

Aislamiento de fallas en sistemas dinámicos: un enfoque topológico

David A. Diaz-Romero * Efrain Alcorta Garcia **
Daniel Enrique Rivas-Cisneros ***

* Universidad Autónoma de Nuevo León,
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
(e-mail: david.diazrr@uanl.edu.mx).

** (e-mail: efrain.alcortagr@uanl.edu.mx).

*** (e-mail: daniel.rivascs@uanl.edu.mx).

Resumen. La supervisión del buen desempeño de un sistema industrial esta frecuentemente asociado a la disponibilidad de modelos del comportamiento dinámico de estos sistemas. En algunos casos la complejidad de los procesos hace difícil poder disponer de modelos que puedan ser manejables. En este trabajo se propone un conjunto de herramientas provenientes de la topología para la localización de fallas en sistemas dinámicos de bajo orden. En particular se asocian ciertos invariantes topológicos con variaciones de parámetros (fuera de límites), las cuales pueden ser consideradas como fallas. El uso de las herramientas es mostrado con el sistema de *Parris*, aunque hay evidencia de aplicaciones con otros sistemas. Las ventajas y trabajos futuros del esquema propuesto son discutidas.

Keywords: Dynamic systems, Parametric variation, Invariants, Faults, Fault detection, Fault isolation.

1. INTRODUCCIÓN

El incremento de los estándares industriales de seguridad y confiabilidad en los procesos industriales hace que sea necesario el establecimiento de procedimientos que apoyen el cumplimiento de estos. Las herramientas del control automático y diagnóstico de fallas pueden servir para estos propósitos. Existe una amplia literatura referente al diagnóstico de fallas en sistemas dinámicos, ver por ejemplo los libros Chen and Patton (1999), Isermann (2006), Ding (2013), Ding (2014).

El creciente conjunto de requerimientos antes mencionados va de la mano con el incremento de la complejidad de los sistemas industriales. En general se hace difícil, en algunas situaciones, el disponer de modelos manejables, en forma de ecuaciones diferenciales (o en diferencias), de los sistemas bajo estudio. Con esto los métodos basados en modelos pudieran no ser una opción viable. Existen muchos procedimientos que permiten diagnosticar sistemas (principalmente estáticos) utilizando el concepto de Análisis de Componente Principal (PCA por sus siglas en inglés) y sus variantes Chiang et al. (2001). Un conjunto de herramientas asociadas con aplicaciones para sistemas dinámicos es resumida en Ding (2014). Sin embargo, las técnicas hacen uso indirecto del modelo (bajo supuestos de linealidad).

La teoría de nudos es la rama de la topología que estudia el comportamiento de estructuras tridimensionales sin intersecciones y sus invariantes, Adams (1994).

Un nudo es una trayectoria sin intersecciones en un espacio tridimensional. Uno de los principales objetivos de la teoría de nudos es distinguir si dos trayectorias que a simple vista lucen diferentes, representan en realidad al mismo nudo, Adams (1994).

La teoría de nudos inició su desarrollo formal alrededor del siglo XVIII, ver por ejemplo el problema de los puentes de Königsberg en Euler (1736). Posteriormente la teoría del ether, la cual proponía que toda la materia era resultado de los distintos embalamientos del ether, propició un crecimiento en el estudio de los nudos y a su vez se generaron las primeras tablas de nudos, de las cuales, la tabla de nudos de Tait aún es utilizada como referencia.

Desafortunadamente para la teoría de nudos aplicada a la física, la comprobación de la ausencia del ether frenó la investigación en el área de nudos, Michelson and Morley (1887).

Fue hasta finales de la década de los 70's y principios de los 80's que la teoría de nudos volvió a tener relevancia en el área de las ciencias aplicadas al desarrollarse el *polinomio de Jones*, el cual marcó un hito en la teoría de nudos, al proponer un invariante topológico de utilidad para estas ramas.

Posterior al polinomio de Jones, se ha presentado una nueva explosión en la investigación de la teoría de nudos, al desarrollarse nuevos y mejores invariantes, permitiendo una aplicación de esta teoría y sus metodologías a distintas disciplinas aplicadas, tales como la física, Kauffman (1991), la química, C. A. Hunter (2001) y la biología, Olavarrieta et al. (2002), Oleg and Fritz (2005).

En este trabajo se propone el uso de herramientas provenientes de la topología de baja dimensión para extraer indicadores (invariantes) de la operación del sistema. Dentro de las diferentes opciones disponibles se consideran los invariantes que han mostrado tener sensibilidad a ciertas variaciones de parámetros. Una ventaja es que no se presupone (ni utiliza) un modelo matemático para la determinación de los invariantes. Los invariantes se obtienen del análisis de las trayectorias (mediciones) del sistema. Esto implica que el análisis debe de ser realizado fuera de línea. La propuesta es mostrada mediante el sistema de Parris (1977) así como una aplicación, por último se discute el trabajo futuro.

2. PRELIMINARES

En esta sección se introducen los conceptos que forman la base de la propuesta de este trabajo. Se comienza introduciendo la topología de baja dimensión e invariantes topológicos así como de los conceptos de detección y aislamiento de fallas.

2.1 Topología de baja dimensión, teoría de nudos.

La topología es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas, Stewart (1988). Es una disciplina que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas.

La mayoría de los sistemas dinámicos de tercer orden admite una representación en un espacio de estados tridimensional, Perko (2001). Una herramienta que puede utilizarse para estudiar el comportamiento de estos sistemas es la topología de baja dimensión, mediante la teoría de nudos. La teoría de nudos es una rama de la topología que estudia los embebimientos tridimensionales.

Un embebimiento anudado es entonces una propiedad que no cambia bajo deformaciones continuas, sin embargo, un cambio suficientemente fuerte, puede modificar la estructura topológica de la trayectoria, e.g. una cirugía. Esta anudación de la trayectoria podría ayudar a comprender y distinguir entre otras cosas, la complejidad de un sistema, así como el comportamiento del mismo.

2.2 Herramienta topológica

Un invariante en teoría de nudos, es una propiedad topológica que se mantiene ante variaciones suaves de las trayectorias tridimensionales anudadas. Un cambio

importante del sistema, se puede registrar como una alteración en el invariante.

Un nudo es una trayectoria tridimensional (Γ) que no posee intersecciones en su recorrido y cuyo inicio y fin coinciden, como se muestra en¹ la figura 1.

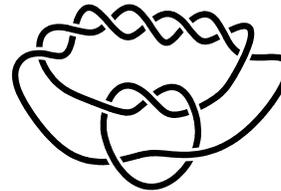


Figura 1. Representación planar de un nudo.

Los nudos pueden ser deformados de manera suave por medio de los movimientos de Reidemeister, los cuales se indican en la figura 2.

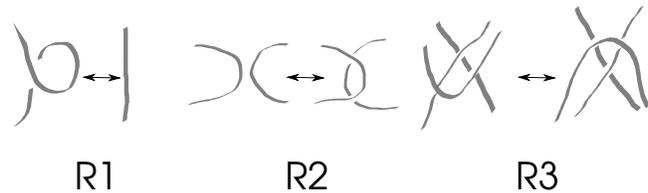


Figura 2. Movimientos básicos de Reidemeister.

Estos movimientos son isomorfismos que modifican la geometría local de la trayectoria pero mantienen la topología del objeto.

La estructura topológica de la trayectoria puede ser indicada por medio de un invariante, al cual también le podemos llamar “firma topológica”. Existen diversos invariantes topológicos, e.g. los polinomios de Alexander (1928), Jones (1985), Kauffman (1987) y el H.O.M.F.L.Y. Freyd et al. (1985) por citar algunos.

En este trabajo utilizaremos el *Polinomio de Alexander* el cual se define como:

Definición 2.1. *El polinomio de Alexander de un enlace o nudo orientado L , es el determinante $\det(xM - x^{-1}M^T)$ donde M es cualquier matriz válida de superficie de Seifert para L . Es un polinomio de Laurent en $Z[x^{\pm 1}]$ con coeficientes enteros y potencias positivas y negativas. Véase Cromwell (2004).*

El invariante topológico de la curva Γ se forma a partir de la información de los cruces que posee la trayectoria del sistema, Adams (1994).

2.3 Detección y aislamiento de fallas

La redundancia de información se utiliza para determinar si una falla se presenta en un sistema. Una forma de redundancia se logra mediante el duplicado y triplicado

¹ Tomado del sitio “The knotPlot Site”

de elementos de medición, actuadores y en algunos casos de componentes de un sistema. La redundancia también puede ser analítica, cuando la información sobre las señales que se miden es obtenida mediante el uso de modelos.

Generalmente los modelos de un sistema se utiliza para estimar el valor de la salida. La diferencia entre la medición de la salida y la estimación sirve para construir una señal que dependa idealmente solo de la falla (en caso de que esta este presente), esta señal es denominada residuo, que es cercana a cero en caso de que no haya fallas presentes en el sistema. Ver figura 3.

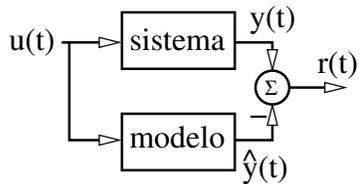


Figura 3. Esquema general para la detección de fallas

Diferentes métodos dependen de los diferentes tipos de modelos que se pueden obtener. En ocasiones, en lugar de utilizar el modelo directamente se utiliza un observador (modelo más factor de corrección del error de estimación). En este caso se cuenta con un grado de libertad adicional en la selección de la ganancia del observador que puede servir para determinar el radio de convergencia del error de estimación a cero en ausencia de fallas. La ganancia del observador puede ser utilizada para discriminar entre fallas, para enfatizar el efecto de algunas sobre otras en el residuo, como puede ser apreciado en Frank (1990); Alcorta Garcia and Frank (1999)

La forma en la que la ganancia es seleccionada puede permitir en muchos casos no solo lograr la detección, sino también el aislamiento de fallas. Quedando solo un paso más para lograr el diagnóstico de fallas: mediante la identificación de la falla.

Una situación diferente se presenta cuando no se dispone inicialmente de modelos. En estos casos existe en la literatura una amplia gama de propuestas, como puede ser apreciado en Ding (2014). En general los esquemas libres de modelo operan en dos pasos: con datos entrada-salida sin fallas se estima un modelo o bien un generador de residuos. Una vez que se dispone de este generador de residuos (o modelo) se utiliza en una segunda fase para realizar la detección y/o aislamiento de las fallas. Cabe mencionar que que estas técnicas presuponen un modelo en forma de ecuación en diferencias o bien diferencial.

Note que aun y cuando estos últimos métodos destacan que no necesitan de un modelo del sistema (al menos inicialmente), finalmente terminan infringiendo el modelo e implementandolo. Esto último resulta, sin embargo transparente para el usuario.

3. CASOS DE ESTUDIO

En esta sección se presentan el sistema de Parris (1977), el cual nos permite mostrar un ejemplo básico de operación del método de análisis topológico y el ejemplo práctico de aplicación a la asociación con cardiopatías.

3.1 Ejemplo analítico: descripción del sistema de Parris

El sistema descrito en Parris (1977) es un sistema dinámico tridimensional que, dependiendo de las condiciones iniciales y el valor de los coeficientes m y n , posee trayectorias anudadas.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -mx_2 + nx_1x_3 \\ \dot{x}_2 &= mx_1 + nx_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= \left(\frac{n}{2}\right)(1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (1)$$

donde m y $n \in \mathbb{N}$.

Los nudos generados a partir del sistema 1 son tóricos, lo que significa que existen sobre una superficie toroidal.

Las condiciones iniciales para el caso básico de estudio son: $x_1(0) = -2,5$, $x_2(0) = 2,5$, $x_3(0) = 0,78$, y el valor de $m = 2$ y $n = 3$, lo cual nos da la trayectoria $\Gamma =$ el nudo trébol. La gráfica de las señales x_1 , x_2 y x_3 Vs. tiempo t se muestran en la figura 4.

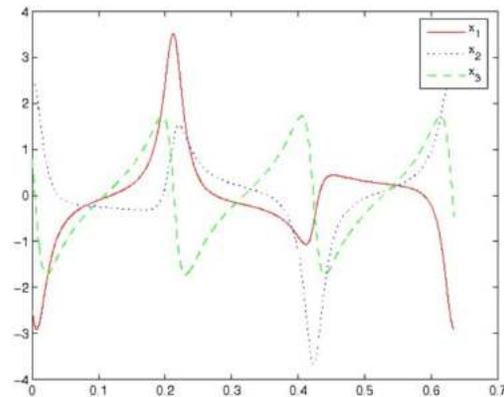


Figura 4. Señales Vs. tiempo.

La gráfica anudada del sistema (1) en R^3 y R^2 se muestra en la figura 5, donde se muestran tres distintas vistas de la misma trayectoria, haciéndose evidente el nudo trébol en la vista superior (c).

Para detectar si el embebimiento del sistema presenta anudación, se analizan las 3 series de tiempo por medio de un algoritmo de detección de cruces descrito en Díaz Romero (2007). El periodo en el cual se analiza el sistema es señalada en la figura 6.

A partir del periodo citado se obtienen los puntos de cruce del nudo K :

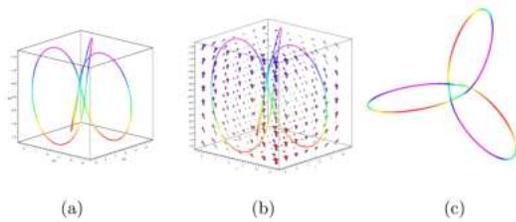


Figura 5. Representación tridimensional del sistema.

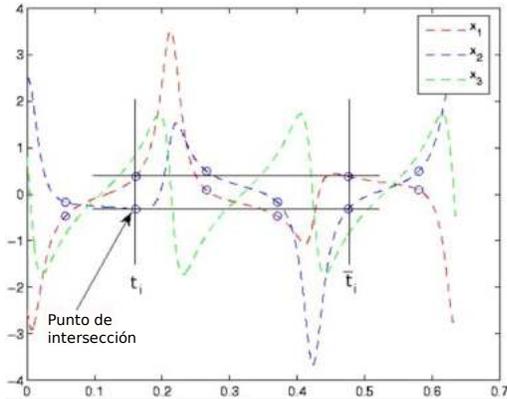


Figura 6. Periodo de análisis del sistema.

K =

-0.4700	-0.1700	-0.8600	0.0567
0.3800	-0.3200	0.8600	0.1612
0.0900	0.4900	-0.8600	0.2663
-0.4700	-0.1700	0.8700	0.3711
0.3800	-0.3200	-0.8600	0.4758
0.0900	0.4900	0.8600	0.5802

Los puntos anteriores se representan en la figura 7

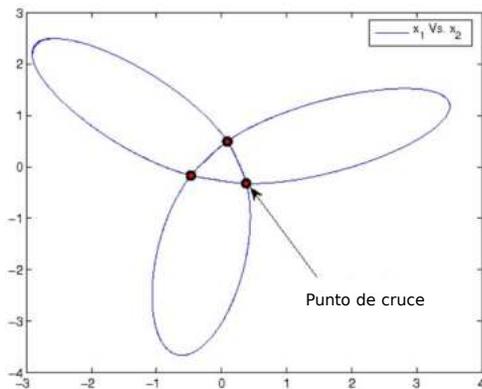


Figura 7. Puntos de cruce del sistema.

Posteriormente se utiliza una aplicación de análisis topológico tal como Regina Burton et al. (1999–2017) o

Kebap², lo cual arroja el invariante esperado para un nudo trébol: $t^2 - t + 1$.

3.2 Consideraciones

La principal consideración a tomar en cuenta es que el comportamiento del sistema debe de ser cíclico. El método falla cuando la trayectoria del sistema presenta intersecciones, sin embargo, este caso no se presenta en el sistema 1, debido a que vive en una superficie toroidal. Siempre y cuando los coeficientes m y n sean números enteros, el sistema de Parris genera un nudo toroidal propio.

En los casos en los cuales el inicio y el final del periodo no coinciden de manera perfecta, el nudo queda abierto, sin embargo es posible generar una “cerradura” para el nudo, de manera que se pueda llevar a cabo el análisis topológico del mismo.

Para el propósito del análisis de fallas, se propone que el cambio en los valores de los parámetros, cambiaría el comportamiento del sistema, lo cual sería detectable por medio del cambio de invariante del sistema.

3.3 Ejemplo práctico: diagnóstico de cardiopatías

En el sistema de salud, la prevalencia de enfermedades del corazón se caracteriza como una pandemia a nivel mundial. La identificación de cardiopatías presenta un rezago en su implementación.

El análisis de señales del corazón permite detectar anomalías en su desempeño, por lo que el uso del electrocardiograma es suficientemente difundido en clínicas a nivel global. Un filtrado previo de electrocardiogramas representaría un alivio a la carga de los especialistas, pudiendo centrar sus esfuerzos en aquellos casos que presentan alguna anomalía.

El método de análisis de señales por medio de teoría de nudos se aplicó a este problema, vease Rivas-Cisneros et al. (2014). Para llevar a cabo el estudio, se utilizó la base de datos de *Physionet*, Goldberger et al. (2000 (June 13)). El resultado del análisis para diversas señales relacionadas a cardiopatías detectó variaciones en el comportamiento normal del corazón. La figura 8 muestra una representación tridimensional de la información contenida en un electrocardiograma, la lectura corresponde a un paciente sano, el invariante asociado es el más sencillo, en la tabla de nudos es llamado el “no nudo”, es decir $\Gamma = 1$. Por otro lado, la figura 9 muestra el embebimiento tridimensional de un electrocardiograma para un paciente enfermo, el invariante del nudo en este caso es $\Gamma = t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 1$.

² En este caso se utilizó el paquete KEBAP, Software-Praktikums II group y Uni Hannover.

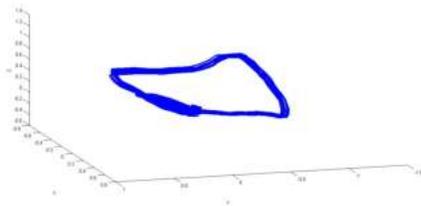


Figura 8. Representación tridimensional de un electrocardiograma, paciente sano.

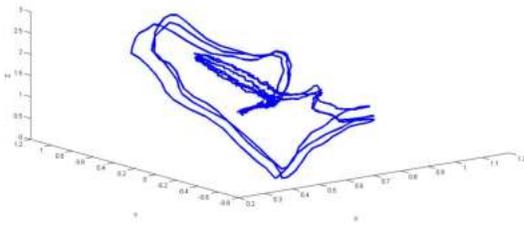


Figura 9. Representación tridimensional de un electrocardiograma, paciente con cardiopatía.

4. CONCLUSION

En este trabajo se presentó una herramienta que enriquece el estudio de sistemas en los cuales se pueden presentar fallas. Estas herramientas, tomadas de la topología, permiten asociar cambios en parámetros (es decir fallas en el sistema) a invariantes topológicos. Un cambio en la dinámica del sistema provoca un cambio en la estructura del invariante topológico. El enfoque propuesto es aplicable a sistemas de los cuales se puedan extraer trayectorias tridimensionales. El enfoque propuesto no pretende sustituir a las herramientas existentes en el diagnóstico de fallas sino que, mas bien, complementar la ya existentes y proporcionar alternativas para cuando no se dispone de modelos o cuando los modelos son de tal complejidad que los procedimientos conocidos no aplican.

4.1 Trabajos futuros

Se esta trabajando en la aplicacion de estos conceptos a sistemas industriales.

Agradecimientos:

El presente trabajo ha sido apoyado por el CONACyT México, a través del apoyo No. 166654, A1-5-31628.

REFERENCIAS

Adams, C.C. (1994). *The knot book an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. W. H. Freeman and Company, New York.
 Alcorta Garcia, E. and Frank, P.M. (1999). A novel design of structured observer-based residuals for fdi. In

Proceedings of the American Control Conference, 1341–1345. San Diego, Cal. USA.
 Alexander, J.W. (1928). Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2), 275–306. URL <http://www.jstor.org/stable/1989123>.
 Burton, B.A., Budney, R., Pettersson, W., et al. (1999–2017). Regina: Software for low-dimensional topology. <http://regina-normal.github.io/>.
 C. A. Hunter, P.C.M. (2001). Knot tied around an octahedral metal centre. *Nature.*, 411, 763.
 Chen, J. and Patton, R.J. (1999). *Robust model based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers Group.
 Chiang, L., Russell, E., and Braatz, R. (2001). *Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems*. Springer, Great Britain.
 Cromwell, P.R. (2004). *Knots and Links*. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511809767.
 Díaz Romero, D.A. (2007). *Knotted Dynamical Systems*. Ph.D. thesis, AC&SE, The University of Sheffield.
 Ding, S.X. (2013). *Model-based fault diagnosis techniques 2nd edition*. Springer, 2nd edition.
 Ding, S.X. (2014). *Data-driven Design of Fault Diagnosis and Fault-tolerant Control Systems*. Advances in Industrial Control. Springer, London.
 Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (en latín). *Comment. Acad. Sci. U. Petrop*, 8, 128–40. (Reimpreso en Opera Omnia Series Prima, Vol. 7. pp. 1-10, 1766).
 Frank, P.M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey. *Automatica*, 26, 459–474.
 Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., and Ocneanu, A. (1985). A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (12), 239–246. doi: 10.1090/s0273-0979-1985-15361-3.
 Goldberger, A.L., Amaral, L.A.N., Glass, L., Hausdorff, J.M., Ivanov, P.C., Mark, R.G., Mietus, J.E., Moody, G.B., Peng, C.K., and Stanley, H.E. (2000 (June 13)). PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, 101(23), e215–e220. Circulation Electronic Pages: <http://circ.ahajournals.org/content/101/23/e215.full> PMID:1085218; doi: 10.1161/01.CIR.101.23.e215.
 Isermann, R. (2006). *Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer, 1 edition.
 Jones, V.F.R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1), 103–111.
 Kauffman, L.H. (1987). State models and the jones polynomial. *Topology*, 26(3), 395 – 407. doi: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7).
 Kauffman, L.H. (1991). *Knots and physics*, volume 1 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co. Inc., River

- Edge, N.J. doi:10.1142/9789812796226. URL <http://dx.doi.org/10.1142/9789812796226>.
- Michelson, A.A. and Morley, E.W. (1887). On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, Series 3 Vol. 34(203), 333–345. doi:10.2475/ajs.s3-34.203.333.
- Olavarrieta, L., Martínez-Robles, M., Hernandez, P., Krimmer, D., and Schvartzman, J. (2002). Knotting dynamics during dna replication. *Molecular microbiology*, 46(3), 699–707.
- Oleg, L. and Fritz, V. (2005). Knotting and threading of molecules: Chemistry and chirality of molecular knots and their assemblies. *Angewandte Chemie International Edition*, 44(10), 1456–1477. Copyright 2005 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.
- Parris, R. (1977). A three-dimensional system with knotted trajectories. *The American Mathematical Monthly*, 84(6), 468–469.
- Perko, L. (2001). “*Differential equations and dynamical systems*”, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition.
- Rivas-Cisneros, D.E., Diaz-Romero, D.A., and Posadas-Castillo, C. (2014). Estudio y diagnóstico de patologías cardiacas utilizando teoría de nudos. In *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014*.
- Stewart, I. (1988). *Conceptos de matemática moderna*. Alianza Universidad.