

Rechazo Activo de Perturbaciones en un Cuadrotor Usando Modos Deslizantes de Orden Superior

Jesús A. Ángel-Verdugo* Alejandra Ferreira de Loza*
Luis T. Aguilar*

* Instituto Politécnico Nacional, CITEDI, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310 Colonia Nueva Tijuana, Tijuana B.C., 22435 (e-mails: jangel@citedi.mx, dferreira@citedi.mx, laguilarb@ipn.mx).

Resumen: En este trabajo se presenta un control robusto continuo para seguimiento de trayectoria en un cuadrotor. La estrategia propuesta hace uso de un observador por modos deslizantes de orden superior (OMDOS) que estima el estado e identifica las perturbaciones presentes en las dinámicas actuadas. Posteriormente los efectos de las perturbaciones son compensados a través del control. Además, se presenta el análisis de estabilidad del esquema controlador-observador vía una función de Lyapunov y se ilustra el desempeño del controlador propuesto en la plataforma experimental *Quanser QBall 2*.

Palabras Clave: OMDOS, Estabilidad según Lyapunov, Control robusto.

1. INTRODUCCIÓN

Los cuadrotores son vehículos normalmente pequeños, con capacidades de vuelo autónomas y de despegue y aterrizaje vertical. Sus características los hacen una solución efectiva para el desempeño de tareas de alto impacto social, como lo es búsqueda y rescate (Almurib et al., 2011), entrega de paquetería (Aghdam et al., 2016), detección de minas terrestres (Colorado et al., 2017), mapeo de zonas y reconocimiento de terrenos (Kaufman et al., 2018), entre otras. Para la navegación autónoma de estas actividades diversas estrategias de control han sido propuestas, véase por ejemplo las mencionadas en Shraim et al. (2018). Normalmente estas aeronaves se desenvuelven en ambientes no estructurados, requiriendo así capacidades de vuelo robustas para lidiar con las perturbaciones presentes durante el vuelo. Dichas perturbaciones pueden ser ráfagas de aire, fallas en actuadores o algún tipo de dinámica no modelada.

Objetivo. El objetivo de este trabajo es diseñar un controlador robusto para garantizar el seguimiento de trayectoria en un cuadrotor a pesar de las perturbaciones externas y dinámicas no consideradas.

El seguimiento robusto de trayectoria ha sido abordado por diversos autores. Por ejemplo, en Pérez-Alcocer et al. (2016), se implementa un esquema de control basado en modelo con estimación de la masa del vehículo, sin embargo esta metodología no es robusta contra perturbaciones externas. Una técnica de control robusto bien

conocida que si es capaz de compensar las perturbaciones externas es la de control por modos deslizantes (CMD). Por ejemplo, en Madani y Benallegue (2006) se presenta un CMD convencional, para evitar el efecto de castaño se utiliza una aproximación continua de la función signo. Mientras que en Derafa et al. (2012) se hace uso del algoritmo *super-twisting* para generar un control robusto y continuo para el seguimiento de trayectoria.

Una metodología alternativa para garantizar robustez encontrada en la literatura es la de identificación y rechazo activo de perturbaciones. Por ejemplo, en Yang et al. (2018) se hace uso de un observador de estado extendido en conjunto con un control no lineal, donde el inconveniente principal de este trabajo es que el desempeño del sistema se ve afectada por el error de la estimación del observador que no desaparece. Mientras que en Qin et al. (2017), se presenta un observador lineal de estado extendido con un control PD; sin embargo, solo se consideran perturbaciones constantes y el observador converge de manera asintótica. En este sentido, las técnicas de observación por modos deslizantes ofrecen convergencia al valor exacto estimado en, teóricamente, tiempo finito. Diversos autores han utilizado los OMDOS; por ejemplo, en Ríos et al. (2017) se presenta un control robusto basado en un observador por modos deslizantes. Mientras que en Dávila y Salazar (2017), se hace uso del control basado en OMDOS para compensar perturbaciones e incertidumbres paramétricas. En los trabajos, de Ríos et al. (2017) y Dávila y Salazar (2017), el análisis de estabilidad en lazo cerrado se aborda de forma trivial. Es decir, dado

que los observadores usados convergen en tiempo finito, el controlador se enciende hasta que el observador ya convergió. Sin embargo, en casos prácticos esta situación puede provocar el indeseable efecto pico si, por ejemplo, el controlador se inicia antes de la convergencia del observador.

Contribución. En este trabajo se presenta el análisis de estabilidad del esquema controlador-observador vía una función de Lyapunov.

Metodología. Primero, se diseña un observador de estado extendido basado en modos deslizantes de orden superior para estimar las perturbaciones que afectan al sistema, después se inyectan a través del controlador para ser rechazadas.

Estructura. La Sección 2 presenta el modelo dinámico y le objetivo de control. La Sección 3 presenta el diseño del OMDOS y la Sección 4 presenta las leyes de control. La Sección 5 presenta los resultados experimentales y la métrica del valor cuadrático medio. Por último la Sección 6 presenta las conclusiones.

2. MODELO DINÁMICO Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Fig. 1 representa al cuadrotor cuyo modelo dinámico,

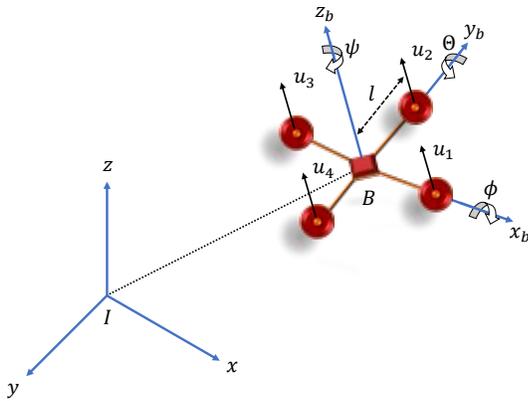


Fig. 1. Diagrama de cuerpo libre del cuadrotor.

expresado en el marco de referencia inercial, en el espacio de estados resulta como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1 &= \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= m^{-1}\mathbf{u}_p - g\mathbf{v}_z + \mathbf{d}_p(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 &= \boldsymbol{\eta}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 &= \mathbf{T}_e + \mathcal{I}_a + \mathbf{d}_\eta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{p}_1 \ \boldsymbol{\eta}_1]^T \quad (3)$$

donde se asume que el marco de referencia en el cuerpo del cuadrotor coincide con el centro de masa del vehículo. Así, $\mathbf{p}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ es el vector de posiciones espaciales, $\mathbf{p}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ el vector de velocidades, $\boldsymbol{\eta}_1 =$

$[\phi_1, \theta_1, \psi_1]^T$ es el vector de posiciones angulares y $\boldsymbol{\eta}_2 = [\phi_2, \theta_2, \psi_2]^T$ el vector de velocidades angulares. Mientras que m es la masa, g es la aceleración de la gravedad, \mathbf{y} es la salida medible, $\mathbf{v}_z = [0, 0, 1]^T$ es un vector auxiliar, $\mathcal{I}_a = [a_3\theta_2\psi_2, a_2\phi_2\psi_2, a_1\phi_2\theta_2]^T$ es un vector de momentos inerciales con $a_1 = (I_x - I_y)/I_z$, $a_2 = (I_z - I_x)/I_y$ y $a_3 = (I_y - I_z)/I_x$. $\mathbf{d}_p(t) = [0, 0, d_z(t)]^T$ y $\mathbf{d}_\eta(t) = [d_\phi(t), d_\theta(t), d_\psi(t)]^T$ representan las perturbaciones en la dinámica traslacional y rotacional respectivamente, donde d_z es la perturbación externa en altura; mientras que d_ϕ , d_θ y d_ψ son las perturbaciones externas en alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente. Por último, $\mathbf{T}_e = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$ es la entrada de control para la dinámica rotacional y $\mathbf{u}_p = R(\boldsymbol{\eta})\mathbf{F}_e$ con $\mathbf{F}_e = [0, 0, F_z]^T$ como la entrada de control para la dinámica traslacional y la matriz de rotación

$$R(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} C_{\theta_1}C_{\psi_1} & S_{\theta_1}C_{\psi_1}S_{\phi_1} - S_{\psi_1}C_{\phi_1} & S_{\theta_1}C_{\psi_1}C_{\phi_1} + S_{\psi_1}S_{\phi_1} \\ C_{\theta_1}S_{\psi_1} & S_{\theta_1}S_{\psi_1}S_{\phi_1} + C_{\psi_1}C_{\phi_1} & S_{\theta_1}S_{\psi_1}C_{\phi_1} - C_{\psi_1}S_{\phi_1} \\ -S_{\theta_1} & C_{\theta_1}S_{\phi_1} & C_{\theta_1}C_{\phi_1} \end{bmatrix},$$

donde $S_\alpha = \sin(\alpha)$ y $C_\alpha = \cos(\alpha)$ para $\alpha = \phi_1, \theta_1, \psi_1$. Además, F_z es el empuje total en el eje z ; y τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ representan los torques en los respectivos ejes x , y y z .

Por otro lado, las entradas de control se definen en términos del vector de fuerzas $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ generado por las propelas, como

$$\mathbf{f}_B(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} F_z \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 u_i \\ l(u_3 - u_1) \\ l(u_2 - u_4) \\ k_d \sum_{i=1}^4 (-1)^i u_i \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde l es la distancia del centro de masa a los actuadores y k_d es el coeficiente de arrastre.

De la ecuación (4) la matriz de distribución de fuerzas correspondiente es

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -l & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -k_d & k_d & -k_d & k_d \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La relación inversa entre el vector $\mathbf{f}_B(\mathbf{u})$ y el empuje de cada uno de los motores es $\mathbf{u} = \mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_B(\mathbf{u})$.

Se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 1. El cuadrotor no realizará maniobras acrobáticas, lo que significa que $\phi_1(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\theta_1(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Suposición 2. Las perturbaciones $\mathbf{d}_p(t)$ y $\mathbf{d}_\eta(t)$, así como su primera derivada $\dot{\mathbf{d}}_p(t)$ y $\dot{\mathbf{d}}_\eta(t)$ están acotadas. Lo anterior significa que $\|\mathbf{d}_p(t)\| < L_p$ y $\|\mathbf{d}_\eta(t)\| < L_\eta$, así como $\|\dot{\mathbf{d}}_p(t)\| < \bar{L}_p$ y $\|\dot{\mathbf{d}}_\eta(t)\| < \bar{L}_\eta$; donde L_p , L_η , \bar{L}_p y \bar{L}_η son constantes conocidas.

Suposición 3. Las velocidades de las dinámicas rotacionales $\boldsymbol{\eta}_2$ y su primera derivada $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2$ están acotadas. Lo que significa que $\|\boldsymbol{\eta}_2\| < L_\eta$ y $\|\dot{\boldsymbol{\eta}}_2\| < \bar{L}_\eta$.

Finalmente, por simplicidad se define el vector de perturbaciones externas $\mathbf{d}(t) = [\mathbf{d}_p(t), \mathbf{d}_\eta(t)]^T$.

Objetivo de control. El objetivo de control es garantizar el seguimiento de la trayectoria a pesar de los efectos de las perturbaciones $\mathbf{d}(t)$. Esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\xi}(t)\| \rightarrow 0$, donde $\boldsymbol{\xi}(t) = [\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_\eta]^T$, con los errores de seguimiento definidos como

$$\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_1 \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\xi}_\eta = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta}_1. \quad (7)$$

Siendo $\mathbf{p}_d = [x_d, y_d, z_d]^T$ y $\boldsymbol{\eta}_d = [\phi_d, \theta_d, \psi_d]^T$ los vectores de posiciones espaciales y angulares deseados, respectivamente.

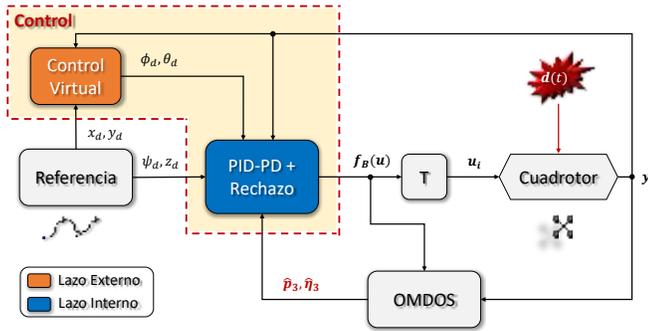


Fig. 2. Esquema de control.

Para lograr este objetivo, primero se diseña un observador extendido via modos deslizantes de orden superior. Posteriormente, la estrategia de control propuesta se divide en dos lazos como se ilustra en la Fig. 2. En el lazo externo, un control virtual PD genera los ángulos deseados ϕ_d y θ_d correspondientes a los giros en alabeo y cabeceo, para desplazarse en el plano horizontal x y y correspondientes al movimiento subactuado. Mientras que en el lazo interno, un control nominal genera el empuje vertical total (PID) y los torques correspondientes en los giros alabeo, cabeceo y guiñada (PD); es decir, $\mathbf{f}_B(\mathbf{u})$. Dichas leyes de control contienen los términos estimados provenientes del OMDOS.

3. DISEÑO DE OBSERVADOR

En esta sección se aborda el diseño del observador por modos deslizantes de orden superior para la estimación de las perturbaciones $\mathbf{d}(t)$ y dinámicas no modeladas en (1)-(2).

Definiendo los nuevos estados $\mathbf{p}_3 := \mathbf{d}_p(t)$ y $\boldsymbol{\eta}_3 := \mathbf{d}_\eta(t)$, se extiende la dinámica (1)-(2) con $\dot{\mathbf{p}}_3 = \dot{\mathbf{d}}_p(t)$ y $\dot{\boldsymbol{\eta}}_3 = \dot{\mathbf{d}}_\eta(t)$, donde la dinámica de dichos estados es desconocida, pero acotada bajo la *Suposición 2* y la *Suposición 3*.

Se propone un observador por modos deslizante de orden superior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_1 &= \hat{\mathbf{p}}_2 + K_{p1}\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{e}_{p1}) \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}}_2 &= m^{-1}\mathbf{u}_p - g\mathbf{v}_z + \hat{\mathbf{p}}_3 + K_{p2}\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{e}_{p1}) \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}}_3 &= K_{p3}\boldsymbol{\varphi}_3(\mathbf{e}_{p1}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_1 &= \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 + K_{\eta1}\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{e}_{\eta1}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_2 &= \mathbf{T}_e + \hat{\boldsymbol{\eta}}_3 + K_{\eta2}\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{e}_{\eta1}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_3 &= K_{\eta3}\boldsymbol{\varphi}_3(\mathbf{e}_{\eta1}), \end{aligned} \quad (9)$$

donde las superficies deslizantes son $\mathbf{e}_{p1} := \mathbf{p}_1 - \hat{\mathbf{p}}_1$, y $\mathbf{e}_{\eta1} := \boldsymbol{\eta}_1 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_1$. Los términos de corrección $\boldsymbol{\varphi}_1(\cdot)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(\cdot)$ y $\boldsymbol{\varphi}_3(\cdot)$ dependientes de un vector $\mathbf{s} := [s_1, s_2, s_3]^T$, son

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{s}) = \left[|s_1|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(s_1) \quad |s_2|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(s_2) \quad |s_3|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(s_3) \right]^T \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{s}) = \left[|s_1|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(s_1) \quad |s_2|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(s_2) \quad |s_3|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(s_3) \right]^T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3(\mathbf{s}) = [\text{sgn}(s_1) \quad \text{sgn}(s_2) \quad \text{sgn}(s_3)]^T. \quad (12)$$

Las ganancias del observador se eligen de acuerdo con Cruz-Zavala y Moreno (2018) como

$$K_{i1} = 3.1\bar{L}_i^{\frac{1}{3}}; \quad K_{i2} = 5.7\bar{L}_i^{\frac{2}{3}}; \quad K_{i3} = 1.1\bar{L}_i, \quad (13)$$

con $i \in \{p, \eta\}$.

4. DISEÑO DE CONTROLADOR

Lazo de control externo. El control virtual para el lazo externo que se encarga de generar los ángulos deseados ϕ_d y θ_d tiene la forma

$$\theta_d = \tan^{-1} \left[mF_z^{-1}(u_{I2}S_{\psi_d} + u_{I1}C_{\psi_d}) \right] \quad (14)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left[mF_z^{-1}C_{\theta_d}(u_{I1}S_{\psi_d} + u_{I2}C_{\psi_d}) \right], \quad (15)$$

donde u_{I1} y u_{I2} son el primero y segundo elemento del vector \mathbf{u}_I expresado como

$$\mathbf{u}_I = K_{pp}\boldsymbol{\xi}_p + K_{ip} \int_0^t \boldsymbol{\xi}_p d\tau + K_{dp}\dot{\boldsymbol{\xi}}_p + \dot{\mathbf{p}}_d + g\mathbf{v}_z - \hat{\mathbf{p}}_3, \quad (16)$$

con $K_{pp} = \text{diag}\{k_{px}, k_{py}, k_{pz}\}$, $K_{ip} = \text{diag}\{0, 0, k_{iz}\}$ y $K_{dp} = \text{diag}\{k_{dx}, k_{dy}, k_{dz}\}$, siendo $k_{px}, k_{py}, k_{pz} > 0$ las ganancias proporcionales; $k_{dx}, k_{dy}, k_{dz} > 0$ las ganancias derivativas, $k_{iz} > 0$ la ganancia integral y $\hat{\mathbf{p}}_3$ es la señal de perturbación identificada proveniente del observador (8).

Lazo de control interno. En este lazo la ley de control que calcula el empuje total F_z en el eje vertical z es

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{m}{C_{\phi_1}C_{\theta_1}} \\ &\times \left(k_{pz}\xi_{z1} + k_{iz} \int_0^t \xi_{z1} d\tau + k_{dz}\dot{\xi}_{z1} + g + \ddot{z}_d - \hat{z}_3 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

donde \hat{z}_3 es el término de rechazo proveniente del observador en (8).

Mientras que para generar los torques en los giros alabeo τ_ϕ , cabeceo τ_θ y guiñada τ_ψ , el control propuesto es

$$\tau_\phi = k_{p\phi}\xi_{\phi_1} + k_{d\phi}\dot{\xi}_{\phi_1} + \ddot{\phi}_d - \hat{\phi}_3 - a_3\theta_2\psi_2 \quad (18)$$

$$\tau_\theta = k_{p\theta}\xi_{\theta_1} + k_{d\theta}\dot{\xi}_{\theta_1} + \ddot{\theta}_d - \hat{\theta}_3 - a_2\phi_2\psi_2 \quad (19)$$

$$\tau_\psi = k_{p\psi}\xi_{\psi_1} + k_{d\psi}\dot{\xi}_{\psi_1} + \ddot{\psi}_d - \hat{\psi}_3 - a_1\phi_2\theta_2, \quad (20)$$

donde $k_{p\phi}, k_{p\theta}, k_{p\psi} > 0$, representan las ganancias de del la parte proporcional y $k_{d\phi}, k_{d\theta}, k_{d\psi} > 0$, representan las ganancias de la parte derivativa. Además, los términos de rechazo $\hat{\phi}_3, \hat{\theta}_3$ y $\hat{\psi}_3$, son las componentes del vector $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3$ provenientes del observador en (9).

Teorema 1. Considere el sistema presentado en (1)-(2) que satisface las suposiciones 1-3. Las leyes de control propuestas en (15)-(14) y (17)-(20) que hacen uso de los estimados provenientes del observador presentado en (8)-(9), con las ganancias elegidas como en (13); aseguran la convergencia asintótica a la trayectoria deseada. Es decir, $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_d$ y $\boldsymbol{\eta}_1 \rightarrow \boldsymbol{\eta}_d$ a pesar de las perturbaciones $\mathbf{d}(t)$.

La prueba de estabilidad se remite al Apéndice.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se muestran los resultados experimentales obtenidos usando la plataforma *Quanser QBall 2*; tomando en cuenta los parámetros $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 1.79 \text{ kg}$, $l = 0.2 \text{ m}$, $I_x = I_y = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_z = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y $k_d = 0.05$.

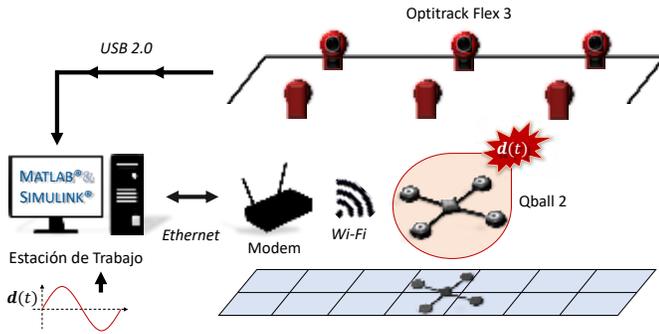


Fig. 3. Diagrama experimental.

Una ilustración de la configuración experimental de seis cámaras *Optitrack Flex 3* con la plataforma experimental *QBall 2* puede ser apreciada en la Fig. 3. El sistema de cámaras mide la posición espacial del *QBall 2* (x_1, y_1, z_1) así como los ángulos en giro (ϕ_1, θ_1, ψ_1) y envía este conjunto de datos de forma alámbrica (USB) a la estación de trabajo.

El tiempo de experimentación es 170 [s], con un paso de muestreo de 1 [ms], usando el método de Euler y la trayectoria deseada definida como $x_d = 0.3 \sin(0.05t)$ [m], $y_d = 0.3 \cos(0.05t)$ [m], $z_d = 0.96 \text{ m}$ y $\psi_d = 0$ [rad].

El experimento cuenta con cuatro etapas apreciables en la Fig. 4. Primero, en el intervalo de tiempo (0, 6.5)[s] los

motores permanecen apagados. Después, en el intervalo de tiempo (6.5, 36)[s], los motores se encienden y el control nominal lleva al sistema a la trayectoria de referencia. Enseguida, en el intervalo de tiempo (36, 96)[s], la dinámica del sistema es perturbada en altura, alabeo, cabeceo y guiñada de la forma

$$\mathbf{d}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.04 \sin(0.2t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_\eta(t) = \begin{bmatrix} 0.001 \sin(0.2t) \\ 0.001 \sin(0.2t) \\ 0.003 \sin(0.2t) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Por último, en el intervalo de tiempo (96, 170)[s], aún con el sistema perturbado se inyectan los estimados $\hat{z}_3, \hat{\phi}_3, \hat{\theta}_3$ y $\hat{\psi}_3$. Los efectos esta acción se pueden apreciar en el sombreado de color azul en la Fig. 4. Además, en la Fig. 6 se muestran las entradas de control $F_z, \tau_\phi, \tau_\theta$ y τ_ψ las cuales son señales continuas.

En la Fig. 5 se ilustra el movimiento del cuadrotor desde una perspectiva isométrica. La línea negra representa la trayectoria de referencia, la línea roja representa la trayectoria obtenida con el control nominal y la línea azul representa la trayectoria final utilizando el control por identificación y rechazo propuesto de perturbaciones. Claramente, se obtiene un mejor desempeño con el controlador por identificación y rechazo de perturbaciones.

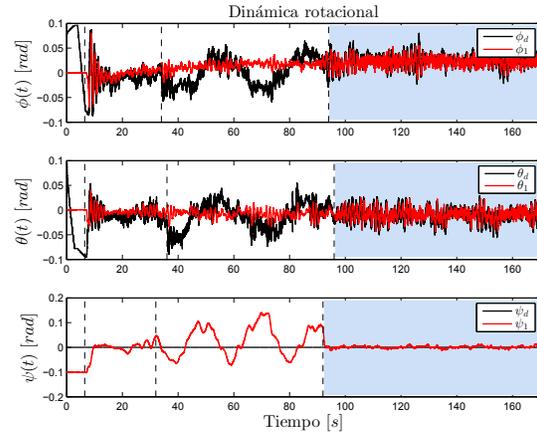


Fig. 4. Evolución temporal de los ángulos del cuadrotor.

Con fines de medir objetivamente el desempeño de los controladores, en la Tabla 1 se muestran los valores del error cuadrático medio. Resulta evidente que el control robusto basado en identificación y rechazo de perturbaciones produce un seguimiento de trayectoria más preciso.

6. CONCLUSIONES

Se diseñó un control robusto y continuo para el seguimiento de trayectoria en un cuadrotor. La metodología de control propuesta permite rechazar las perturbaciones externas y dinámicas no modeladas presentes en el sistema. Además, se logró desarrollar el análisis de estabilidad para asegurar

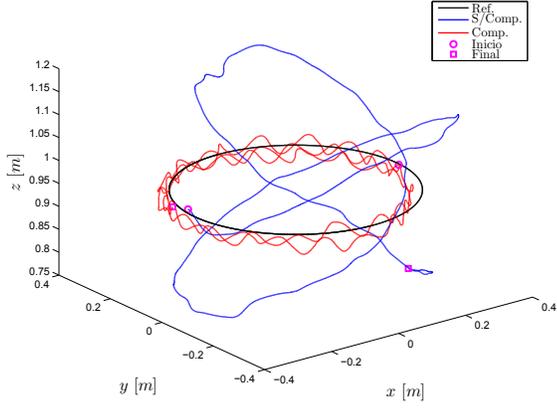


Fig. 5. Seguimiento de trayectoria del cuadrotor en 3D.

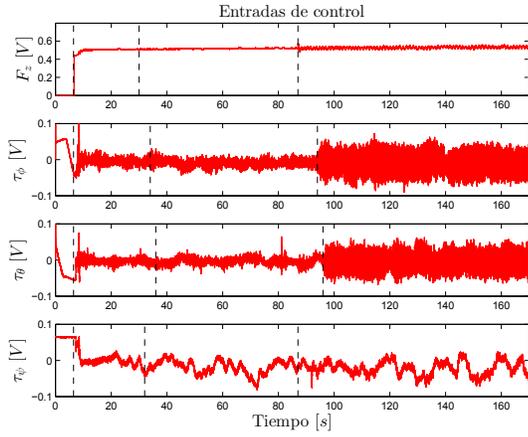


Fig. 6. Evolución temporal de las entradas de control en el cuadrotor.

Tabla 1. Valor cuadrático medio del error en seguimiento de trayectoria.

Error	Sin compensar (40s – 80s)	Compensado (100s – 140s)
ξ_z	0.3015	0.2689
ξ_ϕ	0.0311	0.0110
ξ_θ	0.0250	0.0116
ξ_ψ	0.0699	0.0045

la convergencia asintótica de los estados a las trayectorias deseadas bajo el esquema controlador-observador.

Cabe destacar que el cuadrotor *QBall 2* es una plataforma para uso didáctico en interiores, por lo que sus prestaciones en *hardware* son limitadas. Por ende, cuestiones como el tiempo de muestreo de los sensores o retardos en el transporte de datos afectan el desempeño final del sistema.

7. APÉNDICE

Para probar el **Teorema 1** primero se obtiene la dinámica en lazo cerrado del esquema observador-controlador y posteriormente se hace uso de una función de Lyapunov

para analizar la convergencia de las trayectorias del estado.

Prueba. La dinámica del error de seguimiento traslacional y rotacional pueden obtenerse derivando dos veces (6), (7) sustituyendo los controles (17)-(20). En el espacio de estados se representan como

$$\dot{\xi}_{p0} = \xi_{p1} \quad (22)$$

$$\dot{\xi}_{p1} = \xi_{p2} \quad (23)$$

$$\dot{\xi}_{p2} = -K_{ip}\xi_{p0} - K_{pp}\xi_{p1} - K_{dp}\xi_{p2} - e_{p3}(t) + m^{-1}[\mathbf{R}_3(\eta_d) - \mathbf{R}_3(\eta)]F_z, \quad (24)$$

$$\dot{\xi}_{\eta1} = \xi_{\eta2} \quad (25)$$

$$\dot{\xi}_{\eta2} = -K_{p\eta}\xi_{\eta1} - K_{d\eta}\xi_{\eta2} - e_{\eta3}(t). \quad (26)$$

Sean los errores de observación $e_{p2} = \mathbf{p}_2 - \hat{\mathbf{p}}_2$, $e_{p3} = \mathbf{p}_3 - \hat{\mathbf{p}}_3$, $e_{\eta2} = \boldsymbol{\eta}_2 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_2$ y $e_{\eta3} = \boldsymbol{\eta}_3 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_3$, se puede derivar y encontrar la dinámica de los errores de observación como

$$\dot{e}_{p1} = e_{p2} - K_{p1}\varphi_1(e_{p1}) \quad (27)$$

$$\dot{e}_{p2} = e_{p3} - K_{p2}\varphi_2(e_{p1}) \quad (28)$$

$$\dot{e}_{p3} = \dot{\mathbf{d}}_p(t) - K_{p3}\varphi_3(e_{p1}), \quad (29)$$

$$\dot{e}_{\eta1} = e_{\eta2} - K_{\eta1}\varphi_1(e_{\eta1}) \quad (30)$$

$$\dot{e}_{\eta2} = e_{\eta3} - K_{\eta2}\varphi_2(e_{\eta1}) \quad (31)$$

$$\dot{e}_{\eta3} = \dot{\mathbf{d}}_\eta(t) - K_{\eta3}\varphi_3(e_{\eta1}), \quad (32)$$

donde se puede apreciar que las dinámicas de los errores de observación (27)-(32) son independientes de la de seguimiento (22)-(26). Además, de Cruz-Zavala y Moreno (2018) se sabe que existen ganancias K_{p1} , K_{p2} , K_{p3} , $K_{\eta1}$, $K_{\eta2}$ y $K_{\eta3}$ elegidas como en (13) que garantizan que $e_{p1} \equiv e_{p2} \equiv e_{p3} \equiv e_{\eta1} \equiv e_{\eta2} \equiv e_{\eta3} \equiv 0$ para todo $t \geq t_f$. Por lo anterior, en lo subsecuente, el análisis se enfoca en la dinámica de los errores de seguimiento.

Expresando (22)-(26) de forma matricial se tiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{z0} \\ \dot{\xi}_{p1} \\ \dot{\xi}_{p2} \\ \dot{\xi}_{\eta1} \\ \dot{\xi}_{\eta2} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\chi}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -k_{iz} & -K_{pp} & -K_{dp} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -K_{p\eta} & -K_{d\eta} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_{z0} \\ \xi_{p1} \\ \xi_{p2} \\ \xi_{\eta1} \\ \xi_{\eta2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_3 \\ e_{p3} \\ \mathbf{0}_3 \\ e_{\eta3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{m} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{R}_3(\eta_d) - \mathbf{R}_3(\eta) \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_v(\boldsymbol{\xi}_\eta)} F_z, \quad (33)$$

donde $\mathbf{1}_{1 \times 3} := [0, 0, 1]$. $\mathbf{0}_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ y $\mathbf{0}_{1 \times 3} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ son vectores cuyas componentes son cero. $\mathbf{0}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz nula y $\mathbf{I}_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz identidad.

Además, es de notar que $k_{iz}, K_{pp}, K_{dp}, K_{p\eta}, K_{d\eta} > 0$; por lo tanto, la matriz A es Hurwitz.

Se propone una función candidata de Lyapunov para la dinámica (33) de la forma $V = \chi^T P \chi$, donde $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ y derivando a lo largo del tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\chi}^T P \chi + \chi^T P \dot{\chi} \\ &= -\chi^T Q \chi - 2\chi^T P \vartheta + 2\chi^T P m^{-1} \mathbf{R}_v(\xi_\eta) F_z. \end{aligned} \quad (34)$$

con $Q = A^T P + P A > 0 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$. De Cruz-Zavala y Moreno (2018) se sabe que $\|\vartheta\| \leq \|\vartheta^T(0)\|$. Asimismo, ξ_p y $\dot{\xi}_p$ permanecen acotados (Khalil, 2015), en consecuencia F_z también permanece acotada como $|F_z| \leq \beta_1 + \beta_2 \|\xi_p\|$, donde β_1, β_2 son constantes positivas. Reescribiendo así (34) como

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|\chi\|^2 + 2\|\chi\| \lambda_{\min}\{P\} \|\vartheta(0)\| \\ &\quad + 2\|\chi\| \lambda_{\max}\{P\} m^{-1} \|\mathbf{R}_v(\xi_\eta)\| |F_z|. \end{aligned} \quad (35)$$

De (35) se encuentra la cota

$$\|\chi\| > \frac{2\lambda_{\max}\{P\} m^{-1} \|\mathbf{R}_v(\xi_\eta)\| |F_z| + 2\lambda_{\min}\{P\} \|\vartheta(0)\|}{\lambda_{\min}\{Q\}}. \quad (36)$$

Además, del del Lema 9.2 de Khalil (2015) se puede obtener la última cota como

$$\begin{aligned} \|\chi\| &\leq \frac{2\lambda_{\max}\{P\} m^{-1} \|\mathbf{R}_v(\xi_\eta)\| |F_z| + 2\lambda_{\min}\{P\} \|\vartheta(0)\|}{\lambda_{\min}\{Q\}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Así, p_1 y η_1 permanecerán últimamente acotadas en la región (36)–(37) en $t \in [0, t_f]$. Una vez que los errores de observación converjan a cero en tiempo finito, es decir $e_{p1} \equiv e_{p2} \equiv e_{p3} \equiv e_{\eta1} \equiv e_{\eta2} \equiv e_{\eta3} \equiv 0_{3 \times 1}$, $\forall t \geq t_f$; y los errores de la dinámica rotacional converjan asintóticamente a cero, es decir $\mathbf{R}_v(\xi_\eta) = 0_{3 \times 1}$; la ecuación (35) se reduce a $\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|\chi\|^2$. Por lo tanto, la dinámica en lazo cerrado (33) es asintóticamente estable; es decir, $p_1 \rightarrow p_d$ y $\eta_1 \rightarrow \eta_d$ para todo $t \geq t_f$. ■

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONACYT por el apoyo brindado a través de las subvenciones 285279 y CVU 863546.

REFERENCIAS

Aghdam, A.S., Menhaj, M.B., Barazandeh, F., and Abdollahi, F. (2016). Cooperative load transport with movable load center of mass using multiple quadrotor uavs. In *4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*, 23–27.

Almurib, H.A.F., Nathan, P.T., and Kumar, T.N. (2011). Control and path planning of quadrotor aerial vehicles for search and rescue. In *SICE Annual Conference 2011*, 700–705.

Colorado, J., Devia, C., Perez, M., Mondragon, I., Mendez, D., and Parra, C. (2017). Low-altitude autonomous drone navigation for landmine detection purposes. In *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 540–546.

Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A. (2018). Levant’s arbitrary order exact differentiator: A Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1–1.

Dávila, J. and Salazar, S. (2017). Robust control of an uncertain uav via high-order sliding mode compensation. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 11553 – 11558. 20th IFAC World Congress.

Derafa, L., Benallegue, A., and Fridman, L. (2012). Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors uav. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2), 685 – 699. Advances in Guidance and Control of Aerospace Vehicles using Sliding Mode Control and Observation Techniques.

Kaufman, E., Takami, K., Ai, Z., and Lee, T. (2018). Autonomous quadrotor 3d mapping and exploration using exact occupancy probabilities. In *Second IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*, 49–55.

Khalil, H.K. (2015). *Nonlinear control*. Pearson New York.

Madani, T. and Benallegue, A. (2006). Backstepping sliding mode control applied to a miniature quadrotor flying robot. In *32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, 700–705.

Pérez-Alcocer, R., Moreno-Valenzuela, J., and Miranda-Colorado, R. (2016). A robust approach for trajectory tracking control of a quadrotor with experimental validation. *ISA Transactions*, 65, 262 – 274.

Qin, L., Zhou, W., Li, L., and Jiang, W. (2017). Active disturbance rejection control system design for quadrotor. In *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, 6530–6534.

Ríos, H., González-Sierra, J., and Dzul, A. (2017). Robust tracking output-control for a quad-rotor: A continuous sliding-mode approach. *Journal of the Franklin Institute*, 354(15), 6672 – 6691.

Shraim, H., Awada, A., and Youness, R. (2018). A survey on quadrotors: Configurations, modeling and identification, control, collision avoidance, fault diagnosis and tolerant control. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 33(7), 14–33.

Yang, H., Cheng, L., Xia, Y., and Yuan, Y. (2018). Active disturbance rejection attitude control for a dual closed-loop quadrotor under gust wind. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(4), 1400–1405.

Zuo, Z. (2010). Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor. *IET Control Theory Applications*, 4(11), 2343–2355.