

Generación de Auto-Oscilaciones en un Carro-Péndulo por el Método de Dos-Relevadores *

Luis T. Aguilar * José Antonio Ortega Pérez *
Alejandra Ferreira de Loza ** Rosalba Galván Guerra ***

* Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310 Col. Nueva Tijuana, Tijuana, B.C., 22435 (e-mail: laguilarb@ipn.mx; jortega@citedi.mx).

** Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310 Col. Nueva Tijuana, Tijuana, B.C., 22435 (e-mail: dferreira@citedi.mx).

*** Instituto Politécnico Nacional, Carretera Pachuca-Actopan, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, 42162 (e-mail: rgalvang@ipn.mx).

Resumen: La solución al problema de estabilización orbital de sistemas subactuados alrededor del punto de equilibrio inestable es una tarea complicada e interesante. En este artículo, se resolverá el problema de control de movimiento del carro-péndulo invertido. El movimiento periódico será alrededor del punto de equilibrio superior que es inestable en lazo abierto. Se utilizará la metodología de dos relevadores para resolver el problema complementado con la técnica de función descriptiva para sintonizar las ganancias del controlador tal que se obtenga la frecuencia y amplitud deseada. Los resultados experimentales demuestran que el control de dos relevadores resuelve el problema de estabilización orbital alrededor del punto de interés.

Palabras clave: Auto-oscilaciones, control de dos relevadores, sistemas subactuados, estabilización orbital.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de estabilización orbital, para sistemas mecánicos no lineales, es un problema interesante a resolver cuando se trata de sistemas subactuados forzados a operar alrededor de su punto de equilibrio que es inestable en lazo abierto. Entre los retos de estabilización orbital se pueden encontrar robots bípedos, robots caminantes (Plestan et al., 2003), robots con cuatro patas (Provancher et al., 2011) y robots en forma de víboras (Kelasidi et al., 2016; Mohammadi et al., 2016).

El desfaseamiento y seguimiento preciso de una trayectoria explican entre otros el porqué la estabilización orbital resulta ser atractiva con respecto a la planeación de trayectorias (Pchelkin et al., 2017) en robots industriales pero principalmente en sistemas mecánicos subactuados. El método de restricciones virtuales holonómicas (Shiriaev et al., 2006; Wang et al., 2018) es una reconocida estrategia para la planeación de movimientos y la estabilización orbital de sistemas subactuados. Algunas aplicaciones recientes de esa metodología se pueden encontrar por ejemplo en Griffin y Grizzle (2017) y Wang et al. (2019). Por

* Luis T. Aguilar agradece al CONACYT por el apoyo brindado a través del proyecto 285279.

otro lado, Berkemeier y Fearing (1999) propusieron un algoritmo de control para derivar un conjunto exacto de trayectorias de las ecuaciones de movimiento no lineal que involucran movimiento periódico inverso y su aplicación en un robot subactuado de dos grados de libertad.

En este artículo se hará uso de un método alternativo para inducir auto-oscilaciones en sistemas subactuados llamado *controlador de dos relevadores* (Aguilar et al., 2015). Esta idea se basa en la teoría de estructura variable combinada con la función descriptiva, lugar geométrico de un sistema relevado perturbado (Boiko, 2009), o mapas de Poincaré para sintonizar la frecuencia y la amplitud a través de dos ganancias. La importancia de esta idea es la simplicidad en su implementación, sin embargo, en la literatura solo se han reportado aplicaciones en el péndulo de Furuta (Aguilar et al., 2015, Chap. 7) y en la rueda inercial (Aguilar et al., 2017; Galván et al., 2018).

En este artículo se presenta la síntesis, análisis y resultados experimentales para la estabilización orbital de un carro-péndulo cuyo principal problema reside en el desplazamiento horizontal restringido. El carro-péndulo consiste de una barra montada sobre un carro de tal manera que la barra pueda balancearse libremente en el plano vertical. Se debe señalar que en el sistema del carro-péndulo hay

un actuador que produce el movimiento horizontal del carro que a su vez induce el movimiento en la barra. Dado que estamos interesados en el movimiento periódico de la barra en la posición vertical superior, se incorpora un controlador lineal por asignación de polos para dar un cierto grado de robustez al sistema sobre el intervalo de tiempo antes de que el movimiento periódico inicie.

Notación. El símbolo I_n denota la matriz identidad de orden n . El símbolo \mathbb{R} define el conjunto de los números reales y \mathbb{R}^n define el espacio Euclidiano de dimensión n . Una matriz A de $n \times m$ con elementos definidos en \mathbb{R} será donotada por $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

2. MODELO DINÁMICO Y OBJETIVO DE CONTROL

El modelo dinámico de un carro péndulo, tomado de INTECO (2017), es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_3 &= f_1(x) + \frac{a_1 k_1}{b - \cos^2(x_2)} u, \\ \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_4 &= f_2(x) + \frac{k_1 \cos(x_2)}{b - \cos^2(x_2)} u, \end{aligned} \quad (1)$$

con

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{[g \sin(x_2) - k_3 x_4] \cos(x_2) - a_1 [x_4^2 \sin(x_2) + k_2 x_3]}{b - \cos^2(x_2)}, \\ f_2(x) &= \frac{a_2 [g \sin(x_2) - k_3 x_4] - [x_4^2 \sin(x_2) + k_2 x_3] \cos(x_2)}{b - \cos^2(x_2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{J_p}{ml}, & a_2 &= \frac{1}{l}, & b &= \frac{J_p}{ml^2}, \\ k_1 &= \frac{p_1}{ml}, & k_2 &= \frac{f_c - p_2}{ml}, & k_3 &= \frac{f_p}{ml}. \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ son los estados, $x_1(t) \in \mathbb{R}$ es la posición del carro, $x_2(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo entre la vertical y el péndulo, $x_3(t) \in \mathbb{R}$ y $x_4(t) \in \mathbb{R}$ representan la velocidad del carro y del péndulo, respectivamente; y $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el tiempo. Nótese que puede ocurrir una singularidad cuando $b = \cos^2(x_2)$, sin embargo, el parámetro positivo b es por lo general más grande que uno, entonces las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y las funciones de entrada en (1) son continuamente diferenciables.

El parámetro $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la constante gravitacional, la masa total del péndulo y del carro está denotada por m , l es la distancia del eje de rotación del péndulo al centro de masa del sistema, J_p es el momento de inercia del péndulo con respecto a su eje en el carro. Los coeficientes de fricción viscosa del carro y del péndulo se denotan respectivamente como f_p y f_c . Finalmente, p_1 y p_2 son las constantes de fuerza de control.

2.1 Objetivo de Control

Sea $z(t) = h(x) \in \mathbb{R}$ la salida donde las oscilaciones deben ocurrir donde $h_1(x)$ es una función continua. La idea es sintetizar la ley de control $u(t)$ tal que la salida $z(t)$ exhiba una solución periódica, esto es,

$$z(t) = z(t + T), \quad (4)$$

donde $T = 1/\Omega$ es el periodo y Ω es la frecuencia deseada.

3. METODOLOGÍA DE DOS RELEVADORES

Cónsiderese el siguiente sistema lineal autónomo libre de perturbaciones

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u} \quad (5)$$

$$z = C_1 x \quad (6)$$

$$y = C_2 x \quad (7)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la salida medible, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control que forza a la variable escalar $z(t) \in \mathbb{R}$ a ser periódica, y A , B , C_1 y C_2 son matrices de dimensiones apropiadas. Por simplicidad, asúmase que los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ están disponibles para retroalimentación, es decir, $C_2 = I_n$ y el par (A, B) es controlable.

Consideraremos la solución al problema de generación de auto-oscilaciones en la salida $z(t) \in \mathbb{R}$, y por lo tanto se asume que no existe una señal de referencia externa a seguir. Además, se hacen las siguientes suposiciones sobre (5)–(7) a lo largo del artículo.

Suposición 1. La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz y no tiene polos en el eje imaginario.

Suposición 2. El sistema (5)–(6) tiene grado relativo mayor que uno con respecto a la salida $z(t)$.

La suposición 1 implica que el movimiento periódico en la salida (6) y (7) son solo generadas por la entrada conmutada $\bar{u}(t)$. La suposición 2 se refiere a que el controlador de dos relevadores tiene dos parámetros independientes $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, tal que los cambios en esos parámetros resultan en cambios en la respectiva frecuencia Ω y en la amplitud a_p de las auto-oscilaciones auto-excitadas.

Proposición 1. La entrada de control con dos relevadores

$$\bar{u}(t) = -c_1 \text{sign}(z) - c_2 \text{sign}(\dot{z}) \quad (8)$$

se propone con el fin de excitar un movimiento periódico en la salida (6). Los parámetros escalares c_1 y c_2 se diseñan tal que la salida periódica $z(t)$ tenga una frecuencia Ω y una amplitud a_p deseada.

Demostración. La prueba de estabilidad orbital para sistemas lineales invariantes en el tiempo se encuentra en (Aguilar et al., 2015, Cap. 2). ■

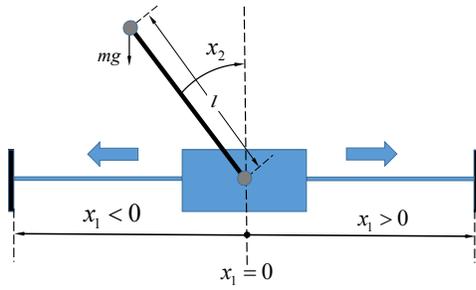


Fig. 1. Representación esquemática del carro-péndulo.

3.1 Diseño de Ganancias por Función Descriptiva

Las ganancias c_1 y c_2 de (8) son parámetros escalares diseñados tal que la salida $z(t)$ sea periódica con frecuencia Ω y amplitud a_p deseada. Las fórmulas para encontrar dichas ganancias se basan en el método de función descriptiva, tomadas de (Aguilar et al., 2015), son

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{a_p}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_2 \cup Q_3 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{a_p}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{en otra parte,} \end{cases} \quad (9)$$

$$c_2 = \xi \cdot c_1, \quad (10)$$

donde $W(j\omega) = C_1(j\omega I - A)^{-1}B$ es la correspondiente función de transferencia de (5) y (6), $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, ξ viene dado por la relación

$$\xi = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}, \quad (11)$$

y los cuadrantes Q_1, \dots, Q_4 están definidos como

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} \geq 0\} \\ Q_2 &= \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} \geq 0\} \\ Q_3 &= \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} < 0\} \\ Q_4 &= \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} < 0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Nótese que existe una similitud entre el controlador (8) y el controlador Twisting (Levant, 2003) que es un controlador por modos deslizantes de segundo orden. La diferencia radica principalmente en que este último se utiliza para robustecer el sistema en lazo cerrado ante perturbaciones acopladas y además la ganancia c_1 debe ser estrictamente mayor que c_2 para garantizar estabilidad en tiempo finito. Bajo la metodología presentada aquí y bajo el supuesto que $c_1 > c_2$, entonces la salida presentaría una frecuencia muy alta y una amplitud baja que se le conoce normalmente como fenómeno de *chattering*.

En la siguiente sección se presentará el procedimiento para poder aplicar la metodología de dos relevadores en el carro-péndulo.

4. GENERACIÓN DE AUTO-OSCILACIONES EN EL PÉNDULO INVERTIDO

En esta sección, mostraremos como usar la metodología de la sección anterior en el carro-péndulo invertido para satisfacer (4).

Primero, representemos el sistema (1)–(3) en la siguiente forma generalizada

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = C_2x, \quad (13)$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1 k_1}{b - \cos^2(x_2)} \\ \frac{k_1 \cos(x_2)}{b - \cos^2(x_2)} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

En virtud de que estamos interesados en la oscilación del péndulo, la variable virtual $z(t)$ se define como

$$z(t) = x_2(t). \quad (15)$$

Nótese que la suposición 2 se cumple dado que el grado relativo de $z(t)$ con respecto a la entrada $u(t)$ es dos.

4.1 Linealización

El primer paso para la síntesis del controlador de dos relevadores es transformar el modelo de la planta (1)–(3) en la forma lineal (5). El modelo lineal local del péndulo invertido se obtiene a través del Jacobiano evaluado en el origen, que corresponde a la posición superior del péndulo, donde las matrices A , B y C_1 son las siguientes

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{b-1} & -\frac{a_1 k_2}{b-1} & -\frac{k_3}{b-1} \\ 0 & \frac{a_2 g}{b-1} & -\frac{k_2}{b-1} & -\frac{a_2 k_3}{b-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$B = g(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1 k_1}{b-1} \\ \frac{k_1}{b-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad C_2 = I_4. \quad (18)$$

Bajo los parámetros dados en la Tabla 1, el par (A, B) es controlable, sin embargo la matriz A no es Hurwitz. Entonces proponemos la siguiente entrada de control

$$u = -Kx + \bar{u} \quad (19)$$

donde la matriz de ganancias K debe seleccionarse de tal manera que $A - BK$ satisfaga la suposición 1. En consecuencia, la función de transferencia para calcular

Tabla 1. Parámetros de la planta

Parámetro	Valor	Unidades
l	0.011	m
m	0.872	Kg
f_p	6.65×10^{-5}	Ns/rad
f_c	0.5	Ns/m
J_p	0.00292	Kgm ²
p_1	9.4	N
p_2	-0.548	Ns/m

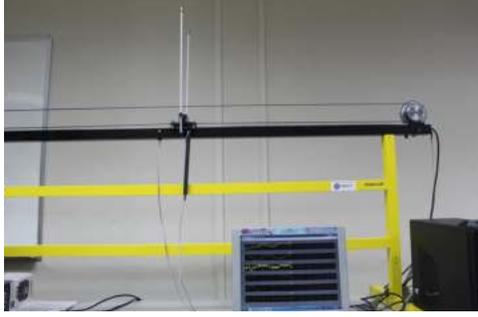


Fig. 2. Carro-péndulo usado en los experimentos.

las ganancias (9)–(10) del controlador de dos relevadores viene dado por

$$W(j\omega) = C_1(j\omega I_n - A + BK)^{-1}B. \quad (20)$$

En aplicaciones reales, es difícil colocar y mantener el péndulo en su posición vertical hacia arriba antes de que las oscilaciones ocurran. Por lo tanto necesitamos garantizar que el punto de equilibrio, que es inestable en lazo abierto, sea asintóticamente estable en lazo cerrado (13)–(19) cuando $\bar{u} = 0$ al menos en un intervalo de tiempo inicial.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

Se realizaron los experimentos en el carro péndulo fabricado por *Inteco*[®] (véase Fig. 2). La plataforma consiste de una barra montada sobre un carro de tal manera que la barra pueda balancearse libremente en el plano vertical. El carro se manipula a través de un motor de corriente directa. El carro-péndulo utiliza dos sensores de posición de 4096 pulsos por revolución para detectar la posición y el ángulo. La longitud del riel es de dos metros. El controlador se implementa usando *Matlab/Simulink*[®] que corre en una computadora personal con procesador Core i7 de séptima generación. El periodo de muestreo se fija en 0.01 s. Los valores de las constantes de los parámetros físicos (3) usados en el modelo se presentan en la Tabla 1.

5.1 Resultados Numéricos

Con el fin de ilustrar y corroborar los resultados presentados a lo largo del artículo se presentan verificaciones numéricas bajo condiciones ideales, es decir, sin perturbaciones ni ruido en las mediciones, parámetros perfectamente conocidos y sin restricciones en el par aplicado.

Las condiciones iniciales son $x_1(0) = 0.01$ m, $x_2(0) = 0$ rad, $x_3(0) = 0$ m/s y $x_4(0) = 0$ rad/s. La matriz de ganancias

$$K = [-0.7737 \ 4.3189 \ -1.0231 \ 0.8097] \quad (21)$$

se diseñó para fijar los polos de lazo cerrado de la planta en $s_1 = -2$, $s_2 = -3$, $s_3 = -5$ y $s_4 = -7$.

La Figura 3 muestra los resultados numéricos del sistema de lazo cerrado (13)–(15), (19) manipulado por el control de dos relevadores

$$\bar{u} = -c_1 \text{sign}(x_2) - c_2 \text{sign}(x_4), \quad (22)$$

donde $c_1 = c_2 = -1$ fueron seleccionados de manera arbitraria. La Figura 3(a) muestra el movimiento periódico del péndulo con una amplitud de 0.7 rad y una frecuencia $\omega = 5.6$ rad/s. La Figura 3(b) muestra el movimiento del carro donde se resalta que los límites del riel no se exceden. La Figura 3(c) ilustra la señal de control (19). En la Figura 4(a), Fig. 4(b) y Fig. 4(c) se muestra otro conjunto de resultados numéricos bajo $c_1 = 1$ y $c_2 = -0.2$ donde se obtiene una frecuencia de $\omega = 3.14$ rad/s y una amplitud $a_p = 0.6$ rad. Obsérvese que el carro tampoco sobrepasa los límites señalados.

Para fines de comparación, establecemos $a_p = 0.7$ y $\Omega = 5.6$ rad/s como amplitud y frecuencia deseada, respectivamente. La correspondiente función de transferencia del modelo de la planta con el controlador estabilizante es

$$W(j\omega) = \frac{31.883s^2}{s^4 + 17s^3 + 101s^2 + 247s + 210}, \quad s = j\omega, \quad (23)$$

donde $\text{Re}\{W(j\Omega)\} = 0.3053$ y $j \text{Im}\{W(j\Omega)\} = -j0.2479$. En la figura 5 se muestra el diagrama de Nyquist. Entonces, aplicando las fórmulas (9)–(10), se obtienen $c_1 = -1.08$ y $c_2 = -0.8810$. Para una frecuencia deseada $\Omega = 3.14$ rad/s y amplitud deseada $a_p = 0.6$ rad se obtiene que $\text{Re}\{W(j\Omega)\} = 0.4036$ y $j \text{Im}\{W(j\Omega)\} = j0.4036$, y después de aplicar nuevamente las fórmulas (9)–(10) se llega a que $c_1 = 0.9463$ y $c_2 = -0.3423$.

Nótese que existe una discrepancia numérica entre el valor real y el valor calculado de las ganancias. Esto se debe a las imprecisiones del método de función descriptiva debido a las truncaciones impuestas en los coeficientes de Fourier a la primer armónica de la señal periódica. El método de diseño de Poincaré resulta ser más preciso pero más complejo en su cálculo y se deja para trabajo futuro.

5.2 Resultados Experimentales

Se realizaron dos experimentos.

Experimento 1. La Figura 6(a) muestra los resultados experimentales del movimiento periódico del péndulo, con $c_1 = c_2 = -0.15$ obteniéndose una amplitud de 0.1 rad y una frecuencia $\omega = 7.4$ rad/s. La Figura 6(b) muestra el movimiento del carro donde se resalta que los límites

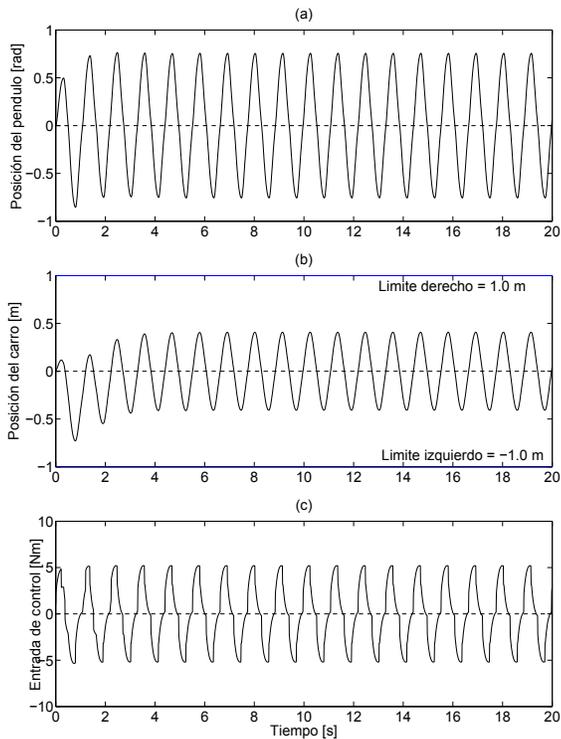


Fig. 3. Simulaciones numéricas bajo $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. (a) Posición angular del péndulo, (b) posición lineal del carro y (c) entrada de control.

del riel no se exceden. La Figura 6(c) ilustra la señal de control (19).

Experimento 2. En la Figura 7(a), Fig. 7(b) y Fig. 7(c) se muestra otro conjunto de resultados numéricos bajo $c_1 = 0.20$ y $c_2 = 0.20$ donde se obtiene una frecuencia de $\omega = 7.2$ rad/s y una amplitud $a_p = 0.25$ rad. Obsérvese que el carro tampoco sobrepasa sus límites.

6. CONCLUSIONES

En este artículo, se ha presentando la solución al problema de estabilización orbital para un carro péndulo invertido usando la metodología de dos relevadores. De manera similar a Aguilar et al. (2015), se genera el movimiento periódico del péndulo en la posición vertical y alrededor del punto de equilibrio que es inestable para el sistema no forzado. Los estudios numéricos y experimentales permitieron corroborar el rendimiento del sistema de lazo cerrado. La metodología permite extender los resultados a una clase de sistemas subactuados de grado relativo uno. Sin embargo, muchas aplicaciones del mundo real son sistemas con un grado de subactuación mayor que uno, lo cual es un tema interesante para futuros trabajos.

REFERENCIAS

Aguilar, L., Boiko, I., Fridman, L., and Iriarte, R. (2015). *Self-Oscillations in Dynamic Systems—A New Methodology via Two-Relay Controllers*. Birkhäuser, London.

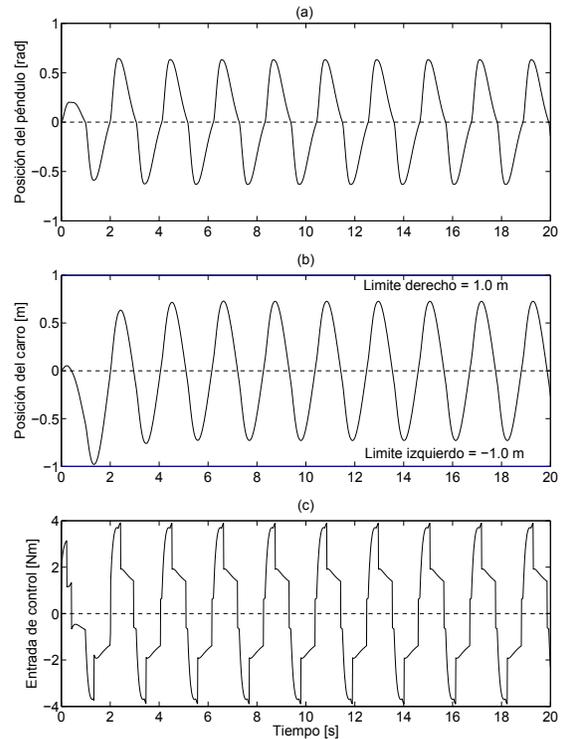


Fig. 4. Simulaciones numéricas bajo $c_1 = 1$ y $c_2 = -0.2$. (a) Posición angular del péndulo, (b) posición lineal del carro y (c) entrada de control.

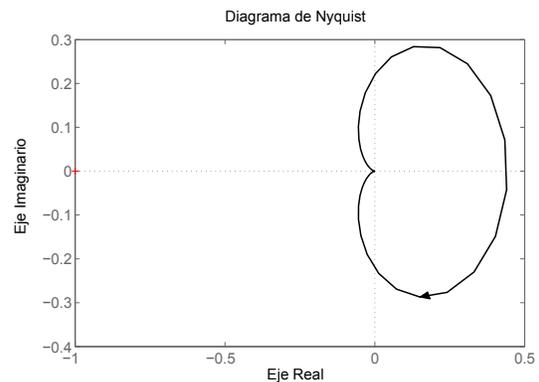


Fig. 5. Diagrama de Nyquist de la función de transferencia (23).

Aguilar, L., Iriarte, R., and Orlov, Y. (2017). Variable structure tracking control-observer for perturbed inertia wheel pendulum via position measurements. In *IFAC World Congress*, 7412–7417. IFAC, Toulouse, France.

Berkemeier, M.D. and Fearing, R.S. (1999). Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobat. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(4), 740–750.

Boiko, I. (2009). *Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design*. Birkhäuser,

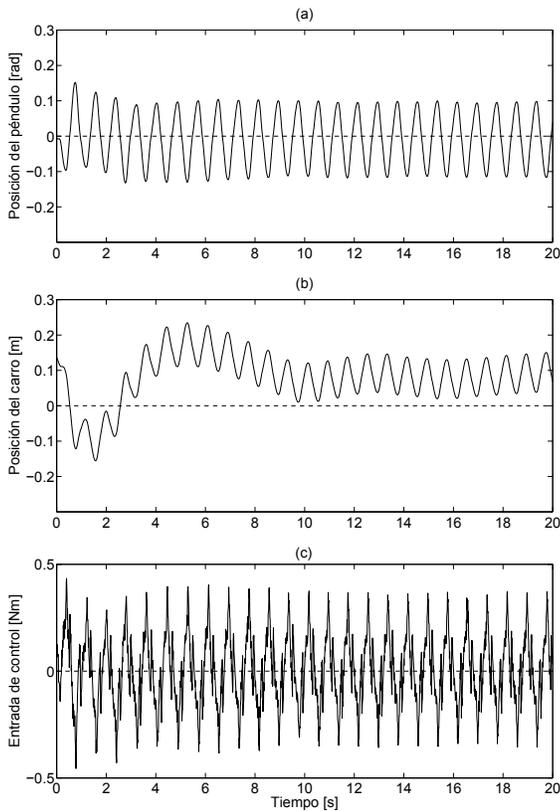


Fig. 6. Resultados experimentales bajo $c_1 = 0.15$ y $c_2 = 0.15$. (a) Posición angular del péndulo, (b) posición lineal del carro y (c) entrada de control.

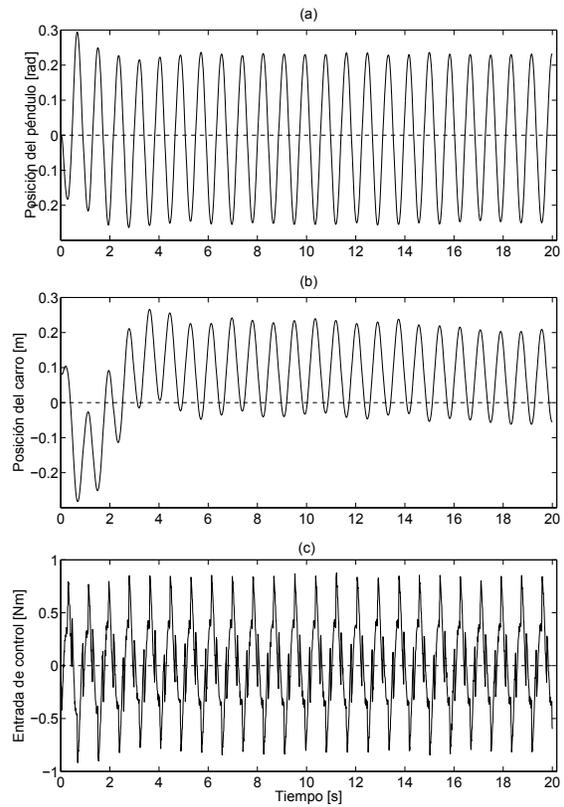


Fig. 7. Resultados experimentales bajo $c_1 = 0.20$ y $c_2 = 0.20$. (a) Posición angular del péndulo, (b) posición lineal del carro y (c) entrada de control.

London.

- Galván, R., Velázquez, J., and Fridman, L. (2018). Finite-time continuous robust generation of self-oscillation: a switched approach. In *57th IEEE Conference on Decision and Control*, 5951–5956. Miami, USA.
- Griffin, B. and Grizzle, J. (2017). Nonholonomic virtual constraints and gait optimization for robust walking control. *The International Journal of Robotics Research*, 36(8), 895–922.
- INTECO (2017). *Pendulum-Cart System—User’s Manual*. INTECO, Krakow, Poland.
- Kelasidi, E., Liljeback, P., Pettersen, K., and Gravdahl, J. (2016). Innovation in underwater robots: Biologically inspired swimming snake robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 23(1), 44–62.
- Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(11), 924–941.
- Mohammadi, A., Rezapour, E., Maggiore, M., and Pettersen, K. (2016). Maneuvering control of planar snake robots using virtual holonomic constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(3), 884–899.
- Pchelkin, S.S., Shiriaev, A.S., Robertsson, A., Freidovich, L.B., Kolyubin, S.A., Paramonov, L.V., and Gusev, S.V. (2017). On orbital stabilization for industrial

manipulators: Case study in evaluating performances of modified PD+ and inverse dynamics controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(1), 101–117.

- Plestan, F., Grizzle, J., Westervelt, E., and Abba, G. (2003). Stable walking of a 7-DOF biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4), 653–668.
- Provancher, W., Jensen-Segal, S., and Fehlberg, M. (2011). ROCR: An energy-efficient dynamic wall-climbing robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 16(5), 897–906.
- Shiriaev, A., Robertsson, A., Perram, J., and Sandberg, A. (2006). Periodic motion planning for virtually constrained euler-lagrange systems. *Systems and Control Letters*, 55(11), 900–907.
- Wang, Z., Freidovich, L., and Zhang, H. (2019). Periodic motion planning and control for double rotary pendulum via virtual holonomic constraints. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1), 291–298.
- Wang, Z., Freidovich, L.B., and Zhang, H. (2018). Periodic motion planning and control for underactuated mechanical systems. *International Journal of Control*, 91(6), 1350–1362.