d$	1
$q$	1
$s_{in}$	1
$u_L$	0
$u_H$	1.1
$CI_1$	$[x(0), s(0)] = [0.8, 0.05]$
$CI_2$	$[x(0), s(0)] = [1.05, 0.16]$
$CI_3$	$[x(0), s(0)] = [0.1, 0.05]$

Para las simulaciones, el controlador de la Definición 1 fue implementado siguiendo el Algoritmo 1 que se muestra abajo, el cual requiere de dos valores  $u_L = 0$  y  $u_H$ , y una condición inicial  $u[0] = u_L$ . En cada iteración (tiempo de muestreo), el signo de  $Q[k] - Q[k-1]$  es calculado, y se actualiza la entrada. Para que dicho algoritmo funcione correctamente es necesario definir  $Q[-1] = 0$ . Note que esta propuesta no requiere de la medición de  $x$  ni  $s$ , que es independiente de la tasa de reacción  $\mu(s)$  y del valor de los parámetros; sólo se requiere de la medición de  $Q$ .

#### 4.1 Caso ideal

Primero se presentan los resultados de simulación para una planta nominal, sin considerar ruido en las medicio-

```

Data:  $Q[k-1], Q[k], u[k]$ 
If  $Q[k] - Q[k-1] \leq 0$  then
  If  $u[k] == u_L$ 
     $u[k+1] = u_H$ 
  else
     $u[k+1] = u_L$ 
  end
end

```

**Algorithm 1.** Updating law for  $u$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

nes. La Figura 1 muestra que las trayectorias del sistema alcanzan el punto de operación óptimo para diferentes condiciones iniciales. Esto muestra visualmente que el controlador funciona bastante bien en condiciones ideales. (El tiempo de muestreo es equivalente a hacerlo cada 6 segundos). Cabe mencionar que a pesar de que pareciera que existe un modo deslizante en la curva  $S(u_H)$ , no es real porque la conmutación depende del tiempo de muestreo y no es de frecuencia infinita.

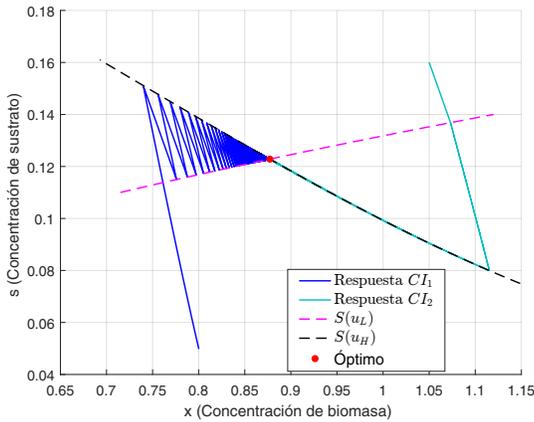


Figura 1. Trayectorias de lazo cerrado en el plano de fase para dos condiciones iniciales.

#### 4.2 Comparaciones

Por otra parte, la Figura 2 presenta una comparación entre el comportamiento con un controlador en lazo abierto y en lazo cerrado. La simulación de lazo abierto asume que se conoce toda la dinámica del sistema (parámetros y tasa de reacción), es decir, que el punto de operación óptimo es conocido y que se aplica la entrada (constante) que maximiza la producción de biogás. El comportamiento en lazo cerrado se obtiene empleando el Algoritmo 1.

Considerando los comportamientos de lazo cerrado y lazo abierto, se puede notar que ambos son del mismo orden de magnitud, es decir, la respuesta en lazo cerrado es tan rápida como la de lazo abierto, aproximadamente 5 h.

Por otra parte, la Figura 3 presenta el comportamiento del sistema empleando el controlador ES de Wang et al. (1999). Como se puede apreciar, su respuesta temporal es altamente dependiente de la condición inicial de la entrada  $u_0$ ; cuando  $u_0 = 0.6$  el tiempo de asentamiento es mayor a 100 h, y para  $u_0 = 0.55$  es mayor a 300 h. Además, de que esta técnica no garantiza una convergencia adecuada al punto de operación óptimo, sino a una vecindad cuyo radio no sólo depende del tiempo de muestreo, sino de una señal de excitación oscilatoria.

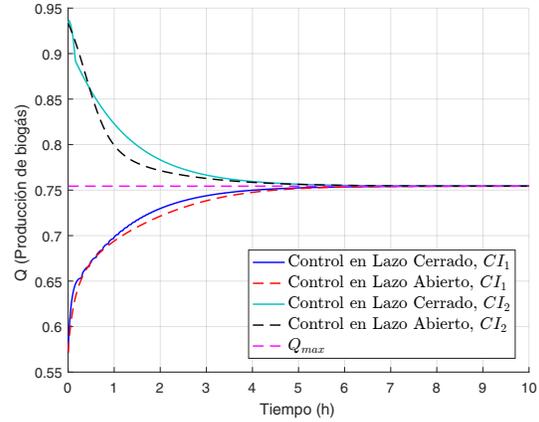


Figura 2. Fast Extremum Seeking comparado con Lazo Abierto, considerando dos condiciones iniciales.

Es clara que la diferencia en convergencia es lo suficientemente grande para concluir que la estrategia propuesta es más rápida que ES tradicional.

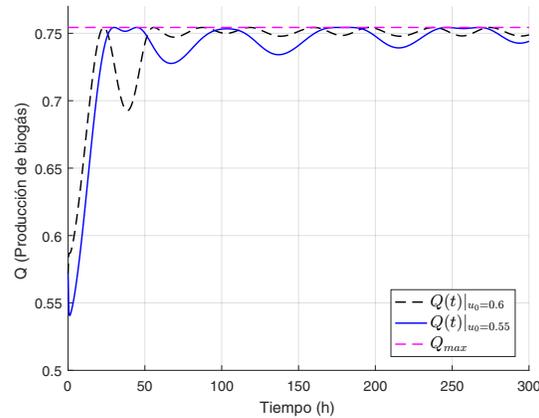


Figura 3. Extremum Seeking Wang et al. (1999),  $CI_1$ .

Además de la convergencia más rápida, es importante remarcar que la técnica propuesta es independiente del modelo de la tasa de reacción, y no requiere del conocimiento de los parámetros del sistema. Sólo se necesita sintonizar un parámetro, y su valor puede ser obtenido conociendo un estimado de la cota superior de la tasa de reacción. Adicionalmente, cabe mencionar que ES es muy difícil de sintonizar, porque tiene muchos parámetros, y un cambio pequeño en uno de ellos puede producir el lavado del reactor.

#### 4.3 Resultados de simulación: prueba de robustez

En la sección previa, se presentaron simulaciones en condiciones ideales, es decir, se asumió la disponibilidad de mediciones perfectas en la salida, y que los parámetros eran estáticos. Sin embargo, para mostrar que la estabilidad en lazo cerrado es robusta ante ciertas perturbaciones, se presentaron simulaciones considerando ruido en las mediciones y con un parámetro variante en el tiempo.

Para las siguientes simulaciones, se emplearon los parámetros nominales de la Tabla 1, pero las condiciones iniciales ( $CI_3$ ).

El controlador fue probado bajo mediciones ruidosas. El ruido fue simulado considerando una señal gaussiana sumada a una sinusoidal de baja frecuencia que multiplica a la salida; la combinación produjo un error máximo del 2% en las mediciones. La planta se simuló en continuo, con un tiempo de muestreo de un minuto.

La Figura 4 muestra el comportamiento del sistema con las condiciones descritas. Una vez que las trayectorias alcanzan una vecindad del punto de operación óptimo se puede ver el comportamiento se puede apreciar que la producción de biogás mínima es cercana al 95% de su valor óptimo.

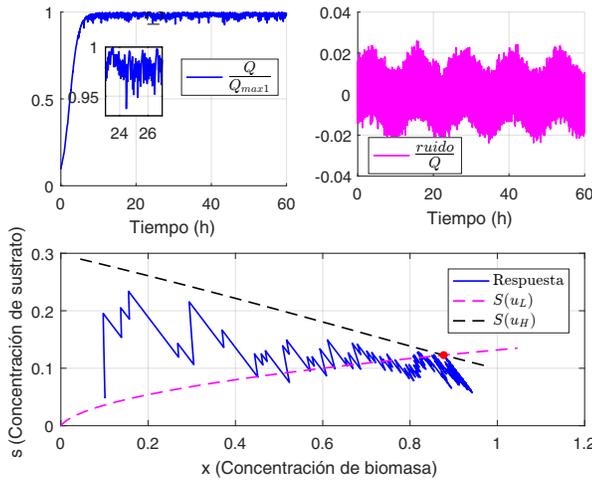


Figura 4. Tasa de reacción Monod con  $CI_3$  y ruido en las mediciones.

El plano de fase muestra el efecto del ruido en las trayectorias. Se producen eventos de conmutación prematuros o retrasados que provocan un aumento en el radio de la vecindad a la cual convergen las trayectorias. Sin embargo, estos resultados muestran que el controlador propuesto es robusto ante ruido en las mediciones. Hacer más grande el tiempo de muestreo ayuda a minimizar el impacto del ruido porque el controlador solamente utiliza la diferencia entre dos mediciones ( $Q[k] - Q[k - 1]$ ) y no la señal completa  $Q$ .

La segunda prueba consistió en probar el controlador bajo las misma situación anterior (ruido en las mediciones) incluyendo  $s_{in}$  (concentración de sustrato de entrada) variante en el tiempo. Se consideraron dos casos: cuando el cambio de  $s_{in}$  es lento y cuando es rápido. Tomando  $s_{in} = 1 + 0.1 \sin(\omega t)$  y  $\omega = 0.25$  (variación lenta) o  $\omega = 200$  (variación rápida). Los resultados de simulación se presentan en la Figura 5.

Al igual que en el caso anterior (cuando sólo se consideró ruido) se alcanza estabilidad práctica, tanto con variación lenta como rápida de  $s_{in}$ . Cuando  $s_{in}$  cambia lentamente, la salida trata de seguir la producción óptima instantánea (se genera una curva de un óptimo cuasi-estacionario), es decir, la producción de biogás calculada empleando (8) en cada instante. Por otra parte, cuando  $s_{in}$  cambia rápidamente la salida  $Q(t)$  se mantiene en una producción de biogás promedio.

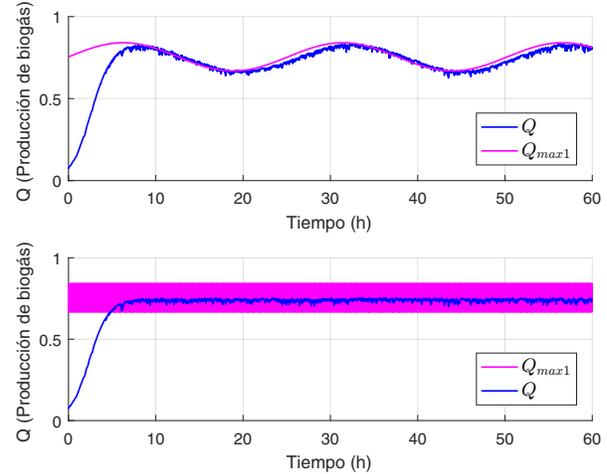


Figura 5. Tasa de reacción Monod con  $CI_3$ , ruido en las mediciones y concentración de sustrato de entrada  $s_{in} = 1 + 0.1 \sin(\omega t)$  ( $\omega$  es 0.25 en la primera gráfica y 200 en la segunda).

## 5. CONCLUSIONES

Se presentó una estrategia *extremum seeking* (ES) para optimizar un Reactor Continuo Tanque Agitado (CSTR), que utiliza dos valores de entrada  $u_L$  y  $u_H$ , la cual garantiza una convergencia más rápida que la proporcionada por los métodos ES tradicionales. El controlador propuesto es independiente de los parámetros del sistema  $s_{in}$ ,  $d$  y  $q$ , y de la tasa de reacción  $\mu(s)$ ; además es robusto ante ruido en las mediciones y ante una concentración de sustrato de entrada  $s_{in}$  variante en el tiempo. Requiere que el modelo de biorreactor sea (1) y el signo de la derivada con respecto al tiempo de  $Q(t)$ .

El controlador fue probado en condiciones ideales, y las trayectorias del sistema alcanzaron una convergencia muy buena al punto de operación óptimo, independientemente de la condición inicial y desconociendo los parámetros del sistema. Además, fue evidente que su desempeño fue más rápido que el de ES tradicional, porque su tiempo de asentamiento en lazo cerrado es casi el mismo que en lazo abierto (el controlador de lazo abierto utiliza la información de los parámetros y la tasa de reacción). Es decir, que el controlador diseñado que sólo conoce la información de la salida, funcionó tan bien como el que dispone de toda la información de la planta.

Adicionalmente, el desempeño en lazo cerrado fue probado, al considerar ruido en las mediciones así como  $s_{in}$  (concentración de sustrato de entrada) variante en el tiempo. Se logra un desempeño bastante aceptable, ya que la producción de biogás se mantuvo en un valor cercano al óptimo estacionario.

Finalmente, cabe mencionar que el tiempo de muestreo no necesita ser demasiado pequeño debido a que este tipo de sistemas tiene una dinámica muy lenta. Por lo tanto, debido a la simpleza del algoritmo y a sus ventajas, el controlador propuesto es una excelente opción para optimizar el biorreactor (1). Como trabajo a futuro, se desea extender esta metodología a modelos de orden superior (es decir, más realistas) para su futura implementación.

## Apéndice A. IDEA DE LA PRUEBA DEL TEOREMA

2

La prueba tiene algunos ingredientes importantes, los cuales *grosso modo* se mencionarán a continuación. En primer lugar, se tiene que las trayectorias admisibles del sistema están limitadas al compacto  $\Omega$ , el cual gráficamente se muestra en la Figura A.1 y que es un trapecio.

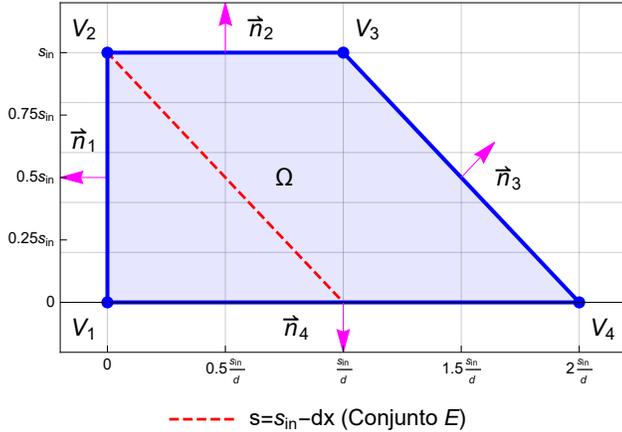


Figura A.1. Plano de fase que muestra un conjunto invariante positivo  $\Omega$  y el de puntos de operación  $E$ .

Después de ello, se puede probar que las curvas de conmutación  $S_1$  y  $S_2$  siempre dividen a  $\Omega$  en cuatro regiones, orientadas como se muestra en la Figura A.2. Esto es válido si se tiene: *a*) una tasa de reacción monótonamente creciente ya sea cóncava o convexa, o *b*) una tasa de reacción con sustrato inhibitorio como Haldane, la cual sea cóncava antes de alcanzar su máximo y posteriormente monótonamente decreciente.

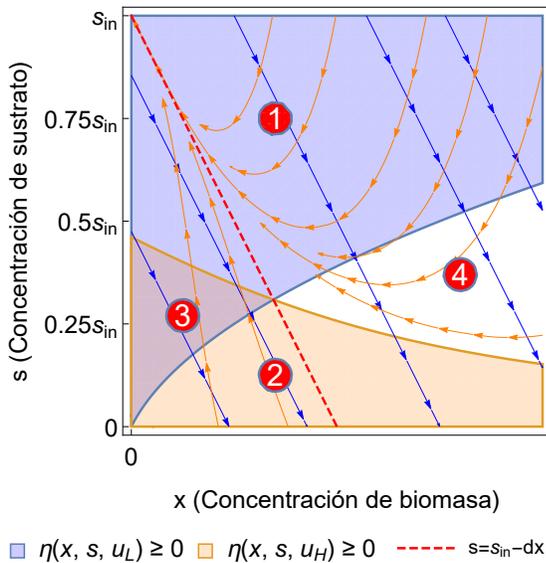


Figura A.2. Plano de fase con superficies de conmutación  $S_1$  y  $S_2$  y regiones en las cuales la producción de biogás es creciente para las señales de entrada  $u_L = 0$  y  $u_H > \mu_{max}$ .

Para analizar la convergencia a una vecindad del óptimo, se pueden proponer condiciones iniciales dentro de cada San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, 10-12 de Octubre de 2018

región, así como en las superficies  $S_1$  y  $S_2$ , y con ello verificar que las trayectorias se mueven hacia la intersección de las curvas (punto de operación óptimo). Esto puede hacerse gráficamente siguiendo el campo vectorial del sistema activo. Después de realizar ese análisis, la prueba estaría completa.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por CEMIE-Biogás 247006; PAPIIT-UNAM, proyectos IN113614 y 104016; Fondo de Colaboración II-FI UNAM, Proyecto IISGBAS-100-2015; CONACyT, proyecto 241171; y CONACyT CVU 780054.

## REFERENCIAS

- Andrews, J.F. (1968). A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates. *Biotechnology and Bioengineering*, 10(6), 707–723.
- Antonelli, R. y Astolfi, A. (2000). Nonlinear controllers design for robust stabilization of continuous biological reactors. In *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, 760–765. IEEE.
- Dieulot, J.Y. (2012). A productivity signal feedback controller for continuous bioreactors. *Journal of Process Control*, 22(7), 1318–1324.
- Lara-Cisneros, G., Femat, R., y Pérez, E. (2012). On dynamical behaviour of two-dimensional biological reactors. *International Journal of Systems Science*, 43(3), 526–534. doi:10.1080/00207721.2010.517860. URL <https://doi.org/10.1080/00207721.2010.517860>.
- Liberzon, D. (2012). *Switching in systems and control*. Springer Science & Business Media.
- Marcos, N., Guay, M., Dochain, D., y Zhang, T. (2004). Adaptive extremum-seeking control of a continuous stirred tank bioreactor with haldane's kinetics. *Journal of Process Control*, 14(3), 317–328.
- Schaum, A., Alvarez, J., y Lopez-Arenas, T. (2012). Saturated pi control of continuous bioreactors with haldane kinetics. *Chemical engineering science*, 68(1), 520–529.
- Wang, H.H., Krstić, M., y Bastin, G. (1999). Optimizing bioreactors by extremum seeking. *Int. j. adapt. control signal process*, 13(651), 669.