Memorias del Congreso Nacional de Control Automático
ISSN: 2594-2492

import matplotlib.pyplot as plt plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

Sincronización de los Sistemas Caóticos de Chen y Rössler mediante Acoplamiento a Modelos utilizando formas Hamiltonianas

JuanLuisVázquezGutiérrez * **DidierLópezMancilla** **

* *Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de los Lagos, Enrique Díaz de León 1144, Col. Paseos de la Montaña, C.P. 47460, Lagos de Moreno, Jalisco. (e-mail: ing.juan.l.21@gmail.com).*
** .

Resumen: Este trabajo contribuye al tema de la sincronización de sistemas caóticos. Inicialmente, los sistemas caóticos de Chen y Rössler se expresan en forma Hamiltoniana. Hacer esto nos permite observar características particulares del sistema, ya que el sistema se divide en una parte conservativa y una parte disipativa. Esto ayuda a diseñar una ley de control optimizada que nos permite sincronizar sistemas caóticos idénticos. En particular, la técnica de Acoplamiento a Modelos se utiliza para el diseño de la ley de control, pero se realiza una optimización en el diseño con una ley de control basada en la parte conservativa de los sistemas caóticos de Chen y Rössler expresados en forma Hamiltoniana. Esto nos da un nuevo punto de vista en el diseño de los controladores utilizados para lograr la sincronización entre dos sistemas idénticos, lo que simplifica los cálculos que se realizan para obtener una ley de control útil. Se presentan algunas simulaciones numéricas.

Keywords: Sincronización de caos, Sistema Hamiltoniano, Sistema de Chen, Sistema de Rössler, Acoplamiento a Modelos, Control Conservativo.

1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es un fenómeno observado en muchas disciplinas científicas, se refiere en general al fenómeno por el cual ocurren dos o más cosas al mismo tiempo. En Strogatz (2003), podemos encontrar varios ejemplos de este fenómeno. Desde la publicación del trabajo de Pecora y Carroll (1990) "Synchronization in Chaotic Systems", se ha generado mucho interés en el tema de la sincronización de sistemas caóticos, ya que se creía que los sistemas caóticos desafiaban la sincronización. El uso de leyes de control ayuda a resolver el problema de la sincronización entre dos sistemas caóticos, como se muestra en López-Mancilla (2005). Uno de los objetivos de este trabajo es simplificar las leyes de control que se utilizan para lograr la sincronización entre sistemas caóticos idénticos, utilizando formas generalizadas Hamiltonianas.

Los sistemas de Chen y Rössler se pueden expresar en una forma Hamiltoniana, como se muestra en los trabajos de Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000); Posadas-Castillo et al. (2014), para dividir los sistemas originales en una función conservativa, disipativa y un vector desestabilizante. En este trabajo, se usa una analogía al método de Acoplamiento a Modelos para obtener una ley de control, basada solo en la parte conservativa del sistema en forma Hamiltoniana. Para expresar un sistema en forma Hamiltoniana, debemos considerar una función de energía, donde el gradiente de la función de energía se usa como un vector de estado para transformar los sistemas. También hay otros artículos como López-Mancilla et al. (2005) en los que se usan formas Hamiltonianas de sistemas caóticos para aplicaciones en comunicación.

El objetivo de este trabajo es lograr la sincronización entre sistemas caóticos idénticos dispuestos en una configuración maestro-esclavo utilizando una analogía al método de Acoplamiento a Modelos basado en la parte conservativa de una forma Hamiltoniana de los sistemas de Chen y Rössler. Tomando provecho de la estructura de esta transformación, solo se usa la parte conservativa para encontrar una ley de control, considerando que la parte disipativa del sistema tenderá a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, y la función desestabilizante depende de las variables de estado. El hecho de utilizar solo una parte del sistema en una forma Hamiltoniana para el diseño de una ley de control, simplifica los cálculos utilizados para obtenerla, minimiza el tiempo de computo para la simulación y permite una posible implementación física.

En la Sección 2, se explican los conceptos básicos del método de Acoplamiento a Modelos y la forma general de obtener una ley de control basada en la parte conservativa de un sistema expresado en forma Hamiltoniana generalizada. En la sección 3 se expone el tema principal, presentando las leyes de control obtenidas para lograr la sincronización de los sistemas caóticos de Chen y Rössler en una configuración maestro-esclavo. La sección 4 muestra las simulaciones numéricas de la aplicación de las leyes de control y la sección 5 contiene las conclusiones generales de este trabajo.

2. PROPUESTA PARA LA OBTENCIÓN DE UNA LEY DE CONTROL USANDO ACOPLAMIENTO A MODELOS BASADA EN LA PARTE CONSERVATIVA DE UN SISTEMA HAMILTONIANO

El problema de Acoplamiento a Modelos nos dice que dada una planta P y un modelo M, alrededor de sus respectivos puntos de equilibrio x^o y x^o_M y un punto x^o_E, el problema de Acoplamiento a Modelos es encontrar una ley de control $u(t)$, tal que $y_E \to 0$ cuando $t \to \infty$. El modelo M es el maestro y la planta P actúa como el esclavo en una configuración maestro-esclavo. Las variables $x(t) \in \mathrm{R}^n$ y $x_M(t) \in \mathrm{R}^m$ son los vectores de estado de cada sistema, $u(t)$ y $u_M(t)$ son las entradas de cada sistema, $\dot{x}$ y $\dot{x}_M$ representan el cambio en el tiempo de las variables de estado de los sistemas dinámicos $f(x)$ y $f_M(x_M)$ respectivamente, bajo la influencia de las entradas $g(x)u$ y $g_M(x_M)u_M$ correspondientes a cada sistema (ver ecuaciones 1, 2). Las salidas de los sistemas P y M son y y y_M respectivamente. Las funciones $f(x)$, $g(x)$, $f_M(x_M)$, $g_M(x_M)$, $h(x)$ y $h_M(x_M)$ se consideran suaves y analíticas. En el método de Acoplamiento a Modelos se propone un sistema auxiliar, que contiene los dos sistemas que se pretenden sincronizar mediante una ley de control $u(t)$. El sistema auxiliar se basa en la planta P y el modelo M y se expresa como E.

$$P : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{array} \right. \tag{1}$$

$$M : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)u_M \\ y = h_M(x_M) \end{array} \right. \tag{2}$$

$$E : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_E = f_E(x_E) + \hat{g}(x_E)u + \hat{g}_M(x_E)u_M \\ y_E = h_E(x_E). \end{array} \right. \tag{3}$$

donde

$$f_E(x_E) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_M(x_M) \end{pmatrix} \qquad \hat{g}_M(x_E) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_M) \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}(x_E) = \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_E(x_E) = h(x) - h_M(x_M)$$

La salida del sistema auxiliar E es la diferencia de las salidas de P y M, esto significa que cuando el resultado es 0 los sistemas P y M están sincronizados. Para lograr esto, usando Acoplamiento a Modelos, la ley de control $u(t)$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (v - L_f^r h(x) + L_{f_M}^r h_M(x_M) \\ & + L_{g_M} L_{f_M}^{r-1} h_M(x_M) u_M). \end{aligned} \tag{4}$$

La ecuación (4) es una fórmula general para encontrar una ley de control, utilizada para la sincronización de sistemas idénticos o no idénticos tomada del trabajo de López-Mancilla (2005). La ley de control se obtiene al calcular los derivados de Lie $L_g L_f^{r-1} h(x)$, $L_f^r h(x)$, $L_{f_M}^r h_M(x_M)$ y $L_{g_M} L_{f_M}^{r-1} h_M(x_M)$, v en la fórmula general es $v = -c_0 h_E(x_E) - c_1 L_E h_E(x_E) - \cdots - c_{r-1} L_E^{r-1} h_E(x_E)$. Las constantes $c_i, i = 0, 1 \ldots r-1$ de v se pueden obtener con el método de ubicación de polos. Para aplicar Acoplamiento a Modelos, el grado relativo del sistema r de la planta P debe ser menor o igual que el grado relativo r_M del modelo M. Donde el grado relativo de un sistema se interpreta como la cantidad de derivadas aplicadas a la salida de un sistema para obtener las entradas de un sistema de manera explícita.

Considerando un sistema autónomo n-dimensional

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathrm{R}^n \tag{5}$$

La cual representa un sistema de ecuaciones diferenciales, se puede escribir en una forma Hamiltoniana generalizada con la siguiente forma:

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x} + S(x)\frac{\partial H}{\partial x} + F(x) \tag{6}$$

donde $H(x)$ denota una función de energía suave que es globalmente definida positiva en R^n. El vector de columna del gradiente de $H(x)$, se denota por $\frac{\partial H}{\partial x}$, se supone que existe en todas partes. Para la elección de $H(x)$, las funciones de energía cuadráticas son utilizadas con frecuencia, con la forma:

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T M x \tag{7}$$

con M siendo una matriz simétrica definida positiva. Las matrices cuadradas, $J(x)$ y $S(x)$, dentro de la expresión (6) satisfacen, para todo $x \in \mathrm{R}^n$, las siguientes propiedades que muestran la estructura de administración de energía del sistema son:

$$J(x) + J^T(x) = 0, \quad S(x) = S^T(x) \tag{8}$$

El campo vectorial $J(x)\frac{\partial H}{\partial x}$ exhibe la parte conservativa del sistema y también se conoce como la parte sin trabajo. La matriz $S(x)$ es, en general, una matriz simétrica que representa la parte que presenta el trabajo o la parte disipativa del sistema. Para ciertos sistemas, la matriz $S(x)$ es semi-definida negativa o definida negativa. En tales casos, el campo vectorial se conoce como la parte disipativa del sistema. Si $S(x)$ es definida positiva, o semi-definida positiva, representa la parte desestabilizadora global, semi-global y local del sistema. $F(x)$ representa un campo vectorial localmente desestabilizante, podemos encontrar más información en Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000).

Teniendo en cuenta que la parte disipativa del sistema será cero a medida que el tiempo tiende hacia el infinito y la función desestabilizante depende de las variables de estado, las partes disipativa y desestabilizante del sistema en forma Hamiltoniana, no se consideran parte del sistema cuando aplicamos Acoplamiento a Modelos para encontrar la ley de control que logre la sincronización entre el modelo y la planta propuestos. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se propone que el modelo, la planta y el sistema auxiliar sean:

$$P : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u \\ y = h(x) \end{array} \right. \tag{9}$$

$$M : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_M = J_M(x_M)\frac{\partial H_M}{\partial x_M} + g_M(x_M)u_M \\ y = h_M(x_M) \end{array} \right. \tag{10}$$

$$E : \begin{cases} \dot{x}_E = f_E(x_E) + \hat{g}(x_E)u + \hat{g}_M(x_E)u_M \\ y_E = h_E(x_E) \end{cases} \tag{11}$$

donde

$$f_E(x_E) = \begin{pmatrix} J(x) & 0 \\ 0 & J_M(x_M) \end{pmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E}$$

$$\hat{g}_M(x_E) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_M) \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}(x_E) = \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_E(x_E) = h(x_E) - h_M(x_E).$$

$H(x)$ y $H_M(x_M)$ son las funciones de energía propuestas para los sistemas P y M en forma Hamiltoniana. La función de energía del sistema auxiliar es $H_E(x_E) = H(x) + H_M(x_M)$. Con la propuesta de los nuevos sistemas y haciendo una analogía con la ley general de control que se usa en Acoplamiento a Modelos (ecuación (4)), se propone una ley de control general para casos en los que se conoce la forma Hamiltoniana de algún sistema, con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u = &\frac{1}{L_{\hat{g}} L_{f_E}^{r-1} h_E(x_E)} (v - L_{\hat{J}}^r h(x) + L_{\hat{J}_M}^r h_M(x_M) \\ &+ L_{\hat{g}_M} L_{f_E}^{r-1} h_E(x_E) u_M) \end{aligned} \tag{12}$$

donde $\hat{J} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}$ y $\hat{J_M} = J_M(x_M)\frac{\partial H_M}{\partial x_M}$.

En esta ley de control v permanece sin cambios, eso significa que todavía usamos la misma v usada en (4).

3. LEYES DE CONTROL PARA LOS SISTEMAS CAÓTICOS DE RÖSSLER Y CHEN

Para calcular las leyes de control basadas en la parte conservativa de los sistemas en forma Hamiltoniana generalizada, se usa la ecuación (12). Para el cálculo de las constantes de v, se usa el método de ubicación de polos.

3.1 Ley de Control para una Configuración Maestro-Esclavo de Dos Sistemas Caóticos de Rössler

Basado en Posadas-Castillo et al. (2014) la forma Hamiltoniana de un sistema de Rössler, con una función de energía $H(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$ es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = &\begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -c \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + x_1 x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Utilizando solo la parte conservativa de la forma Hamiltoniana, se propone una planta P, modelo M y un sistema auxiliar E como:

$$P : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{14}$$

$$M : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y = x_{M1} \end{cases} \tag{15}$$

$$E : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y_E = x_1 - x_{M1} \end{cases} \tag{16}$$

Calculando las derivadas de Lie necesarias, donde el grado relativo se considera $r = 2$, las derivadas de Lie son:

$$L_{\hat{J}} h(x) = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} = -x_2 - \frac{x_3}{2}$$

$$L_{\hat{J}}^2 h(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{3x_1}{2}$$

$$L_{\hat{J}_M} h_M(x_M) = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} = -x_{M2} - \frac{x_{M3}}{2}$$

$$L^2_{\hat{J}_M} h_M(x_M) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} = -\frac{3x_{M1}}{2}$$

$$L_{f_E} h_E(x_E) = [0\ 1\ 0\ 0\ -1\ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E}$$

$$= (-x_2 - \frac{x_3}{2}) - (-x_{M2} - \frac{x_{M3}}{2})$$

$$L_{\hat{g}_M} L_{f_E} h_E(x_E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$L_{\hat{g}} L_{f_E} h_E(x_E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Sustituyendo los valores de las derivadas de Lie en (12) y calculando las constantes de v por ubicación de polos, la ley de control para la sincronización de dos sistemas Rössler después de la factorización es:

$$u = \frac{11}{2}(x_1 - x_{M1}) + 2(x_{M2} - x_2) + (x_{M3} - x_3) + u_M \quad (17)$$

3.2 Ley de Control para una Configuración Maestro-Esclavo de Dos Sistemas Caóticos de Chen

Basado en Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000) la forma Hamiltoniana de un sistema de Chen con una función de energía $H(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$ es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} -a & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (18)$$

donde $k = a - \frac{c}{2}$, usando solo la parte conservativa de la forma Hamiltoniana, una planta P, modelo M y un sistema auxiliar E, se proponen como:

$$P: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (19)$$

$$M: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_{M1} \\ 0 & x_{M1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y = x_{M1} \end{cases} \quad (20)$$

$$E: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & -x_{M1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{M1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y_E = x_1 - x_{M1} \end{cases} \quad (21)$$

Calculando las derivadas de Lie necesarias, donde el grado relativo se considera $r = 2$, las derivadas de Lie son:

$$L_{\hat{J}} h(x) = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} = (a - \frac{c}{2})x_2$$

$$L^2_{\hat{J}} h(x) = \begin{bmatrix} 0 & a - \frac{c}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$= (a - \frac{c}{2})((-a + \frac{c}{2})x_1 - x_1 x_3)$$

$$L_{\hat{J}_M} h_M(x_M) = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_{M1} \\ 0 & x_{M1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M}$$

$$= (a - \frac{c}{2})x_{M2}$$

$$L^2_{\hat{J}_M} h_M(x_M) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_{M1} \\ 0 & x_{M1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M}$$

$$= (a - \frac{c}{2})((-a + \frac{c}{2})x_{M1} - x_{M1} x_{M3})$$

$$L_{f_E} h_E(x_E) =$$

$$[0\ 1\ 0\ 0\ -1\ 0] \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & -x_{M1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{M1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E}$$

$$= (a - \frac{c}{2})x_2 - (a - \frac{c}{2})x_{M2}$$

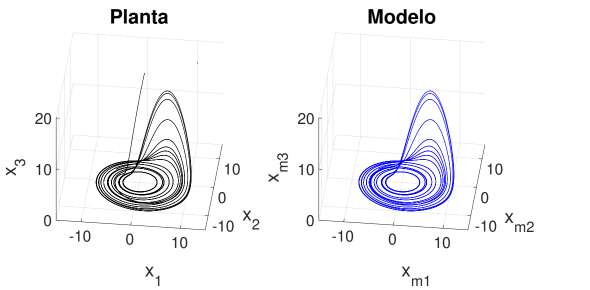

Figura 1. Modelo y planta de la configuración maestro-esclavo de dos sistemas de Rössler.

$$L_{\hat{g}}L_{\hat{f}}h_E(x_E) = \begin{bmatrix} 0 & a-\frac{c}{2} & 0 & 0 & -a+\frac{c}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a - \frac{c}{2}$$

$$L_{\hat{g}_M}L_{\hat{f}_M}h_E(x_E) = \begin{bmatrix} 0 & a-\frac{c}{2} & 0 & 0 & -a+\frac{c}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -a + \frac{c}{2}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas de Lie en (12) y calculando las constantes de v por ubicación de polos, la ley de control para la sincronización de dos sistemas Chen después de la factorización es:

$$u = \frac{28}{2a-c}(x_{M1} - x_1) + 49(x_{M2} - x_2) + (x_1(x_3 - k)) - (x_{M1}(x_{M3} - k)) - u_M \tag{22}$$

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, las simulaciones numéricas de los sistemas se presentan utilizando las leyes de control obtenidas en la sección 3, en una configuración maestro-esclavo. Las simulaciones se realizan usando un algoritmo de Runge-Kuta de cuarto orden, programado en MatLab ®.

El sistema de Rössler exhibe una dinámica caótica con los parámetros $a = 0{,}2$, $b = 0{,}2$ y $c = 5{,}7$. Tanto el modelo como la planta se simularon utilizando estos parámetros. Las condiciones iniciales utilizadas para la planta son $x_1(0) = 15$, $x_2(0) = 5$ y $x_3(0) = 3$. Las condiciones iniciales utilizadas para el modelo son $x_{M1}(0) = 1$, $x_{M2}(0) = 5$ y $x_{M3}(0) = 3$. La entrada al modelo se toma como $u_M = 0{,}5sin(t)$.

En la Fig. 1 podemos ver la gráfica del espacio de estados del modelo y planta de la configuración maestro-esclavo de los sistemas de Rössler, la planta está bajo la influencia de la ley de control (17). El modelo funciona como maestro y la planta funciona como esclavo.

En la Fig. 2 los valores de x_{M1} y x_1 se grafican contra el tiempo t, en la parte superior izquierda de este gráfico se hace un acercamiento para apreciar cómo la diferencia entre el los valores de los estados trazados tienden a cero. En la Fig. 3, el gráfico de sincronización ($x_{M1} vs. x_1$)

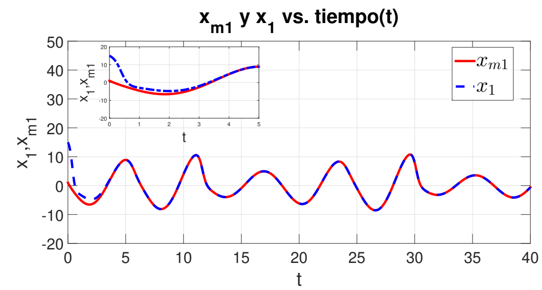

Figura 2. Gráfica de los estados x_{M1} y x_1 contra el tiempo t de la configuración maestro-esclavo de Rössler

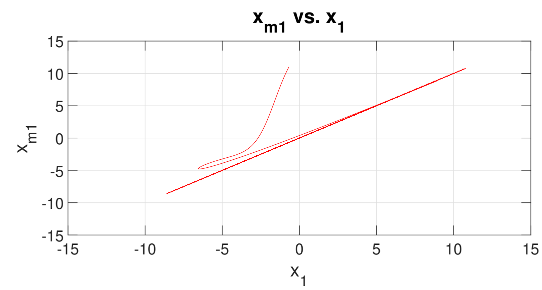

Figura 3. Gráfica de sincronización de x_{M1} vs x_1 de los estados de la configuración maestro-esclavo de Rössler.

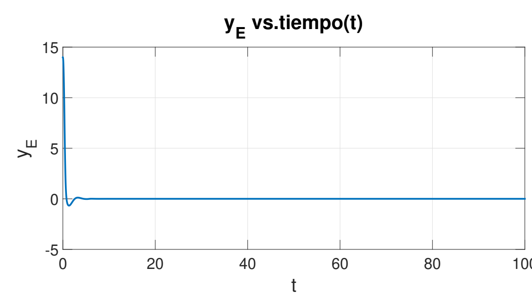

Figura 4. Gráfica de y_E vs t de la configuración maestro-esclavo de Rössler.

muestra una pendiente de 45 grados, lo que indica que los estados se sincronizan.

En la Fig. 4 se gráfica la salida del sistema auxiliar y_E de los sistemas de Rössler contra el tiempo t, para apreciar el comportamiento de la diferencia entre los estados x_{M1} y x_1 con respecto al tiempo.

El sistema Chen exhibe una dinámica caótica con los parámetros $a = 35$, $b = 3$ y $c = 28$. Tanto el modelo como la planta se simularon utilizando estos parámetros. Las condiciones iniciales utilizadas para la planta y el modelo son las mismas que las utilizadas en el sistema Rössler al igual que la entrada arbitraria u_M.

En la Fig. 5 podemos ver la gráfica del espacio de estados del modelo y planta de la configuración maestro-esclavo de los dos sistemas de Chen, la planta está bajo la influencia de la ley de control (22). El modelo funciona como maestro y la planta funciona como esclavo.

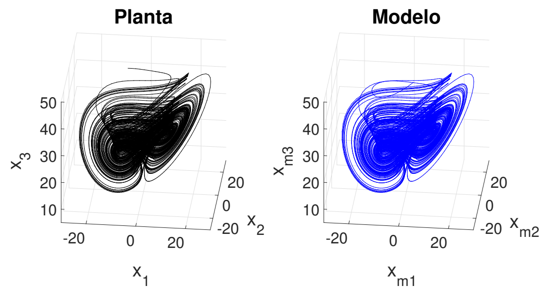

Figura 5. Modelo y planta de la configuración maestro-esclavo de dos sistemas de Chen.

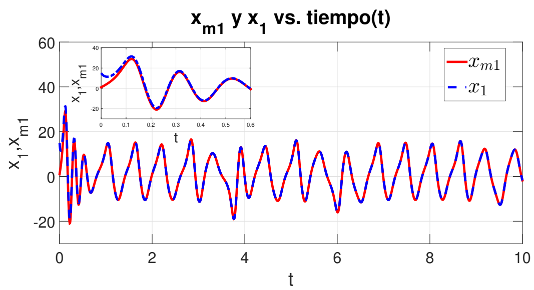

Figura 6. Gráfica de los estados x_{M1} y x_1 contra el tiempo t de la configuración maestro-esclavo de Chen.

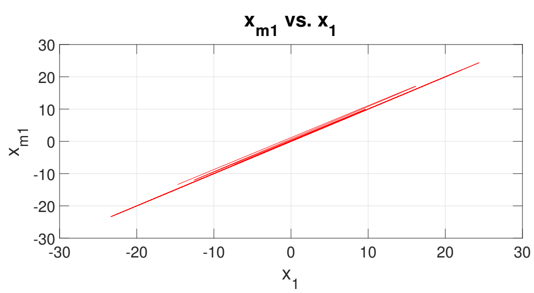

Figura 7. Gráfica de sincronización de x_{M1} vs. x_1 de los estados de la configuración maestro-esclavo de Chen.

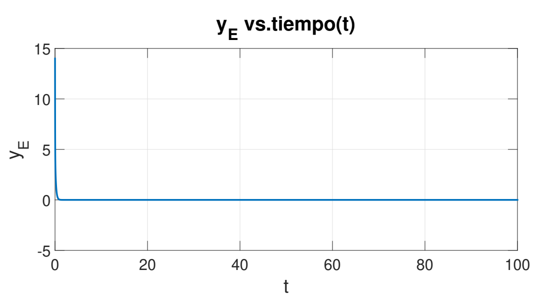

Figura 8. Gráfica de y_E vs t de la configuración maestro-esclavo de Chen.

En la Fig. 6 los valores de x_{M1} y x_1 se grafican contra el tiempo t, en la parte superior izquierda de esta gráfica se hace un acercamiento para apreciar cómo la diferencia entre el los valores de los estados trazados tienden a cero. En la Fig. 7, la gráfica de sincronización ($x_{M1} vs. x_1$) muestra una pendiente de 45 grados, lo que indica que los estados se sincronizan, como sucede en la Fig. 3.

En la Fig. 8 se gráfica la salida del sistema auxiliar y_E de los sistemas de Chen contra el tiempo t, para apreciar el comportamiento de la diferencia entre los estados x_{M1} y x_1 con respecto al tiempo.

5. CONCLUSIONES

En base a las simulaciones, se puede concluir que las leyes de control obtenidas para la sincronización de la configuración maestro-esclavo de sistemas idénticos se logra para los sistemas propuestos. El método de Acoplamiento a Modelos se utiliza para obtener las leyes de control basadas en la parte conservativa de la forma Hamiltoniana generalizada. Hacer esto nos brinda una ley de control optimizada, simplificando los cálculos que se hacen en el método original. Los sistemas de Rössler y Chen fueron elegidos por el hecho de que las formas Hamiltonianas de los sistemas ya se habían obtenido en otros trabajos y por ser sistemas clásicos. Dado que las leyes de control son relativamente simples, se puede realizar una posible implementación física para futuros trabajos.

REFERENCIAS

López-Mancilla, D., Cruz-Herández, C., y Posadas-Castillo, C. (2005). A modified chaos-based communication scheme using Hamiltonian forms and observer. *Journal of Physics: Conference Series*, 23(1), 267–275. doi:10.1088/1742-6596/23/1/028.

López-Mancilla, D. (2005). *Sincronizacion de Osciladores Caóticos Perturbados con Aplicaión a Sistemas de Comunicaciones*. Ph.D. thesis, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Encenada.

Pecora, L.M. y Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8), 821–824. doi:10.1103/PhysRevLett.64.821.

Posadas-Castillo, C., Garza-González, E., Diaz-Romero, D.A., Alcorta-García, E., y Cruz-Hernández, C. (2014). Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators: Hamiltonian systems approach. *Journal of Applied Research and Technology*, 12(4), 782–791. doi:10.1016/S1665-6423(14)70094-X.

Sira-Ramirez, H. y Cruz-Hernandez, C. (2000). Synchronizaton of chaotic systems: a generalized hamiltonian systems approach. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, 2(5), 1381–1395. doi:10.1109/ACC.2000.876602.

Strogatz, S.H. (2003). *Sync:how order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*. HYPERION, New York, 1 edition.

