

Seguimiento de Trayectoria de un Cuatrorotor con carga Suspendida

A. P. Mosco-Luciano, H. Rodríguez-Cortés, R. Castro-Linares.

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica
(e-mail: {alan.mosco, hrodriguez, rcastro}@cinvestav.mx)*

Resumen: Este artículo propone una estrategia de control no lineal para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en un cuatrorotor con una carga suspendida. El acoplamiento, a través de un término cuadrático, entre el ángulo de la carga y la dinámica lateral de la carga transportada por el cuatrorotor impide la aplicación de resultados de estabilidad para sistemas en cascada por lo que se recurre al estudio de la aproximación local de la dinámica en lazo cerrado. Se concluye estabilidad local asintótica bajo restricciones estándar sobre las trayectorias deseadas. Los resultados teóricos se validan por medio de simulaciones numéricas.

Keywords: Vehículo aéreo no tripulado, Control no lineal, carga suspendida .

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente existe un creciente interés en transporte de cargas utilizando vehículos aéreos no tripulados (VANT), tanto de ala fija como rotativa. Entre los vehículos de ala rotativa, destacan los multirotores. En la literatura se han reportado diversos enfoques para sujetar la carga al vehículo de transporte, dependiendo de la tarea a realizar. Por ejemplo, en (Mellinger et al., 2011) una garra sostiene la carga manteniéndola pegada al cuerpo del vehículo; el tipo de sujeción produce dificultades al aumentar la inercia rotacional del vehículo, limitando las maniobras de vuelo. Una segunda opción para transportar una carga, es suspenderla por medio de cables de uno o varios vehículos. El problema de seguimiento de trayectoria o regulación para un vehículo multirotor con carga suspendida se ha resuelto en la literatura utilizando diferentes enfoques de control. Por ejemplo, en (Guerrero-Sánchez et al., 2017) se considera un modelo dinámico con estructura Hamiltoniana con puertos y se propone una ley de control basada en la técnica IDA-PBC, limitado a resolver regulación de la carga. En (Sreenath et al., 2013) utilizan la propiedad de planitud del sistema híbrido para desarrollar un controlador no lineal, se paga el precio de imponer restricciones fuertes para la estabilidad del controlador. (Palunko et al., 2012) utilizan un enfoque de programación dinámica para generar trayectorias ágiles libres de oscilación sobre la carga, lo que resuelve el problema para ciertas trayectorias. Por otra parte (Pizetta et al., 2015) presentan una solución con un controlador por linealización exacta sin prueba de estabilidad del controlador propuesto. Otra técnica de control no lineal utilizada para resolver este problema es por modos deslizantes, presentada por (Kui et al., 2017). Otros problemas resueltos en este tipo de

sistemas es para el despegue autónomo del vehículo para la etapa de levantamiento de la carga, como se ve puede ver en (Cruz and Fierro, 2014). (Klausen et al., 2015) proponen una estrategia de control basada en backstepping de un modelo perturbado que elimina singularidades del modelo. Recientemente, (Zúñiga et al., 2018) proponen una estrategia no lineal que intenta atenuar las oscilaciones de la carga y extienden el resultado al caso de dos vehículos transportando la carga.

En este trabajo se propone una nueva estrategia de control no lineal para resolver el problema de seguimiento de trayectoria sobre la carga transportada por un vehículo cuatrorotor, basado en un modelo que aprovecha las características entre las fuerzas que interactúan sobre el cuatrorotor y la carga suspendida a través de un cable. La dinámica está descrita en el plano $X_e Z_e$ y la estructura que se obtiene permite proponer la estrategia de control. Se recurre al estudio de la aproximación local de la dinámica en lazo cerrado para concluir estabilidad local asintótica bajo restricciones estándar sobre las trayectorias deseadas, debido al acoplamiento de un término cuadrático presente entre el ángulo de la carga y la dinámica lateral de la carga transportada por el cuatrorotor. Este artículo se organiza de la siguiente forma. La primera sección presenta el modelo matemático, en el plano, de un vehículo cuatrorotor transportando una carga suspendida; el modelo se obtiene a partir de la segunda ley de Newton. En la segunda Sección se desarrolla la estrategia de control no lineal, con la cual se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias, y se presenta el análisis de estabilidad de la dinámica en lazo cerrado. La cuarta Sección contiene los resultados de simulación numérica. Finalmente, se presentan conclusiones sobre este trabajo.

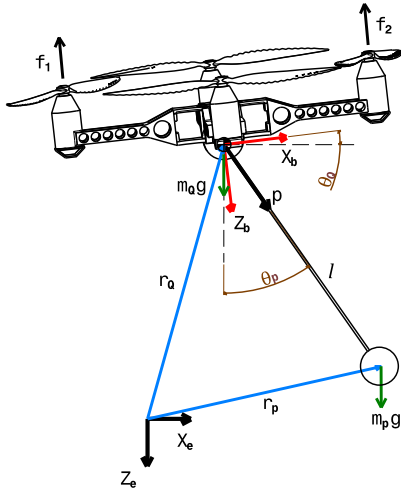


Figura 1. Cuatrirotor con carga en el plano $X_e Z_e$

2. MODELO DINÁMICO DE UN CUATRIROTOR CON CARGA SUSPENDIDA

Esta sección describe el modelo del cuatrirotor con carga suspendida. El modelo se obtiene a partir de la segunda Ley de Newton. El modelo final se escribe en una forma particular que explota las características de la fuerza de interacción entre el cuatrirotor y la carga suspendida. El modelo dinámico se obtiene bajo las suposiciones siguientes:

- 1) El cuerpo del vehículo es rígido e indeformable.
- 2) El cable no tiene masa y no se elonga.
- 3) El cable se conecta directamente en el centro de masa del cuatrirotor.
- 4) La masa colgante es puntual y los efectos aerodinámicos sobre ella son despreciables.

Considere un vehículo con una carga suspendida como el que se observa en la Figura 1. Nótese que las posiciones del cuatrirotor y de la masa se relacionan a través de la expresión:

$$r_Q = r_p - l\mathbf{p}, \quad (1)$$

dónde $r_Q = [x_Q \ 0 \ z_Q]^T$ es la posición del centro de masa del vehículo y $r_p = [x_p \ 0 \ z_p]^T$ es la posición de la masa suspendida, con respecto al marco inercial $X_e Z_e$. Además, l es la longitud del cable y \mathbf{p} es un vector unitario en la dirección de un vector que apunta del centro de masa del vehículo a la masa suspendida. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sin \theta_p \\ 0 \\ \cos \theta_p \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La segunda Ley de Newton para el cuatrirotor y la carga suspendida produce las ecuaciones siguientes

$$m_Q \ddot{r}_Q = -T_T R e_3^b + m_Q g e_3^e + T_{12}, \quad (3)$$

$$m_p \ddot{r}_p = m_p g e_3^e + T_{21}, \quad (4)$$

Dónde $T_T = f_1 + f_2$ es el empuje total generado por los rotores, con f_1 y f_2 el empuje de cada rotor. T_{ij} (con $i \neq j$) son las fuerzas de tensión presentes en el cable que une a ambos cuerpos. Los vectores e_3^b y e_3^e son vectores unitarios que apuntan sobre el eje z del marco de referencia del cuerpo y del marco de referencia de la tierra, respectivamente. R es la matriz de rotación que describe la orientación del marco de referencia del cuerpo $X_b Z_b$ relativo al marco de referencia de la tierra $X_e Z_e$. La matriz R tiene la forma siguiente

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_Q) & 0 & \sin(\theta_Q) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_Q) & 0 & \cos(\theta_Q) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Las ecuaciones (3) y (4) se reducen a partir de la igualdad $T_{12} = -T_{21}$, obteniéndose

$$m_Q \ddot{r}_Q + m_p \ddot{r}_p - (m_Q + m_p) g e_3 = -T_T R e_3. \quad (6)$$

La ecuación (1) permite expresar a (6) en función de \ddot{r}_p , como sigue,

$$(m_Q + m_p)(\ddot{r}_p - g e_3) = -T_T R e_3 + m_Q l \ddot{\mathbf{p}}. \quad (7)$$

La dinámica rotacional del cuatrirotor se describe mediante la ecuación de Euler. Al suponer el uso de una unión de tipo pasador ideal (Hughes, 2012), que permite la rotación del cable sin fricción, los momentos externos aplicados al vehículo se reducen a los generados por el empuje en los motores, permitiendo el desacoplamiento entre la dinámica rotacional del cuatrirotor y la del péndulo formado por el cable y la carga, de esta forma se tiene que

$$I \dot{\Omega}_Q + \Omega_Q \times I \Omega_Q = M^b, \quad (8)$$

donde I es la matriz de inercia del cuatrirotor, $\Omega_Q = [p \ q \ r]^T$ es la velocidad angular del vehículo y $M^b = [d(f_3 - f_4) \ d(f_1 - f_2) \ \kappa(f_1 - f_2 + f_3 - f_4)]^T$ siendo f_3 y f_4 los empujes de los rotores en el plano $Y_b Z_b$, κ una constante que relaciona al empuje producido con el momento de reacción y d la longitud de los brazos del cuatrirotor. La dinámica rotacional del cuatrirotor restringida al plano $X_e Z_e$ se simplifica como:

$$I_{yy} \ddot{\theta}_Q = d(f_1 - f_2) = M_y^b. \quad (9)$$

en donde I_{yy} es el momento de inercia rotacional sobre el eje Y_b , M_y^b es el momento producido por los motores en el plano

La dinámica de rotación del ángulo del péndulo θ_p se obtiene a partir de considerar que los productos cruz entre los vectores $l\mathbf{p}$ y T_{12} , T_{21} , al ser paralelos, es igual a cero, esto es,

$$l\mathbf{p} \times T_{12} = 0, \quad (10)$$

$$l\mathbf{p} \times T_{21} = 0. \quad (11)$$

Al sustituir (4) en (10) y considerando la ecuación (7), después de cálculos simples, se obtiene

$$m_Q l \mathbf{p} \times \ddot{\mathbf{p}} = T_T \mathbf{p} \times R e_3. \quad (12)$$

Finalmente,

$$m_Q l \ddot{\theta}_p = T_T \sin(\theta_Q - \theta_p). \quad (13)$$

Al ser \mathbf{p} un vector unitario, se tiene que las identidades siguientes se satisfacen

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{p}} &= -\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}, \\ \ddot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{p}(\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}) - \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \ddot{\mathbf{p}}).\end{aligned}\quad (14)$$

Al combinar las identidades en (14) con (12) se obtienen las dinámicas

$$(m_Q + m_p)(\ddot{r}_p - g e_3) = -(\mathbf{p} \cdot T_T R e_3 + m_Q l \dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}) \mathbf{p} \quad (15)$$

3. ESTRATEGIA DE CONTROL

Las ecuaciones (9), (13) y (15) describen el modelo dinámico de un cuatrirotor con carga suspendida. Estas ecuaciones pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_p &= -\frac{1}{m}(T_T c_{(\theta_Q - \theta_p)} + m_Q l \dot{\theta}_p^2) s_{\theta_p}, \\ \ddot{z}_p &= -\frac{1}{m}(T_T c_{(\theta_Q - \theta_p)} + m_Q l \dot{\theta}_p^2) c_{\theta_p} + g, \\ \ddot{\theta}_p &= \frac{T_T}{m_Q l} s_{(\theta_Q - \theta_p)}, \\ \ddot{\theta}_Q &= \frac{1}{I_{yy}} M_y^b.\end{aligned}\quad (16)$$

En donde $m = m_Q + m_p$, $c_{(\theta_Q - \theta_p)} = \cos(\theta_Q - \theta_p)$, $s_{(\theta_Q - \theta_p)} = \sin(\theta_Q - \theta_p)$, $s_{\theta_p} = \sin \theta_p$, $c_{\theta_p} = \cos \theta_p$.

El problema de control se establece como sigue. Considere a las trayectorias deseadas x_{pd} y z_{pd} para la posición de la masa suspendida. Se plantea entonces diseñar una estrategia de control para las entradas T_T y M_y^b de tal manera que la posición de la masa suspendida siga a las trayectorias deseadas.

Este problema puede solucionarse, para ciertas trayectorias, utilizando un control lineal. La linealización de (16) alrededor del punto de equilibrio en $x_p = z_p = \theta_p = \theta_Q = 0$, $T_T = (m_Q + m_p)g$, $M_y^b = 0$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{m_Q l} & 0 & \frac{mg}{m_Q l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} \end{bmatrix}$$

Al considerar que se pueden medir las posiciones, se tiene

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que el par (A,B) es controlable y el par (A,C) es observable, es trivial la construcción de un control por ADRC (Active Disturbance Rejection Control), como el propuesto en (Wang et al., 2016).

Es fácil observar que tomando como salida la posición de la masa suspendida se tiene que el grado relativo del sistema es $r = (2,2)$ y la matriz de desacoplamiento asociada es singular. Existen varios caminos para solucionar el problema. Uno de ellos es usar una extensión

dinámica para tener rango completo en la matriz de desacoplamiento (Isidori, 1995). Otro camino es utilizar el método propuesto en (Rodríguez et al., 2004) para evitar la extensión dinámica. En este trabajo se utiliza el método propuesto en (Rodríguez et al., 2004).

Considere los errores de seguimiento X_1 y Z_1 definidos como:

$$\begin{aligned}X_1 &= x_p - x_{pd}(t) \\ Z_1 &= z_p - z_{pd}(t)\end{aligned}$$

Entonces, la derivada con respecto al tiempo de los errores de seguimiento denotados por X_2 y Z_2 están dados por

$$\begin{aligned}X_2 &= \dot{X}_1 = \dot{x}_p - \dot{x}_{pd}(t) \\ Z_2 &= \dot{Z}_1 = \dot{z}_p - \dot{z}_{pd}(t)\end{aligned}$$

Es fácil ver que,

$$\dot{X}_2 = -\frac{1}{m}(T_T c_{(\theta_Q - \theta_p)} + m_Q l \dot{\theta}_p^2) s_{\theta_p} - \ddot{x}_{pd} \quad (17)$$

$$\dot{Z}_2 = -\frac{1}{m}(T_T c_{(\theta_Q - \theta_p)} + m_Q l \dot{\theta}_p^2) c_{\theta_p} + g - \ddot{z}_{pd} \quad (18)$$

Se diseña el control de la dinámica vertical en coordenadas del error de seguimiento basado en la ecuación (18). Se define a T_T como:

$$T_T = \frac{1}{c_{(\theta_Q - \theta_p)}} \left(-m_Q l \dot{\theta}_p^2 + \frac{m_Q + m_p}{c_{\theta_p}} \gamma_z \right) \quad (19)$$

donde $\gamma_z = v_z(Z_1, Z_2, t) + g - \ddot{z}_{pd}$ y v_z es la nueva entrada de control. La dinámica en lazo cerrado resultante es:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= -v_z(Z_1, Z_2, t) \\ \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -t_{\theta_p} \gamma_z - \ddot{x}_{pd} \\ \ddot{\theta}_p &= t_{(\theta_Q - \theta_p)} (-\dot{\theta}_p^2 + \frac{m}{m_Q l} \frac{\gamma_z}{c_{\theta_p}}) \\ \ddot{\theta}_Q &= \frac{1}{I_{yy}} M_y^b\end{aligned}\quad (20)$$

con $t_{\theta_p} = \tan \theta_p$ y $t_{(\theta_Q - \theta_p)} = \tan(\theta_Q - \theta_p)$.

Notar que ahora el grado relativo de X_1 es igual a 6 por lo que puede continuarse con la metodología propuesta en (Rodríguez et al., 2004). Sin embargo, es importante observar que el sistema en (20) tiene una estructura triangular superior. A partir de θ_p se puede controlar la dinámica de X_1 y X_2 mientras que por medio de θ_Q se puede controlar el comportamiento deseado para θ_p . Finalmente, M_y^b controla el comportamiento deseado para θ_Q . Por lo tanto, el control para X_1 se realiza siguiendo la técnica de backstepping (Khalil, 2002).

Considerando a θ_p como un control virtual para la dinámica de X_1 y X_2 se define

$$\theta_p^d = \arctan \left(\frac{v_x + \ddot{x}_{pd}}{\gamma_z} \right) \quad (21)$$

con v_x una nueva entrada de control. Nótese que el término γ_z en la ecuación (21) debe ser diferente de cero.

Es posible cumplir esta condición, si los términos \ddot{z}_{p_d} y v_z se diseñan de tal manera que

$$g > |v_z(Z_1, Z_2, t)| + |\ddot{z}_{p_d}| \quad (22)$$

Ya que la trayectoria deseada se define por diseño, se puede escoger a $|\ddot{z}_{p_d}|$ de tal manera que esté acotada como se requiera. El término v_z se diseña como un control acotado siguiendo a Kaliora and Astolfi (2004). Se propone a v_z de la forma

$$v_z = \frac{\epsilon_z}{2} \left[\tanh\left(\frac{2k_{z_1}}{\epsilon_z} Z_1\right) + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{4k_{z_2}}{\epsilon_z} Z_2\right) \right] \quad (23)$$

donde k_{z_1} , k_{z_2} son constantes reales positivas, con una adecuada selección de ϵ_z , se puede satisfacer la restricción de (22) para una cota superior de $|\ddot{z}_{p_d}|$.

El término v_x se define y acota de manera similar a (23).

$$v_x = \frac{\epsilon_x}{2} \left[\tanh\left(\frac{2k_{x_1}}{\epsilon_x} X_1\right) + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{4k_{x_2}}{\epsilon_x} X_2\right) \right] \quad (24)$$

Ahora, definiendo las variables del error Θ_{p_1} y Θ_{p_2} como sigue,

$$\begin{aligned} \Theta_{p_1} &= \theta_p - \theta_p^d(t) \\ \Theta_{p_2} &= \dot{\Theta}_{p_1} = \dot{\theta}_p - \dot{\theta}_p^d(t) \end{aligned}$$

de las definiciones anteriores se sigue que

$$\dot{\Theta}_{p_2} = t_{(\theta_Q - \theta_p)}(-\ddot{\theta}_p^d + \frac{m}{m_{Ql}} \frac{\gamma_z}{c_{\theta_p}}) - \ddot{\theta}_p^d \quad (25)$$

Tomando como entrada de control virtual a θ_Q , se tiene que

$$\theta_Q^d = \theta_p + \arctan\left(\frac{v_p + \ddot{\theta}_{p_d}}{-\dot{\theta}_p^d + \frac{m}{m_{Ql}} \frac{\gamma_z}{\cos(\theta_p)}}\right) \quad (26)$$

con $v_p = -k_{p_1}\Theta_{p_1} - k_{p_2}\Theta_{p_2}$, k_{p_1} , k_{p_2} son constantes reales positivas seleccionadas para hacer converger a cero a Θ_{p_1} y Θ_{p_2} . Finalmente, se definen los errores Θ_{Q_1} y Θ_{Q_2} como

$$\Theta_{Q_1} = \theta_Q - \theta_Q^d(t) \quad (27)$$

$$\Theta_{Q_2} = \dot{\Theta}_{Q_1} = \dot{\theta}_Q - \dot{\theta}_Q^d(t) \quad (28)$$

y se obtiene

$$\dot{\Theta}_{Q_2} = \frac{1}{I_{yy}} M_b - \ddot{\theta}_Q^d \quad (29)$$

Finalmente, se determina la entrada de control M_b como

$$M_b = I_{yy}(\ddot{\theta}_Q^d + v_Q) \quad (30)$$

con $v_Q = -k_{Q_1}\Theta_{Q_1} - k_{Q_2}\Theta_{Q_2}$, k_{Q_1} , k_{Q_2} son constantes reales positivas.

Observación 1. En los controles v_z , v_x , v_p , v_Q es posible adicionar una acción integral para aumentar la robustez del sistema hacia las incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas en una implementación.

El sistema completo en lazo cerrado resulta,

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= -\frac{\epsilon}{2} \tanh\left(\frac{2k_{z_2} Z_2}{\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{4} \tanh\left(\frac{4k_{z_1} Z_1}{\epsilon}\right) \\ \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -v_x - [t_{(\Theta_{p_1} + \theta_{p_d})} - t_{\theta_{p_d}}](g - \ddot{z}_{p_d} + v_z) \\ \dot{\Theta}_{p_1} &= \Theta_{p_2} \\ \dot{\Theta}_{p_2} &= v_p + [t_{(\Theta_{Q_1} + \theta_{Q_d} - \Theta_{p_1} - \theta_{p_d})} - t_{(\Theta_{Q_d} - \Theta_{p_1} - \theta_{p_d})}] \\ &\quad \left[-(\Theta_{p_2} + \dot{\theta}_{p_d})^2 + \frac{a[g - \ddot{z}_{p_d} + v_z]}{c_{(\Theta_{p_1} + \theta_{p_d})}} \right] \\ \dot{\Theta}_{Q_1} &= \Theta_{Q_2} \\ \dot{\Theta}_{Q_2} &= -k_{Q_1}\Theta_{Q_1} - k_{Q_2}\Theta_{Q_2} \end{aligned} \quad (31)$$

con

$$\begin{aligned} t_{(\Theta_{p_1} + \theta_{p_d})} &= \tan(\Theta_{p_1} + \theta_{p_d}) \\ t_{(\Theta_{Q_1} + \theta_{Q_d} - \Theta_{p_1} - \theta_{p_d})} &= \tan(\Theta_{Q_1} + \theta_{Q_d} - \Theta_{p_1} - \theta_{p_d}) \end{aligned}$$

Observación 2. Notar que el término de interconexión en la dinámica del error del ángulo de la carga contiene un término cuadrático. Este término cuadrático impide la aplicación de resultados de estabilidad para sistemas en cascada. Es importante mencionar que pagando el precio de tener un controlador con mayor complejidad, el método propuesto en (Rodriguez et al., 2004) si permite desacoplar a la dinámica vertical de la dinámica lateral.

Proposición. Asuma que todos los estados del sistema (31) son medibles. Asuma que los parámetros físicos del sistema (31) se conocen. Entonces, existen ganancias k_{x_1} , k_{x_2} , k_{z_1} , k_{z_2} , k_{p_1} , k_{p_2} , k_{Q_1} , k_{Q_2} tales que el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable en el conjunto

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}\}$$

con $\mathcal{X} = \{x_p, \dot{x}_p, z_p, \dot{z}_p, \theta_p, \dot{\theta}_p, \theta_Q, \dot{\theta}_Q\}$.

Prueba. El sistema en lazo cerrado (31) tiene un punto de equilibrio aislado en $e^* = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, con $e = [Z_1 \ Z_2 \ X_1 \ X_2 \ \Theta_{p_1} \ \Theta_{p_2} \ \Theta_{Q_1} \ \Theta_{Q_2}]^T$. Ahora, una aproximación lineal del sistema (31) alrededor del punto de equilibrio deseado es obtenida mediante la serie de Taylor,

$$\Delta \dot{e} = A(t)\Delta e \quad (32)$$

en donde $\Delta e = e - e^*$ y e^* es el error de equilibrio. La matriz $A(t)$ es variante en el tiempo porque la trayectoria deseada varía en el tiempo.

La matriz $A(t)$ se puede descomponer en dos matrices como sigue,

$$A(t) = A_1 + A_2(t) \quad (33)$$

donde $A_2(t)$ contiene los términos que varían en el tiempo, mientras que A_1 contiene los términos de las ganancias, que no evolucionan en el tiempo. Estas son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{z_1} & -k_{z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_x k_{x_1} & -\epsilon_x k_{x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{p_1} & -k_{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{Q_1} & -k_{Q_2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$f_1 = \frac{(\ddot{z}_{p_d} - g)^2 + \ddot{x}_{p_d}^2}{\ddot{z}_{p_d} - g}$$

$$f_2 = f(\ddot{x}_{p_d}, \ddot{z}_{p_d}, x_{p_d}^{(3)}, z_{p_d}^{(3)}, x_{p_d}^{(4)}, z_{p_d}^{(4)}, t)$$

del teorema en (Rugh, 1996), suponga que la ecuación de estado lineal $\dot{x} = A(t)x(t)$ es uniformemente exponencialmente estable, y existe una constante finita tal que $\|A(t)\| \leq \alpha$ para todo t . Entonces existe una constante positiva β tal que la ecuación lineal del estado

$$\dot{z}(t) = [A(t) + F(t)]z(t) \quad (36)$$

es uniformemente exponencialmente estable si $\|F(t)\| \leq \beta$, para toda t . Entonces, la matriz $A_2(t)$ necesita ser uniformemente estable. La matriz A_2 es continuamente diferenciable y $\|A_2(t)\|$ es calculada como (Lewis et al., 1993).

$$\|A_2(t)\| = \sqrt{\lambda_{max}(A_2(t)^T A_2(t))} \quad (37)$$

Los valores propios de $A_2(t)^T A_2(t)$, se calculan a partir de su polinomio característico, esto es:

$$\det(\lambda I - A_2(t)^T A_2(t)) = \lambda^8 - (f_1^2 + f_2^2)\lambda^7 + f_2^2 f_1^2 \lambda^6 = \lambda^6 (f_2^2 - \lambda)(f_1^2 - \lambda) \quad (38)$$

Por lo que se tienen seis valores propios acotados iguales a cero, y dos restantes dependen de los estados deseados para la posición en x_p, z_p y de sus derivadas.

La cota de la matriz se identifica en las simulaciones numéricas, por la complejidad de los términos de $f_2(t)$.

4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Se muestra el resultado de la simulación numérica del control propuesto en la sección 3. Los parámetros utilizados para realizar la simulación numérica se muestran en la tabla (1). El seguimiento de trayectoria se realiza para una trayectoria parabólica de la forma $x_p = a \sin(\frac{2\pi t}{P})$, $z_p = -x_p^2$. Con $a = 2$ y $p = 10$. Para unas condiciones iniciales $x_p = -1$ m, $z_p = -2$ m. Teniendo los parámetros

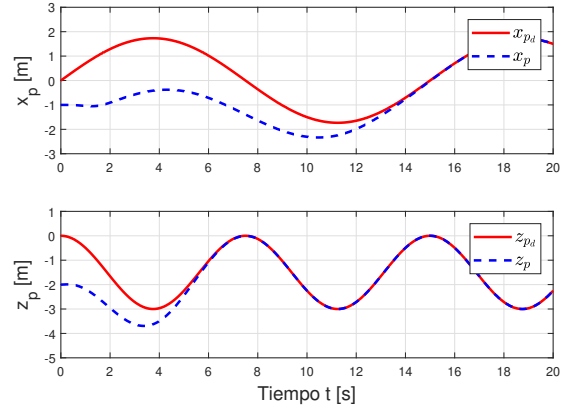


Figura 2. Seguimiento de la posición x_p, z_p

del controlador en la tabla (2). La figura (2) muestra el seguimiento de la trayectoria planeada para las posiciones x_p, z_p y en la figura (3) se observan primero los errores de seguimiento de los ángulos θ_Q y θ_p , además están los valores propios identificados en el análisis de estabilidad, lo que se obtiene de este resultado numérico es que la cota sobre $\|A_2\|$ tiene un valor de 26.61 para este caso de estudio. En la figura (4), se pueden observar las magnitudes tanto del empuje de los motores T_T , como de los momentos sobre el cuatrirotor M_b^y , los cuales permanecen dentro de valores aceptables, a pesar de comenzar en una condición inicial suficientemente separada del valor de equilibrio. Finalmente, la figura (5) muestra claramente el movimiento sobre el plano $X_e Z_e$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un controlador basado en el modelo del sistema cuatrirotor con carga suspendida para el plano $X_e Z_e$, que logra resolver el problema de seguimiento de trayectorias planificadas directamente para la carga transportada por el cuatrirotor. La trayectoria parabólica presentada permite ver el cumplimiento de la tarea de seguimiento de esta estrategia de control con condiciones iniciales diferentes de las de equilibrio. La estructura que toma el sistema en lazo cerrado deja ver

Tabla 1. Parámetros del sistema

Constante	Valor	Unidad
m_Q	1	Kg
m_p	0.255	Kg
I_{yy}	0.177	$N \cdot m$
l	0.5	m
g	9.81	m/s^2

Tabla 2. Parámetros del controlador

Constante	Valor	Constante	Valor
k_{x_1}	7.0	k_{p_1}	8.5
k_{x_2}	7.5	k_{p_2}	9.5
k_{z_1}	7.5	k_{Q_1}	11
k_{z_2}	8.5	k_{Q_2}	12
ϵ_z	8.5	ϵ_x	6.5

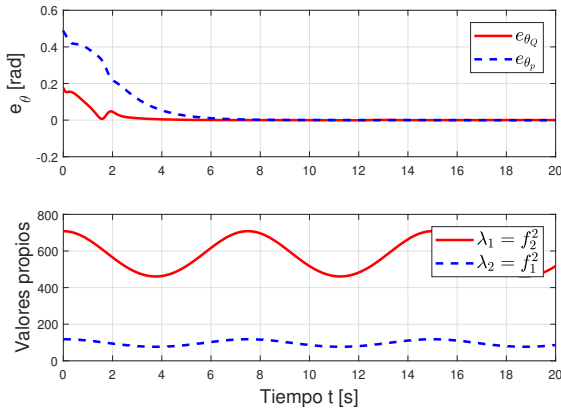


Figura 3. Seguimiento de la posición θ_p , θ_Q

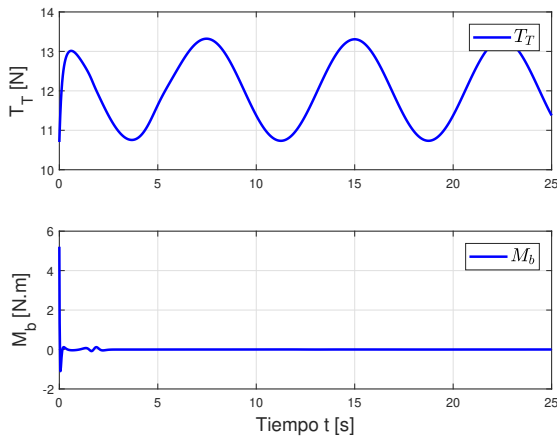


Figura 4. Empuje T_T y Momento M_b de control

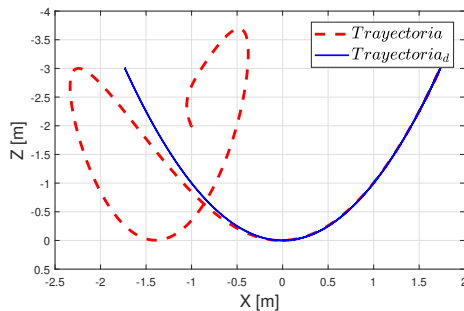


Figura 5. Trayectoria parabólica en el plano

que es necesario que la dinámica de orientación del cuadrirotor y del péndulo, a través de la sintonización deban ser más rápidas para converger a los estados deseados y las perturbaciones endógenas se cancelen.

REFERENCIAS

Cruz, P. and Fierro, R. (2014). Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*.

- Guerrero-Sánchez, M.E., Mercado-Ravell, D.A., Lozano, R., and García-Beltrán, C.D. (2017). Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload. *ISA transactions*, 68, 433–449.
- Hughes, P.C. (2012). *Spacecraft attitude dynamics*. Courier Corporation.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3rd edition.
- Kaliora, G. and Astolfi, A. (2004). Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11), 1975–1990.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Klausen, K., Fossen, T.I., and Johansen, T.A. (2015). Nonlinear control of a multirotor uav with suspended load. In *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 176–184.
- Kui, Y., Feng, G., Liying, Y., Yuqing, H., and Jianda, H. (2017). Sliding mode control for a quadrotor slung load system. In *2017 36th Chinese Control Conference*.
- Lewis, F., Abdallah, C., and Dawson, D. (1993). *Control of robot manipulators*. Macmillan Pub. Co.
- Mellinger, D., Lindsey, Q., Shomin, M., and Kumar, V. (2011). Design, modeling, estimation and control for aerial grasping and manipulation. In *2011 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*.
- Palunko, I., Fierro, R., and Cruz, P. (2012). Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach. In *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2691–2697.
- Pizetta, I.H.B., Brandão, A.S., and Sarcinelli-Filho, M. (2015). Modelling and control of a pvtl quadrotor carrying a suspended load. In *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*.
- Rodriguez, H., Astolfi, A., and Ortega, R. (2004). On the construction of static stabilizers and static output trackers for dynamically linearizable systems, related results and applications. In *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*, volume 3, 2960–2965 Vol.3.
- Rugh, W.J. (1996). *Linear system theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2nd ed. edition.
- Sreenath, K., Michael, N., and Kumar, V. (2013). Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load—a differentially-flat hybrid system. In *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4888–4895. IEEE.
- Wang, H., Huang, Y., and Xu, C. (2016). Adrc methodology for a quadrotor uav transporting hanged payload. In *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, 1641–1646.
- Zúñiga, N.S., Muñoz, F., Márquez, M.A., Espinoza, E.S., and Carrillo, L.R.G. (2018). Load transportation using single and multiple quadrotor aerial vehicles with swing load attenuation. *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 269–278.