

# Control Homogéneo No-Lineal para Estabilización en Tiempo-Finito de Sistemas de Alto Orden <sup>\*</sup>

Jesús Mendoza-Ávila <sup>\*</sup> Jaime A. Moreno <sup>\*\*</sup> Leonid Fridman <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Facultad de ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, 04510, Mexico. (e-mail: [jesus.menav.14@gmail.com](mailto:jesus.menav.14@gmail.com), [lfridman@unam.mx](mailto:lfridman@unam.mx))

<sup>\*\*</sup> Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, 04510, Mexico (e-mail: [JMorenoP@ii.unam.mx](mailto:JMorenoP@ii.unam.mx))

---

Resumen: En este artículo se presenta una familia de controladores homogéneos no-lineales, los cuales son capaces de proveer estabilidad en tiempo-finito para las trayectorias de un sistema. Además, considerando el enfoque de Formas Generalizadas para el diseño de funciones de Lyapunov, se realiza la prueba de estabilidad y el diseño de ganancias para dichos controladores. Finalmente, se muestra resultados de simulación donde se verifica la eficacia de los controladores propuestos para lograr que la posición de un robot-péndulo alcance y siga una trayectoria deseada.

*Keywords:* Control no lineal, Funciones de Lyapunov, Homogeneidad, Convergencia en tiempo-finito.

---

## 1. INTRODUCTION

Uno de los principales objetivos en la teoría de control es el diseño de leyes de control por realimentación de estados tales que la salida de un sistema dinámico tenga un comportamiento deseado. Las técnicas de control lineal (Chen, 1999; Skogestad y Postlethwaite, 2007) han sido ampliamente desarrolladas debido a que tienen un excelente desempeño y existen metodologías bien estructuradas para el diseño de ganancias y pruebas de estabilidad.

Por otro lado, el control no lineal (Slotine y Li, 1991) permite lidiar con una variedad de problemas más amplia como incertidumbre en los sistemas ó análisis de comportamiento altamente no lineales (fricción de Coulomb, saturación, histéresis, etc.). Sin embargo, en muchos casos no existe una metodología clara para el diseño de controladores no lineales y su análisis puede llegar a ser muy complejo.

Los controladores homogéneos (controladores descritos por funciones homogénea) son una familia de controladores no lineales que tiene características interesantes como tasas de convergencia no asintótica, robustez y escalamiento de las variables. Existen en la literatura

varios resultados acerca del diseño de controladores homogéneos (Bhat y Bernstein, 1997; Levant, 2005; Sánchez y Moreno, 2016; Cruz-Zavala y Moreno, 2017; Mercado-Uribe y Moreno, 2017; Sanchez y Moreno, 2019) donde se aprovechan las propiedades homogéneas de los algoritmos para el diseño y análisis.

En (Sánchez y Moreno, 2016; Sanchez y Moreno, 2019) se presenta el enfoque de formas generalizadas (FG) para el diseño de funciones de Lyapunov (FL) para sistemas homogéneos. Esta metodología consiste en seleccionar polinomios  $r$ -homogéneos generalizados (conocidos como FG) como funciones candidatas de Lyapunov (FCL), y se describe un procedimiento sistemático para probar que la FCL es definida positiva y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es definida negativa. Esto último se analiza mediante métodos clásicos de polinomios como el teorema de Pólya (Pólya, 1928) o la solución de un problema de suma de cuadrados (SOS) (Parrilo, 2000).

En el presente escrito, se propone un familia de controladores homogéneos no lineales capaces de proveer convergencia en tiempo-finito para las trayectorias de un sistema. Utilizando la metodología de FG para el diseño de FL presentado en (Sánchez y Moreno, 2016), se realiza la prueba de estabilidad y selección de ganancias de los controladores de orden  $n \leq 4$ . Finalmente, se muestra un ejemplo de simulación de la implementación de los controladores propuestos para seguimiento de trayectorias de los estados de un Robot-péndulo.

---

<sup>\*</sup> Los autores agradecen el financiamiento otorgado por CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) proyectos 241171, 282013 y CVU 711867; por PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) IN 115419 y IN 110719; y por el programa DGAPA PASPA, Fondo de Colaboración del II-FI UNAM IISGBAS-100-2015.

El resto del artículo tiene la siguiente estructura. En la Sección 2 se presenta algunas definiciones y resultados interesantes relacionados con este trabajo. Los resultados principales de este artículo se presentan en la Sección 3. En la Sección 4 se muestra un ejemplo de simulación de los controladores propuestos en un Robot-péndulo. Finalmente, algunas conclusiones sobre este trabajo son expuestas en la Sección 5.

## 2. PRELIMINARES

El conjunto de los números reales se representa por  $\mathbb{R}$ , y el conjunto de los reales positivos se denota como  $\mathbb{R}_+$  i.e.  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ . Además,  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}$  denotan los conjuntos de los números naturales y racionales, respectivamente. La función *signo* se define como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0, \\ 0; & x = 0, \\ -1; & x < 0, \end{cases}$$

Para una variable  $x \in \mathbb{R}$  y un número  $\gamma \in \mathbb{R}$ , las expresiones de la forma  $|x|^\gamma \text{sign}(x)$  son escritas de forma compacta como  $[x]^\gamma$ , e.g.  $[x]^{\frac{1}{2}} \equiv |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x)$ . En el caso que  $\gamma$  es impar se tiene que  $|x|^\gamma \text{sign}(x) = x^\gamma$  e.g.  $|x|^3 \text{sign}(x) = x^3$ . Además, un caso especial se tiene cuando  $\gamma = 0$  tal que  $[x]^0 = \text{sign}(x)$ .

### 2.1 Homogeneidad

Seguendo los trabajos de (Zubov, 1964; Bacciotti y Rosier, 2005; Efimov et al., 2018), para un conjunto de números reales estrictamente positivos  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) llamados pesos y  $\lambda > 0$ , se define:

- el vector de pesos  $r = (r_1, \dots, r_n)^T$ ,  $r_{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} r_j$  y  $r_{\min} = \min_{1 \leq j \leq n} r_j$ ;
- la matriz de dilatación  $\Lambda_r(\lambda) = \text{diag}(\lambda^{r_i})_{i=1}^n$ , tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y para todo  $\lambda > 0$ ,  $\Lambda_r(\lambda)x = (\lambda^{r_1}x_1, \dots, \lambda^{r_i}x_i, \dots, \lambda^{r_n}x_n)^T$ ;
- la norma  $r$ -homogénea de  $x \in \mathbb{R}^n$  está dada por  $\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{r}{r_i}}\right)^{\frac{1}{r}}$  para  $\rho \geq r_{\max}$ ;
- para  $s > 0$ , la esfera y la bola definidas bajo la norma homogénea están dadas por  $S_r(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_r = s\}$  y  $B_r(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_r \leq s\}$ , respectivamente.

*Definición 1.* Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $r$ -homogénea de grado  $\nu \in \mathbb{R}$  si para todo  $\lambda > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$V(\Lambda_r(\lambda)x) = \lambda^\nu V(x).$$

Un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $r$ -homogéneo de grado  $\nu \in \mathbb{R}$ , con  $\nu \geq -r_{\min}$ , si para todo  $\lambda > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$f(\Lambda_r(\lambda)x) = \lambda^\nu \Lambda_r(\lambda)f(x),$$

los cual es equivalente a decir que la  $i$ -ésima componente de  $f$  es una función  $r$ -homogénea de grado  $r_i + \nu$ .

Un sistema  $\dot{x} = f(x)$  es  $r$ -homogéneo de grado  $\nu$  si y solo si  $f$  lo es.

### 2.2 Estabilidad

Seguendo los trabajos de (Bacciotti y Rosier, 2005; Khalil, 2002; Efimov et al., 2018; Levant et al., 2016), sea  $\Omega$  una vecindad abierta del origen de un sistema  $\dot{x} = f(x)$ . El origen de dicho sistema es llamado

- Estable en el sentido de Lyapunov si las soluciones  $X(t, x_0)$  están definidas para todo  $t \geq 0$  y para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier  $x_0 \in \Omega$  si  $\|x_0\| < \delta$  entonces  $\|X(t, x_0)\| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
- Asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y, además, existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, x_0)\| = 0$  para cada  $x_0 \in \Omega$  con  $\|x_0\|_A < \delta_0$ . Además, el origen es llamado global y asintóticamente estable si  $\delta_0$  puede ser arbitrariamente grande.
- Estable en tiempo-finito (global) si es estable en el sentido de Lyapunov y convergente en tiempo-finito desde  $x_0 \in \Omega$  ( $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ), i.e., para cualquier  $x_0 \in \Omega$  existe  $0 \leq T < +\infty$  tal que  $X(t, x_0) = 0$ ,  $\forall t \geq T$ . La función  $\mathcal{T}(x_0) = \inf\{T \geq 0 : X(t, x_0) = 0, \forall t \geq T\}$  es llamado tiempo de asentamiento.

Para un sistema  $\dot{x} = f(x)$  que es  $r$ -homogéneo de grado  $\nu$  y asintóticamente estable al origen, existe una función de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , suave y  $r$ -homogénea de grado  $\mu > -\nu$ , que satisface

$$a\|x\|_r^\mu \leq V(x) \leq b\|x\|_r^\mu, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{V}(x) \leq -cV^{1+\frac{\nu}{\mu}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

para algunos  $0 < a \leq b$  y  $c > 0$  (Rosier, 1992; Zubov, 1964).

Además, para sistemas  $r$ -homogéneos se tiene que su velocidad de convergencia puede ser evaluada de forma cualitativa con base en su grado de homogeneidad.

*Teorema 1.* ((Nakamura et al., 2002)) Si un sistema  $\dot{x} = f(x)$  es  $r$ -homogéneo de grado  $\nu$  y asintóticamente estable al origen entonces él es

- global y en tiempo-finito estable al origen si  $\nu < 0$
- global y exponencialmente estable al origen si  $\nu = 0$
- global y en tiempo-fijo estable con respecto a una bola unitaria  $B_r(1)$  si  $\nu > 0$ .

### 2.3 Formas generalizadas

Las FG's fueron presentadas en (Sánchez y Moreno, 2016; Sanchez y Moreno, 2019) como una generalización de las formas clásicas, i.e., polinomios  $r$ -homogéneos de grado  $p \in \mathbb{N}$  donde  $r = [1, \dots, 1]$ . Por otra parte, una función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una FG si es  $r$ -homogénea de grado  $\mu \in \mathbb{R}$ , con pesos  $r = [r_1, \dots, r_n]$ ,  $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ , y consiste de una combinación lineal de un número finito de monomios homogéneos del mismo grado. Estos monomios son productos de términos  $[x_i]^p$  ó  $|x_i|^q$ , donde  $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ . Las FG's tienen propiedades importantes, e.g., las derivadas parciales de una FG son también FG's; para el mismo  $r$ , las sumas o productos de FG's son también FG's. Además, para  $r \in \mathbb{Q}^n$ , una FG puede ser

representada en cada hiper-octante del espacio de estados por medio de una forma clásica, por lo tanto, la definición positiva de las FG's puede ser estudiada por medio de métodos clásicos para polinomios, e.g., Teorema de Pólya (Pólya, 1928) o suma de cuadrados (SOS, por sus siglas en inglés) (Parrilo, 2000) (para más detalles, ver (Sánchez y Moreno, 2016; Sanchez y Moreno, 2019)).

Las FG's pueden ser usadas como FL para cierta clase de sistemas cuyo campo vectorial es descrito por medio de FG's. La metodología de diseño de FL por medio de FG's es ampliamente descrita en (Sánchez y Moreno, 2016; Sanchez y Moreno, 2019) y puede ser resumida en los siguientes pasos:

- Considerando el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y las componentes  $f_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  son FG, obtener su grado de homogeneidad  $\nu$  y el vector de pesos  $r$ .
- Proponer una FG  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de grado de homogeneidad  $\mu$  y vector de pesos  $r$ , como FCL dada por:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|^{\frac{\mu}{r_i}} + P(\alpha_j, x), \quad j > n, \quad (1)$$

donde  $P(\alpha_j, x)$  consiste de términos cruzados con coeficientes  $\alpha_j$ .

- Calcular la derivada de la FCL como

$$W(x) = -\dot{V}(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x).$$

Por la propiedades de las FG's se tiene que  $W(x)$  es también una FG.

- Aplicar un cambio de variables adecuado de  $x$  a  $z$  para transformar las formas generalizadas  $V(x)$  y  $W(x)$  en los conjuntos de formas clásicas  $V(z)$  y  $W(z)$ .
- Determinar los coeficientes de  $V$  y los parámetros del sistema tal que los conjuntos de formas  $V(z)$  y  $W(z)$  sean definidos positivos. Esto se puede lograr a través del Teorema de Pólya o métodos SOS.
- Si cada forma de los conjuntos  $V(z)$  y  $W(z)$  es definida positiva entonces la FG  $V(x)$  también lo es y se prueba que es una FL para el sistema considerado en el primer punto.

En el presente trabajo, dicha tarea será tratada por medio de los métodos de SOS, particularmente, utilizando la herramienta SOSTOOLS en MATLAB (ver Prajna et al. (2002)). Este programa está diseñado para encontrar los coeficientes de formas cuadráticas mediante la solución de desigualdades matriciales.

Una de las principales ventajas del enfoque de FG para el diseño de FL es que ofrece un procedimiento sistemático para probar que las FCL son positivas definidas.

### 3. CONTROL NO LINEAL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS HOMOGÉNEA

Considere el siguiente sistema dado por una cadena de integradores de orden  $n$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  son las variables de estado y  $u \in \mathbb{R}$  es una entrada de control.

Para lograr estabilidad en tiempo-finito del origen del sistema (2) se propone la siguiente ley de control

$$u = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{n+1}} - \dots - k_n [x_n]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

donde las constantes  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}_+$  son parámetros de diseño.

El sistema en lazo cerrado (2)-(3) esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -k_1 [x_1]^{\frac{1}{n+1}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{n}} - \dots - k_n [x_n]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

el cual es  $r$ -homogéneo de grado  $\nu = -1$  con pesos  $r = [n+1, n, n-1, \dots, 2]$ . Como el sistema (4) es homogéneo de grado negativo, si su origen es asintóticamente estable entonces, por el Teorema 1, se puede concluir convergencia en tiempo-finito de sus trayectorias al origen.

Se puede observar que las ecuaciones del sistema (4) corresponden a la familia de FG. Por lo tanto, para probar la estabilidad del origen del sistema (4) se puede emplear enfoque de FG para el de diseño de FL. Sin embargo, tal metodología tiene dos principales limitaciones. Primero, se tiene que proponer una FCL adecuada de la forma (1) donde no es claro como seleccionar los términos cruzados  $P(\alpha_j, x)$  y el número de combinaciones podría ser infinito. Por otro lado, el cálculo de los coeficientes de la FL se realiza por medio de la solución de desigualdades matriciales pero, para ordenes  $n$  arbitrariamente grandes, los algoritmos computacionales que resuelven dichas desigualdades pierden precisión debido al tamaño de las matrices.

El primer problema puede ser resuelto aplicando un caso particular de la idea de selección de FCL presentada en (Mendoza-Avila et al., 2017). De la estructura del sistema (4) se puede observar que este contiene un sistema similar pero de orden  $n-1$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -k_2 [x_2]^{\frac{1}{n}} - \dots - k_n [x_n]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo tanto, una FCL  $V(x)$  ( $r$ -homogénea de grado  $\mu$ ) para el sistema (4) puede ser construida de la forma

$$V(x) = V_{n-1}(x) + P_n(\alpha_j, x) + \alpha_1 |x_1|^{\frac{\mu}{n+1}}, \quad (6)$$

donde  $V_{n-1}(x)$  es una FL para el sistema (5) y  $P_n(\alpha_j, x)$  son algunos términos cruzados extra a elegir de forma heurística. A pesar que dicha idea no resuelve completamente el problema de la selección de los términos cruzados  $P(\alpha_j, x)$ , si disminuye los grados de libertad en la construcción de una FCL para el sistema (4).

De manera similar, la FL  $V_{n-1}(x)$  del sistema (5) puede ser obtenida a partir de una FL  $V_{n-2}(x)$  de un sub-sistema de orden  $n - 2$ .

Por lo tanto, empezando por construir una FL  $V_2(x)$  para un sistema de orden dos

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -k_{n-1}[x_{n-1}]^{\frac{1}{3}} - k_n[x_n]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

de manera recursiva, se pueden obtener FL para sistemas como (4) de orden  $n$  arbitrario.

*Observación 1.* Un punto importante en la construcción de la FCL (6) es que el grado de homogeneidad  $\mu$  debe ser igual tanto para la función  $V_{n-1}(x)$  como para los términos cruzados  $P_n(\alpha_j, x)$ . Además, este grado de homogeneidad debe ser apropiado para el sistema (4) de orden  $n$  con vector de pesos  $r$ .

*Teorema 2.* Sea el sistema (4) con  $n \leq 4$ . Existen ganancias  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}_+$  tales que las trayectorias del sistema en lazo cerrado (4) convergen a cero globalmente y en tiempo-finito.

La prueba de el teorema 2 se presenta en las siguientes sub-secciones.

*Observación 2.* El caso de  $n = 1$  es trivial, i.e., el sistema  $\dot{x} = -k[x]^{\frac{1}{2}}$  es estable para todo  $k > 0$ .

### 3.1 Orden dos

Considere el sistema de orden  $n = 2$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (7)$$

Se propone la FCL

$$V_2(x) = \alpha_1|x_1|^3 + \alpha_2|x_2|^{\frac{9}{2}} + \alpha_3[x_1]^{\frac{7}{3}}x_2.\quad (8)$$

Se define la función  $W_2(x) = -\dot{V}_2(x)$ . Aplicando la metodología de FG descrita en la sub-sección 2.3, se tiene que tanto la  $V_2(x)$  como  $W_2(x)$  son definidas positivas con las ganancias

$$k_1 = 6, \quad k_2 = 8.5,\quad (9)$$

y los coeficientes

$$\alpha_1 = 33.61, \quad \alpha_2 = 4.084, \quad \alpha_3 = 7.354.\quad (10)$$

Por lo tanto, se prueba que la FG (8) es una FL para el sistema (7) con las ganancias  $k_i$  dadas por (9).

### 3.2 Orden tres

Par el caso de orden  $n = 3$ , se tiene el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{4}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (11)$$

A partir de (6) donde  $V_{n-1}(x)$  está dada por (8), se propone la FCL

$$\begin{aligned}V_3(x) &= \alpha_1|x_1|^{\frac{9}{4}} + \alpha_2|x_2|^3 + \alpha_3|x_3|^{\frac{9}{2}} \\ &+ \alpha_4[x_1]^{\frac{3}{2}}x_2 + \alpha_5[x_1]^{\frac{7}{4}}x_3 + \alpha_6[x_2]^{\frac{7}{3}}x_3.\end{aligned}\quad (12)$$

Se define la función  $W_3(x) = -\dot{V}_3(x)$ . Aplicando la metodología de FG descrita en la sub-sección 2.3, se prueba

que tanto  $V_3(x)$  como  $W_3(x)$  son definidas positivas con las ganancias

$$k_1 = 2.7, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = 8.5,\quad (13)$$

y los coeficientes

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 130.1, & \alpha_2 &= 539.1, & \alpha_3 &= 36.07, \\ \alpha_4 &= 199.4, & \alpha_5 &= 13.63, & \alpha_6 &= 149.6.\end{aligned}$$

Por lo tanto se prueba que la FG (12) es una FL para el sistema (11) con las ganancias  $k_i$  dadas por (13).

### 3.3 Orden cuatro

Se el sistema de orden  $n = 4$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{5}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{4}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{3}} - k_4[x_4]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (14)$$

A partir de (6) donde  $V_{n-1}(x)$  está dada por(12), se propone la FCL

$$\begin{aligned}V_4(x) &= \alpha_1|x_1|^{\frac{9}{5}} + \alpha_2|x_2|^{\frac{9}{4}} + \alpha_3|x_3|^3 + \alpha_4|x_4|^{\frac{9}{2}} \\ &+ \alpha_5x_1x_2 + \alpha_6[x_1]^{\frac{6}{5}}x_3 + \alpha_7[x_1]^{\frac{7}{5}}x_4 \\ &+ \alpha_8[x_2]^{\frac{3}{2}}x_3 + \alpha_9[x_2]^{\frac{7}{4}}x_4 + \alpha_{10}[x_3]^{\frac{7}{3}}x_4 \\ &+ \alpha_{11}[x_3]^2[x_4]^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\quad (15)$$

Se define la función  $W_4(x) = -\dot{V}_4(x)$ . Aplicando la metodología de FG descrita en la sub-sección 2.3, se verifica que tanto  $V_4(x)$  como  $W_4(x)$  son definidas positivas con las ganancias

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2.7, \quad k_3 = 6, \quad k_4 = 8.5,\quad (16)$$

y los coeficientes

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 234.7, & \alpha_2 &= 51255, & \alpha_3 &= 1137000, & \alpha_4 &= 49488, \\ \alpha_5 &= 713.5, & \alpha_6 &= 232.6, & \alpha_7 &= 3.288, & \alpha_8 &= 77522, \\ \alpha_9 &= 2818, & \alpha_{10} &= 127700, & \alpha_{11} &= 125800.\end{aligned}$$

Por lo tanto se prueba que la FG (15) es una FL para el sistema (14) con las ganancias  $k_i$  dadas por (16).

## 4. EJEMPLO DE SIMULACIÓN: ROBOT-PÉNDULO

En esta sección se presentan un ejemplo de la implementación de los controladores propuestos en un sistema Robot-péndulo. El diagrama esquemático del sistema se muestra en la Figura 1b donde  $\theta$  es el promedio de la posición angular de las ruedas,  $\psi$  representa el ángulo de inclinación con respecto al eje vertical y  $\phi$  es el ángulo de rotación alrededor del eje vertical. Además, el sistema tiene como entradas  $u_r$  y  $u_l$  que son la tensión aplicada al motor de cada rueda.

El modelo matemático no lineal del sistema Robot-péndulo y los valores de los parámetros se presentan en el manual de usuarios (INTECO, 2015). Cuando el Robot-péndulo está en posición vertical, su dinámica es aproximada por el siguiente modelo lineal

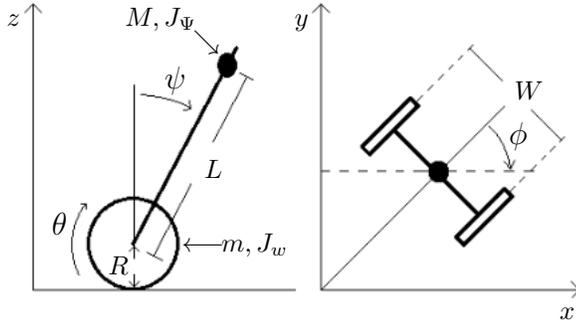
$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad (17)$$

$$y = Cx.$$

donde



(a) Fotografía tomada del manual de usuarios (INTECO, 2015)



(b) Diagrama esquemático.

Figura 1. Robot-péndulo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0723 & -43.7248 & -0.0723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.028 & 43.7301 & -0.028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1124 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.0902 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.8086 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1.2186 \end{bmatrix},$$

donde  $x = [\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}]^T$  es el vector de estados y las entradas  $u = [u_1 u_2]^T$  están dadas por  $u_1 = \frac{1}{2}u_r + \frac{1}{2}u_l$  y  $u_2 = \frac{1}{2}u_r - \frac{1}{2}u_l$  donde  $u_r$  y  $u_l$  representan el voltaje aplicado al motor de cada rueda.

Se puede observar que el sistema (17) está formado por dos sub-sistemas desacoplados. El primero de cuarto orden, formado por los estados  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  y la entrada de control  $u_1$ , el cual representa la dinámica de un carro-péndulo. El segundo sub-sistema es de segundo orden y representa la dinámica de un robot diferencial dada por los estados  $x_5$  y  $x_6$  y la entrada de control  $u_2$ . Este desacoplamiento se puede observar también en el esquema de la Figura 1b.

El objetivo de control es lograr seguimiento de las trayectorias  $r_1 = 2 \sin(\frac{\pi}{20}t - \frac{\pi}{2}) + 2$  y  $r_2 = \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{20}t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$  para los estados  $x_1$  y  $x_5$  mientras  $x_3$  permanece en cero.

Aprovechando el desacoplamiento en la dinámica del Robot-péndulo, el objetivo de control puede ser alcanzado

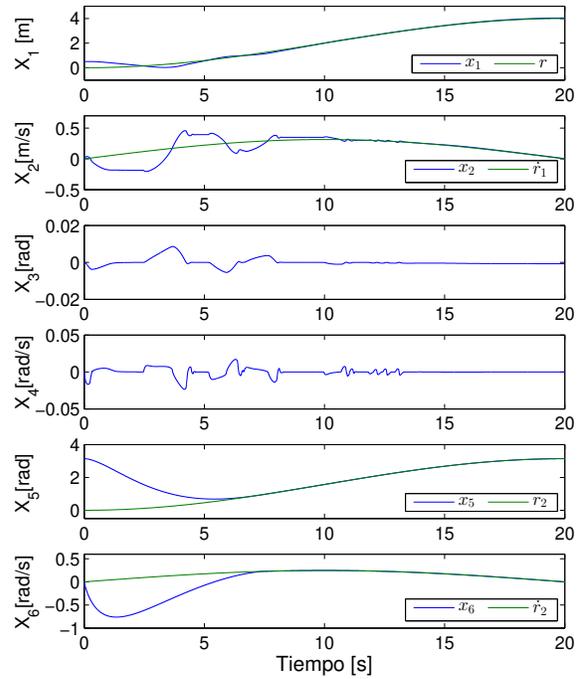


Figura 2. Seguimiento de trayectorias de los estados del Robot-péndulo.

implementando el controlador

$$u_1 = -k_1[z_1]^{\frac{1}{5}} - k_2[z_2]^{\frac{1}{4}} - k_3[z_3]^{\frac{1}{3}} - k_4[z_4]^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

para el sub-sistema  $x_1 - x_4$ , donde las variables  $z$  están dadas por  $z = Tx$  donde  $T$  es una transformación de similitud que permite representar el sistema (17) en forma normal (ver Chen (1999)). Por otro lado, se puede implementar la ley de control

$$u_2 = -k_1[x_5]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_6]^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

para el sub-sistema  $x_5 - x_6$ . Ambos controladores son casos particulares de la ley de control (3) para orden  $n = 4$  y  $n = 2$ , respectivamente.

En la Figura 2 se presentan los resultados de la simulación del robot péndulo en lazo cerrado con los controladores (18) con ganancias  $k_1 = 3.5, k_2 = 3.7, k_3 = 13, k_4 = 8.5$  y (19) con ganancias  $k_1 = 6, k_2 = 8.5$ . Se puede observar que los estados  $x_1, x_2, x_5$  y  $x_6$  siguen sus respectivas referencias mientras que los estados  $x_3$  y  $x_4$  permanecen cerca de cero. En la Figura 3 se muestran las señales de control aplicadas al motor de cada rueda del Robot-péndulo. Para las simulaciones se utilizó el método de integración Euler-ode1 con paso de muestro 0.1[ms].

## 5. CONCLUSIÓN

En este artículo se presentó una familia de controladores no lineales capaces de estabilizar sistemas de orden  $n$ . Tales controladores, en lazo cerrado, generan campos vectoriales  $r$ -homogéneos de grado negativo lo cual permite asegurar convergencia en tiempo-finito de las trayectorias del sistema al origen. Para la prueba de estabilidad y

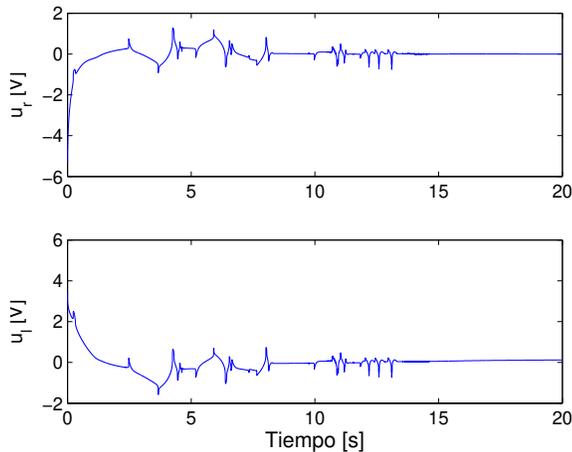


Figura 3. Señal de control aplicada al Robot-péndulo.

selección de ganancias se utilizó el enfoque de FG para el diseño de FL. Sin embargo, debido a dificultades técnicas en el presente artículo solo se prueban los casos de orden  $n \leq 4$ . Finalmente, el desempeño de los controladores propuestos se verifica mediante ejemplos de simulación en un Robot-péndulo.

## REFERENCIAS

- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, Berlin, 2da edición.
- Bhat, S.P. y Bernstein, D.S. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. En *American Control Conference, 1997, Proceedings of the*, volumen 4, 2513–2514. IEEE.
- Chen, C.T. (1999). *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 3ra edición.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J.A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach. *Automatica*, 80, 232–238.
- Efimov, D., Ushirobira, R., Moreno, J.A., y Perruquetti, W. (2018). Homogeneous Lyapunov functions: From converse design to numerical implementation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(5), 3454–3477.
- INTECO (2015). Two wheeled unstable transporter user's manual.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3ra edición.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design.
- Levant, A., Efimov, D., Polyakov, A., y Perruquetti, W. (2016). Stability and robustness of homogeneous differential inclusions. En *Decision and Control (CDC), 2016, Proceedings of the 55th IEEE Conference on*, 7288–7293. IEEE.
- Mendoza-Avila, J., Moreno, J.A., y Fridman, L. (2017). An idea for Lyapunov function design for arbitrary order continuous twisting algorithm. En *56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 4242–4247. IEEE.
- Mercado-Uribe, A. y Moreno, J.A. (2017). Discontinuous integral control for systems in controller form. En *Congreso Nacional de Control Automático (CNCA), 2017, Memorias de el*, 630–635.
- Nakamura, H., Yamashita, Y., y Nishitani, H. (2002). Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions. En *SICE 2002, Proceedings of the 41st SICE Annual Conference*, volumen 3, 1974–1979. IEEE.
- Parrilo, P.A. (2000). *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. Tesis de doctorado, California Institute of Technology.
- Pólya, G. (1928). Über positive Darstellung von Polynomen. *Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 73, 141–145.
- Prajna, S., Papachristodoulou, A., y Parrilo, P.A. (2002). Introducing sostools: A general purpose sum of squares programming solver. En *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volumen 1, 741–746. IEEE.
- Rosier, L. (1992). Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6), 467–473.
- Sánchez, T. y Moreno, J.A. (2016). *Construction of Lyapunov Functions for High Order Sliding Modes*, 77–99. The Institution of Engineering and Technology (IET), London.
- Sanchez, T. y Moreno, J.A. (2019). Design of Lyapunov functions for a class of homogeneous systems: Generalized forms approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 661–681.
- Skogestad, S. y Postlethwaite, I. (2007). *Multivariable feedback control: analysis and design*, volumen 2. John Wiley and Sons, New York, 2da edición.
- Slotine, J.J.E. y Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*, volumen 60. Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey.
- Zubov, V.I. (1964). *Methods of AM Lyapunov and their Application*. P. Noordhoff.