

# Control de Seguimiento Robusto para Robots Móviles Uniciclo con Entrada Saturada<sup>\*</sup>

E. A. Martínez<sup>\*</sup> H. Ríos<sup>\*\*</sup> M. Mera<sup>\*\*\*</sup> J. González-Sierra<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P 27000 Torreón, Coahuila, México. (e-mail: m.eamartinezc@correo.itlalaguna.edu.mx)*

<sup>\*\*</sup> *CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P 27000 Torreón, Coahuila, México. E-mails: hrriosb@correo.itlalaguna.edu.mx, jamesgsjr@hotmail.com*

<sup>\*\*\*</sup> *ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx*

---

**Resumen:** En este artículo se propone una estrategia de control robusto para el seguimiento de trayectorias utilizando Robots Móviles tipo Uniciclo (UMR) bajo la influencia de algunas perturbaciones. La estrategia propuesta es diseñada utilizando el modelo cinemático con perturbaciones y está basada en dos técnicas de control robusto: Control por Modos-Deslizantes (SMC) y el Método del Elipsoide Atractivo (AEM). El control de la orientación del robot es diseñado por medio de un algoritmo de SMC-Continuo, mientras que el control de posición es diseñado por el AEM utilizando funciones de Lyapunov tipo Barrera (BLF). Algunos resultados experimentales son presentados para ilustrar el desempeño de las estrategias propuestas.

*Palabras Clave:* Seguimiento, Robots Móviles, Control Robusto.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio y el diseño de control para robots móviles con ruedas (WMRs por sus siglas en inglés) han llamado bastante la atención durante las últimas décadas. El problema de seguimiento, coordinación de movimiento y evasión de obstáculos, para los WMRs son tres de los campos de investigación más extensos en robótica y en sistemas de control debido a sus distintas aplicaciones. Además, una gran variedad de WMRs están sujetas a restricciones cinemáticas no-holónomas lo que hace que no se pueda estabilizar mediante un control por realimentación suave y por lo tanto no puedan seguir todas las trayectorias posibles (Brockett, 1983).

El problema de seguimiento y estabilización para WMRs no-holónomos ha sido previamente tratado en la literatura. En Sun et al. (2018), se diseñan dos esquemas de modelo predictivo robusto para resolver el problema de seguimiento de WMRs. Se asume que el punto a controlar se encuentra a una distancia perpendicular al eje de las ruedas y el robot tiene perturbaciones que actúan solo en

la velocidad lineal, mientras que no toman en cuenta las perturbaciones que actúan sobre la velocidad angular. En Xin et al. (2016), se propone una estrategia de control en tiempo finito para seguimiento de un UMR utilizando el modelo dinámico y tomando como entradas de control los torques de los motores. Además, un observador de perturbaciones es diseñado para tratar con las incertidumbres del sistema. Sin embargo, el punto a controlar es diferente del punto medio del eje de las ruedas. En el mismo contexto, en Bessas et al. (2016) un SMC integral combinado con un control por realimentación no lineal variante en el tiempo es propuesto para seguimiento de UMRs sujeto a incertidumbres dependientes del estado. En Yoo (2016), consideran efectos de perturbaciones en las ruedas de robots móviles, además, para resolver el problema de seguimiento, proponen un enfoque de control adaptable con realimentación de la salida. En Yu and Liu (2017), se proponen dos leyes de control dinámico para realizar el seguimiento de las trayectorias de UMRs en presencia de una cierta clase de perturbaciones en la entrada. Vale la pena mencionar que la mayoría de los trabajos previamente mencionados no consideran perturbaciones en las ecuaciones del modelo cinemático y la mayoría de ellos únicamente presentan simulaciones numéricas. En este sentido, es necesario diseñar estrategias de control robusto

---

<sup>\*</sup> E. A. Martínez, H. Ríos y J. González-Sierra agradecen el apoyo financiero de CONACYT 863047, 270504 y 266524, respectivamente. M. Mera reconoce el apoyo financiero del IPN SIP 20190196.

para tratar posibles perturbaciones que afectan a los UMRs. Entre esas técnicas de control robusto, se encuentra un enfoque del AEM en Poznyak et al. (2014), el cual está basado en teoría de Lyapunov y cuyas principales ventajas son: su efectividad al tratar con perturbaciones desacopladas y no desvanecientes, su alta relación costo-eficiencia computacional comparada con otros métodos robustos como redes neuronales, y control predictivo, y su facilidad al momento de implementarlo. Algunos de los desarrollos más recientes de este enfoque están relacionados a aplicaciones de control por saturación (Mera and Salgado (2018)) y sistemas con restricciones en los estados (Salgado et al. (2018)). En este sentido, la BLF está constituida en una solución adicional para estabilizar sistemas con restricciones en los estados y entradas saturadas. Motivado por las dificultades mencionadas anteriormente en el diseño de control robusto para UMR, este artículo contribuye con una estrategia de control de seguimiento robusto para UMRs ante perturbaciones. La estrategia propuesta está basada en dos técnicas de diseño de control robusto, *i.e.*, SMC y AEM, utilizando el modelo cinemático. El control de la orientación del robot es diseñado por medio un algoritmo de SMC-*Continuo*, mientras que el control de posición es diseñada por medio del AEM basado en un enfoque de una BLF. La estabilidad de la dinámica del error de seguimiento se garantiza por medio de la teoría de Lyapunov.

La estructura de este artículo se presenta de la siguiente manera. En Sección 2 se presenta el planteamiento del problema, mientras que en la Sección 3 se presenta el diseño de control de seguimiento robusto. Algunos resultados experimentales son mostrados en la Sección 4. Por último, las observaciones finales se dan en la Sección 5.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el modelo cinemático del UMR:

$$\dot{x} = v \cos(\theta)(1 + d_1(t)), \quad (1a)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta)(1 + d_1(t)), \quad (1b)$$

$$\dot{\theta} = \omega(1 + d_2(t)), \quad (1c)$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}$  describen la posición del punto medio del eje de las ruedas del UMR,  $\theta \in \mathbb{R}$  representa la orientación del UMR, mientras que  $v, \omega \in \mathbb{R}$  son las velocidades lineal y angular respectivamente; las cuales representan las entradas de control. Los términos  $d_1$  y  $d_2$  representan perturbaciones de dinámicas no modeladas, las cuales son aditivas a las entradas, esto viene del hecho de que si no se da un comando al UMR, este no se moverá. Estas perturbaciones pueden surgir del tiempo de asentamiento del controlador interno, el cual convierte los comandos de velocidad a corriente/voltaje los cuales son enviados a los motores. Se asume que tales perturbaciones están acotadas por:  $-1 < d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max}$ , para  $i = 1, 2$ ; donde la restricción  $d_{\min} > -1$  asegura que las perturbaciones no causen un cambio de signo en la entrada de control  $v$ .

El objetivo de este artículo es diseñar una estrategia de control robusta con el fin de seguir una trayectoria

deseada para el UMR a pesar de algunas perturbaciones aditivas.

## 3. CONTROL DE SEGUIMIENTO ROBUSTO

Considere la siguiente representación de (1)

$$\dot{x}_0 = u_0 + \bar{d}_1(t), \quad (2a)$$

$$\dot{x}_1 = u_0 x_2 + \bar{d}_2(t), \quad (2b)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 + \bar{d}_3(t), \quad (2c)$$

donde  $x_0 := x$ ,  $x_1 := y$ ,  $x_2 := \tan(\theta)$ ,  $u_0 := v \cos(\theta)$ ,  $u_1 := \omega \sec^2(\theta)$ ,  $\bar{d}_1 := v \cos(\theta)d_1$ ,  $\bar{d}_2 := v \sin(\theta)d_1$  y  $\bar{d}_3 := \omega \sec^2(\theta)d_2$ . Definiendo las trayectorias deseadas como  $x_d, y_d \in \mathcal{C}^\infty$  y acotadas. Entonces, el error de seguimiento puede ser definido como

$$e_0 := x_0 - x_d, \quad \bar{e}_0 := \int_0^t [x_0(\tau) - x_d(\tau)] d\tau,$$

$$e_1 := x_1 - y_d, \quad \bar{e}_1 := \int_0^t [x_1(\tau) - y_d(\tau)] d\tau,$$

$$e_2 := x_2 - x_2^*, \quad \bar{e}_2 := \int_0^t [x_2(\tau) - x_2^*(\tau)] d\tau,$$

donde  $x_2^*$  es una señal de referencia a diseñar. Entonces, la dinámica del error de seguimiento está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= A\varepsilon_0 + B[u_0 + \bar{d}_1(t) - \dot{x}_d], \\ \dot{\varepsilon}_1 &= A\varepsilon_1 + B[u_0 x_2 + \bar{d}_2(t) - \dot{y}_d], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= A\varepsilon_2 + B[u_1 + \bar{d}_3(t) - \dot{x}_2^*], \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_0 := (\bar{e}_0, e_0)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon_1 := (\bar{e}_1, e_1)^T \in \mathbb{R}^2$  y  $\varepsilon_2 := (\bar{e}_2, e_2)^T \in \mathbb{R}^2$  y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, el UMR es un sistema subactuado, por lo tanto, no es posible controlar las posiciones  $(x, y)$  y la orientación  $\theta$  de manera independiente. Además, la señal de referencia  $x_2^*$  y las entradas de control  $u_0$  y  $u_1$  deben ser diseñadas correctamente de tal manera que se llegue a la posición deseada  $(x_d, y_d)$ . Para ello, un control virtual  $\nu_0 \in \mathbb{R}$  es introducido en la dinámica del error  $\varepsilon_1$ , *i.e.*,

$$\dot{\varepsilon}_0 = A\varepsilon_0 + B[u_0 + \bar{d}_1(t) - \dot{x}_d], \quad (3a)$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = A\varepsilon_1 + B[\nu_0 + g(x_2, u_0, \nu_0) + \bar{d}_2(t) - \dot{y}_d], \quad (3b)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = A\varepsilon_2 + B[u_1 + \bar{d}_3(t) - \dot{x}_2^*], \quad (3c)$$

donde la perturbación  $w \in \mathbb{R}$  está dada por  $w := u_0 x_2 - \nu_0$ . Por lo tanto, el control virtual  $\nu_0$  puede ser seleccionado de la siguiente manera

$$\nu_0 = u_0 x_2^*, \quad (4)$$

entonces, se calcula la señal de referencia  $x_2^*$  de (4),

$$x_2^* = \frac{\nu_0}{u_0}. \quad (5)$$

El objetivo ahora es diseñar el control virtual  $\nu_0$  y las entradas de control  $u_0$  y  $u_1$  de tal manera que el vector del error de seguimiento  $\varepsilon := (\varepsilon_0^T, \varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T)^T \in \mathbb{R}^6$  converja a una vecindad del origen a pesar de algunas perturbaciones e incertidumbres acotadas.

### 3.1 Control Robusto para la Orientación del UMR

Considere el problema de diseño de control para el sub-sistema (3c), el cual puede ser escrita como

$$\dot{\bar{e}}_2 = e_2, \quad (6a)$$

$$\dot{e}_2 = u_1 + \bar{d}_3(t) - \dot{x}_2^*. \quad (6b)$$

Suponga que se cumple la siguiente restricción sobre los términos  $\bar{d}_3$  y  $\dot{x}_2^*$

$$\left\| \frac{d}{dt}(\bar{d}_3(t) - \dot{x}_2^*) \right\|_{\infty} \leq \zeta. \quad (7)$$

Para este sistema de segundo orden, el control  $u_1$  se diseña por una estrategia de *SMC-Continuo*, i.e., Control No Singular Terminal por Modos-Deslizantes Continuo (NTSMC-*Continuo*), Kamal et al. (2016):

$$s = \bar{e}_2 + k_1 [e_2]^{\frac{2}{3}}, \quad (8a)$$

$$u_1 = \bar{u}_1 - k_2 [s]^{\frac{1}{3}}, \quad (8b)$$

$$\dot{\bar{u}}_1 = -k_3 [s]^0. \quad (8c)$$

Una posible selección para las ganancias  $k_i$ , con  $i = 1, 3$ , está dado por Kamal et al. (2016) y representadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Ganancias del CNSTMD-*Continuo*

Grupo	1	2	3	4
$k_1$	$20\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$28.7\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$7.7\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$\zeta^{-\frac{1}{2}}$
$k_2$	$4.4\zeta^{\frac{2}{3}}$	$4.5\zeta^{\frac{2}{3}}$	$7.5\zeta^{\frac{2}{3}}$	$16\zeta^{\frac{2}{3}}$
$k_3$	$2.5\zeta$	$2\zeta$	$2\zeta$	$7\zeta$

**Teorema 1.** Kamal et al. (2016). *Se asume que existe (7) y el control  $u_1$  es diseñado de acuerdo a SMC-Continuo, i.e. (8). Entonces, en estado estable  $\varepsilon_2 = 0$ , la dinámica del error (3c) es Uniformemente Estable en Tiempo Finito.*

Note que el término de la perturbación  $g$  puede ser escrita como  $g(x_2, u_0, \nu_0) := u_0 x_2 - \nu_0 = u_0 [x_2 - x_2^*]$ , por lo tanto, resulta que

$$\|g\|_{\infty} \leq L \|e_2\|_{\infty}, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

para alguna  $L > 0$ . Entonces, de acuerdo al Teorema 1, resulta que  $e_2(t) = 0$ , para todo  $t \geq T_{\theta} > 0$ . Esto implica la perturbación  $g(x_2(t), u_0(t), \nu_0(t)) = 0$  cuando  $e_2(t) = 0$ , para todo  $t \geq T_{\theta} > 0$ .

### 3.2 Control Robusto para Posición del UMR

Debido a la estructura de la señal de referencia  $x_2^*$  en (5), la entrada de control  $u_0$  está restringida de no cruzar por cero. Por tal motivo, el diseño de  $u_0$  debe de ser reformulado. Para esto, asuma que  $u_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Por lo tanto, la dinámica del error (3a) puede ser reescrita por:

$$\dot{\varepsilon}_0 = A\varepsilon_0 + B[\sigma(u_0) + \bar{d}_1(t) - \dot{x}_d], \quad (10)$$

donde la función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es definida por

$$\sigma(u_0) := \begin{cases} u_{0 \max}, & \text{si } u_{0 \max} \leq u_0, \\ u_0, & \text{si } u_{0 \min} < u_0 < u_{0 \max}, \\ u_{0 \min}, & \text{si } u_0 \leq u_{0 \min}, \end{cases} \quad (11)$$

donde  $u_{0 \max}$  es el valor de saturación para la entrada de control  $u_0$ , mientras que  $u_{0 \min}$  es un valor positivo suficientemente pequeño para  $u_0$ , el cual es caracterizado por el conjunto  $\mathcal{U}_+ := \{u_0 \in \mathbb{R}_+ \mid u_{0 \min} < u_0 < u_{0 \max}\}$ . Con el fin de estabilizar la dinámica del error (10), se propone el siguiente control:

$$u_0 = K_0 \varepsilon_0 + \dot{x}_d \quad (12)$$

donde  $K_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  es una matriz constante de diseño. Definamos la función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\phi_0(u_0) = \sigma(u_0) - u_0$ . El siguiente lema describe algunas propiedades de la función  $\phi_0$ .

**Lema 1.** Tarbouriech et al. (2006). *Si  $\alpha - \beta$  son elementos de  $\mathcal{U}_+$ ; entonces, la función  $\phi_0(\alpha)$  satisface la desigualdad:  $\delta^{-1} \phi_0^T(\alpha) [\phi_0(\alpha) + \beta] \leq 0$ , para cualquier  $\delta \in \mathbb{R}_+$ .*

Entonces, la dinámica en lazo cerrado, con la entrada de control (12), está dado por

$$\dot{\varepsilon}_0 = [A + BK_0]\varepsilon_0 + B[\phi_0 + \bar{d}_1]. \quad (13)$$

Con el fin de analizar la estabilidad de (13), se propone una BLF, i.e.,

$$V_0(\bar{\varepsilon}_0) = \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0} \right), \quad R_0 = R_0^T > 0,$$

donde la matriz  $R_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  parametriza el elipsoide  $\mathcal{E}_{\varepsilon}(R_0, \varepsilon_0^*) := \{\bar{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0 \leq 1\}$  con  $\bar{\varepsilon}_0 := \varepsilon_0 - \varepsilon_0^*$  donde  $\varepsilon_0^* \in \mathbb{R}^2$  es un vector constante el cual define el centro del elipsoide. Note que el elipsoide  $\mathcal{E}_{\varepsilon}(R_0, \varepsilon_0^*)$  no está centrado en el origen pero debe contenerlo. Por lo tanto, la derivada de  $V_0$  a lo largo de las trayectorias del sistema (13) satisface

$$\dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) = \frac{\bar{\varepsilon}_0^T \Psi_0 \bar{\varepsilon}_0 + 2\bar{\varepsilon}_0^T R_0 [A_K \varepsilon_0^* + B(\phi_0 + \bar{d}_1)]}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0},$$

donde  $\Psi_0 := R_0 A + A^T R_0 + R_0 B K_0 + K_0^T B^T R_0$  y  $A_K := A + B K_0$ . Asuma que la perturbación  $\bar{d}_1$  satisface la restricción  $\bar{d}_1^T Q_d \bar{d}_1 \leq 1$  con  $Q_d = Q_d^T > 0$  tal que  $\|\bar{d}_1\|_{\infty} \leq d_1^+ = \lambda_{\max}^{-1/2}(Q_d)$ . Por lo tanto, la derivada de  $V_0$  se encuentra acotada superiormente por

$$\dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) \leq \frac{\gamma}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0} + \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0} \times \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_0 \\ \varepsilon_0^* \\ \phi_0 \\ \bar{d}_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Psi_0 & R_0 A_K & R_0 B & R_0 B \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma Q_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_0 \\ \varepsilon_0^* \\ \phi_0 \\ \bar{d}_1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, de acuerdo al Lema 1, con  $\alpha = K_0 \varepsilon_0 + \dot{x}_d$ ,  $\beta = K_0 \varepsilon_0 - G_0 \varepsilon_0$  y  $G_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  una matriz constante de diseño; la siguiente desigualdad

$$\delta^{-1} \phi_0^T(\alpha) [\phi_0(\alpha) + (K_0 - G_0) \varepsilon_0] \leq 0,$$

satisface para cualquier  $\delta \in \mathbb{R}_+$  si  $\alpha - \beta = \dot{x}_d + G_0\varepsilon_0$  permanece en el conjunto  $\mathcal{U}_+$ . Entonces, para que  $\dot{x}_d + G_0\varepsilon_0 \in \mathcal{U}_+$ , la siguiente desigualdad

$$u_{0\min} \leq \dot{x}_d + G_0\varepsilon_0 \leq u_{0\max},$$

debe de satisfacerse. Asuma que  $\dot{x}_d(t) \in [\underline{x}_d, \bar{x}_d]$ , para todo  $t \geq 0$ , y  $u_{0\min} < \underline{x}_d \leq \bar{x}_d < u_{0\max}$ . Entonces, se deduce que  $G_0$  debe cumplir

$$G_0\varepsilon_0 \in (u_{0\min} - \underline{x}_d, u_{0\max} - \underline{x}_d) \cap (u_{0\min} - \bar{x}_d, u_{0\max} - \bar{x}_d),$$

esto es:  $u_{0\min} - \underline{x}_d \leq G_0\varepsilon_0 \leq u_{0\max} - \bar{x}_d$ , por lo tanto, se puede establecer, basados en Boyd and Vandenberghe (2004) que  $\dot{x}_d + G_0\varepsilon_0 \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \subseteq \mathcal{U}_+$ , si existe  $G_1$  y  $G_2$  tal que las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} G_1 R_0^{-1} G_1^T + G_1 \varepsilon_0^* &\leq u_{0\max} - \bar{x}_d, \\ G_2 R_0^{-1} G_2^T + G_2 \varepsilon_0^* &\leq -u_{0\min} + \underline{x}_d, \end{aligned}$$

se cumplan. Dichas condiciones pueden ser simplificadas seleccionando  $G_0 = G_1 = -G_2$ , entonces, es posible reescribir las desigualdades anteriores como

$$\begin{aligned} G_0 R_0^{-1} G_0^T + G_0 \varepsilon_0^* &\leq u_{0\max} - \bar{x}_d, \\ G_0 R_0^{-1} G_0^T - G_0 \varepsilon_0^* &\leq -u_{0\min} + \underline{x}_d. \end{aligned}$$

Note que con las desigualdades anteriores uno está buscando el elipsoide más grande  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$  dentro  $\mathcal{U}_+$ . Entonces, seleccionando  $\varepsilon_0^* = \mu R_0^{-1} G_0^T$  para cualquier  $\mu \in (-1, 1)$ , resulta que

$$G_0 R_0^{-1} G_0^T (1 + \mu) \leq \bar{u}, \quad (14a)$$

$$G_0 R_0^{-1} G_0^T (1 - \mu) \leq \underline{u}, \quad (14b)$$

con  $\bar{u} := u_{0\max} - \bar{x}_d$  y  $\underline{u} := -u_{0\min} + \underline{x}_d$ . Con el fin de obtener la óptima posición del centro del elipsoide  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$ ,  $\mu$  se puede fijar de la siguiente manera

$$\mu = \frac{\bar{u} - \underline{u}}{\bar{u} + \underline{u}} \in (-1, 1).$$

Entonces, las condiciones (14), se reescriben como

$$\mathbf{W}_1 := \begin{pmatrix} \bar{u} & G_0 \\ G_0^T & \alpha_1 R_0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \mathbf{W}_2 := \begin{pmatrix} \underline{u} & G_0 \\ G_0^T & \alpha_2 R_0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

con  $\alpha_1 := (\bar{u} + \underline{u})/2\bar{u}$  y  $\alpha_2 := (\bar{u} + \underline{u})/2\underline{u}$ . Por lo tanto, la derivada de  $V_0$  puede ser acotada superiormente por

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) &\leq \frac{\gamma[1 + \bar{u}_\mu - \bar{\varepsilon}_0^T [P_0 - R_0] \bar{\varepsilon}_0]}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0} \\ &+ \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_0 \\ \varepsilon_0^* \\ \phi_0 \\ \bar{d}_1 \end{pmatrix}^T \mathbf{X} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_0 \\ \varepsilon_0^* \\ \phi_0 \\ \bar{d}_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\bar{u}_\mu := (\bar{u} - \underline{u})^2/2(\bar{u} + \underline{u})$ ,  $0 < P_0^T = P_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{\Psi}_0 := \Psi_0 + \gamma P_0$ ,  $\Omega := R_0 B - \delta^{-1}[K_0^T - G_0^T]$  y

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_0 & R_0 A_K & \Omega & R_0 B \\ \star & -\gamma R_0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -2\delta^{-1} I & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma Q_d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si  $\mathbf{X} \leq 0$  se mantiene, entonces obtenemos

$$\dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) \leq \frac{\gamma[1 + \bar{u}_\mu - \bar{\varepsilon}_0^T [P_0 - R_0] \bar{\varepsilon}_0]}{1 - \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0}.$$

Es decir, es claro que si  $P_0 > R_0$ , entonces existe un conjunto no vacío  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*) = \{\bar{\varepsilon}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\varepsilon}_0^T P_0 \bar{\varepsilon}_0 > 1 + \bar{u}_\mu, \bar{\varepsilon}_0^T R_0 \bar{\varepsilon}_0 \leq 1\}$ , donde  $\dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) \leq -\gamma(1 + \bar{u}_\mu)$ . Debido al hecho de que  $\dot{V}_0(\bar{\varepsilon}_0) < 0$  en el conjunto  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ , por lo tanto, tal conjunto es contractivo; y desde que  $P_0 > R_0$  y  $\mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*) \subseteq \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$ , se deduce que cualquier solución del sistema (13) que comienza en  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$  se mantiene en  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$  y converge asintóticamente a  $\mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ . Por lo tanto, basado anterior, el siguiente resultado ha sido probado.

**Teorema 2.** *Suponga que  $\varepsilon_0(0) \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$  y  $K_0\varepsilon_0(0) \in \mathbb{R}_+$ . Sean las leyes de control (11) y (12) aplicadas a la dinámica del error (10). Suponga que existen algunas constantes positivas  $\gamma, \delta > 0$ , y las matrices  $P_0 = P_0^T > 0$ ,  $R_0 = R_0^T > 0$  tal que las siguientes desigualdades matriciales*

$$\mathbf{W}_1 \geq 0, \mathbf{W}_2 \geq 0, \mathbf{X} \leq 0, P_0 > R_0, \quad (15)$$

son factibles para  $\bar{u} = u_{0\max} - \bar{x}_d$ ,  $\underline{u} = -u_{0\min} + \underline{x}_d$ , con  $\dot{x}_d(t) \in [\underline{x}_d, \bar{x}_d]$  tal que  $u_{0\min} < \underline{x}_d \leq \bar{x}_d < u_{0\max}$ , para todo  $t \geq 0$ ,  $\alpha_1 := (\bar{u} + \underline{u})/2\bar{u}$ ,  $\alpha_2 := (\bar{u} + \underline{u})/2\underline{u}$ , algunas matrices  $K_0, G_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  y  $Q_d = Q_d^T > 0$  tal que  $\|\bar{d}_1\|_\infty \leq d_1^+ = \lambda_{\max}^{-1/2}(Q_d)$ . Entonces el elipsoide  $\mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$  es asintóticamente atractivo para (10) para cualquier  $\varepsilon_0(0) \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*)$ .

**Observación 1.** *Recordando que  $w(x_2(t), u_0(t), v_0(t)) = 0$  cuando  $e_2(t) = 0$ , para todo  $t \geq T_\theta > 0$ ,  $t\|\bar{d}_2\|_\infty \leq d_2^+$ , es claro que, la entrada de control  $v_0$  puede ser diseñada como  $v_0 = K_1\varepsilon_1 + \dot{y}_d$ , con  $K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  diseñado por cualquier método lineal, ya que  $v_0$  no está restringido. Sin embargo, también se puede diseñar  $v_0$  de acuerdo al Teorema 2 si es necesario también considerar el control saturado siempre y cuando el elipsoide  $\mathcal{E}_\varepsilon(P_1, \varepsilon_1^*) = \{\bar{\varepsilon}_1 \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\varepsilon}_1^T P_1 \bar{\varepsilon}_1 \leq 1\}$ , con  $\bar{\varepsilon}_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_1^*$  y  $\varepsilon_1^* \in \mathbb{R}^2$  un vector constante, sea asintóticamente atractivo para (3b) para cualquier  $\varepsilon_1(0) \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_1, \varepsilon_1^*)$ .*

Por lo tanto, basados en los teoremas 1 y 2, se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(t) &= 0, \quad \forall t \geq T_\theta > 0, \\ \|\varepsilon_0(t)\| &\leq \lambda_{\min}^{-1/2}(P_0), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \\ \|\varepsilon_1(t)\| &\leq \lambda_{\min}^{-1/2}(P_1), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

para algunas matrices  $0 < P_0^T = P_0 \in \mathbb{R}^2$  y  $0 < P_1^T = P_1 \in \mathbb{R}^2$ . La dinámica del error (3) es UE a pesar de algunas perturbaciones acotadas con las leyes de control:

$$v = \frac{\sigma(u_0)}{\cos(\theta)}, \quad \omega = \frac{u_1(e_2, \bar{e}_2)}{\sec^2(\theta)}, \quad x_2^* = \frac{\sigma(v_0)}{\sigma(u_0)}.$$

### 3.3 Aspectos Numéricos

Con el fin de aplicar el resultado obteniendo por el Teorema 2 es necesario resolver las desigualdades no

lineales matriciales (15) con respecto a las variables  $P_0$ ,  $R_0$ ,  $K_0$  y  $G_0$  para algunos escalares positivos  $\gamma$  y  $\delta$ . La siguiente proposición nos muestra un esquema simple que se puede utilizar para una selección práctica de los parámetros de diseño.

**Proposición 1.** Si el siguiente conjunto de LMIs

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & B \\ \star & -\gamma X_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & -2\delta I & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma Q_d \end{pmatrix} \leq 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Theta_1 &:= AX_2 + X_2A^T + BY + Y^TB^T + M, \\ \Theta_2 &:= AX_2 + BY, \quad \Theta_3 := \delta B - Y^T - Z^T, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} & Z \\ Z^T & \alpha_1 X_2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \underline{u} & Z \\ Z^T & \alpha_2 X_2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} M & \gamma X_2 \\ \gamma X_2 & \gamma X_1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad X_1 < X_2, \quad (18)$$

para posibles matrices simétricas definidas positivas  $X_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  y escalares fijas positivas  $\gamma, \delta > 0$ ; entonces, las desigualdades matriciales (15) se mantienen para los mismos escalares  $\gamma, \delta$  y para las matrices  $P_0 = X_1^{-1}$ ,  $R_0 = X_2^{-1}$ ,  $K_0 = YX_2^{-1}$  y  $G_0 = ZX_2^{-1}$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para la estrategia de control propuesta se utiliza el QBot 2 fabricado por Quanser (véase Fig. 1). El QBot 2 utiliza una estación de control con un software en tiempo real QUARC<sup>®</sup>, esto nos permite crear una interfaz directa con MATLAB<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup>.

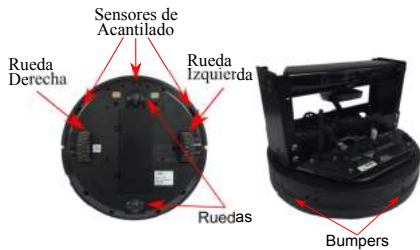


Fig. 1. Plataforma Experimental

La posición y la orientación del QBot 2 se miden por medio de sensores internos del robot. En este sentido, ambas ruedas cuentan con encoders, los cuales son utilizados para obtener información de la rotación de las ruedas y estimar los cambios en la posición a través del tiempo. Basados en esa información, se puede calcular el desplazamiento total y la orientación del robot por medio del modelo cinemático del UMR. Es importante recordar que las velocidades lineal y angular actúan como las entradas de control. Con el fin de demostrar la efectividad de la estrategia de control propuesta, se presenta una prueba experimental en el caso cuando  $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ .

Las velocidades lineal y angular máximas del QBot 2 son 0.7[m/s] y 2.5[rad/s], respectivamente. La ganancia  $K_1 = [-0.012, -1.21]$ , para el NTSMC-Continuo las ganancias son  $k_1 = \zeta^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_2 = 16\zeta^{\frac{2}{3}}$ ,  $k_3 = 7\zeta$ , con  $\zeta = 0.030$ , mientras que  $K_0 = [-0.1358, -0.7319]$ .  $K_0$  se puede encontrar resolviendo el conjunto de LMIs (16)-(18) utilizando el solucionador SeDuMi a través Yalmip. Los parámetros del control son  $u_{0\max} = 0.3$ ,  $u_{0\min} = 0.09$ ,  $\gamma = 0.40$ ,  $\delta = 0.0111$  y  $Q_d = 50$ , con las perturbaciones definidas como  $d_1 = 0.06 \cos(t) + 0.01$  y  $d_2 = 0.05 \sin(t) + 0.1$ . Las cuales son generadas por medio de software.

La trayectoria deseada es definida como

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi}t,$$

$$y_d(t) = \begin{cases} 0.2t \sin(0.01t), & \text{si } t \in [0s, 10s), \\ 2, & \text{si } t \in [10s, 32s), \\ 1.1 + \cos(0.2t), & \text{si } t \in [32s, 40s) \cup [54s, 71.2s) \cup [86s, 90s), \\ 1, & \text{si } t \in [40s, 54s) \cup [71s, 86s), \\ 1.7, & \text{si } t \in [90s, 100s]. \end{cases}$$

Este experimento se implementó utilizando el método de integración de Euler con un paso de muestreo  $h_s = 0.01$ [s]. Las condiciones iniciales del UMR son  $x(0) = -0.4$ ,  $y(0) = 0$  y  $\theta(0) = 0$ . Los resultados de seguimiento en el plano  $x-y$  y las entradas de control necesarias para realizar la trayectoria deseada son mostradas en la Fig. 2, mientras que el comportamiento de la orientación del robot es mostrado en la Fig. 3 el cual varía entre  $\pm 70^\circ$ .

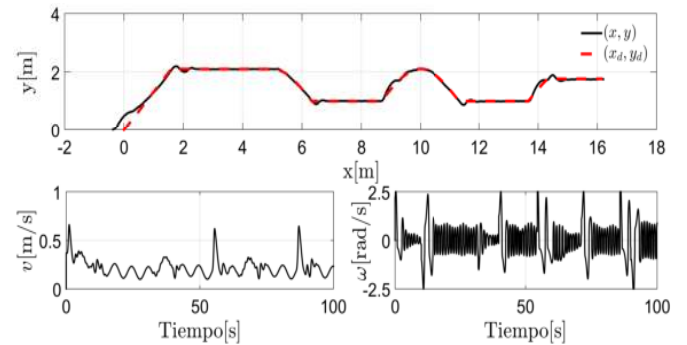


Fig. 2. Trayectoria en el plano del UMR, Velocidades Lineal y Angular

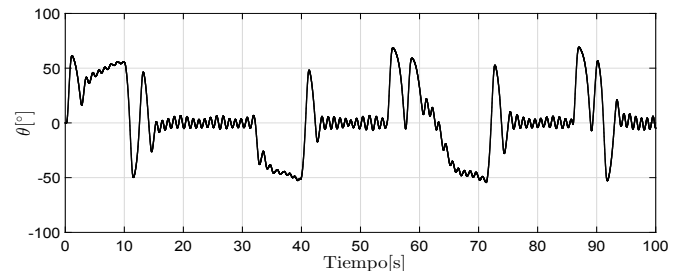


Fig. 3. Orientación del Robot

Los errores de seguimiento son ilustrados en la Fig. 4. Está claro que se presentan algunas oscilaciones alrededor de cero debido a la presencia de perturbaciones y/o fricciones no modeladas, errores en las mediciones de los sensores, entre otros. Las señales de los controles virtuales son mostrados en la Fig. 5. Podemos observar que  $u_0$  se encuentra saturado por  $u_{0\max}$  al inicio, esto debido al hecho de que  $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ , (véase Fig. 6). Por lo tanto, la trayectoria  $(e_0, \bar{e}_0)$  converge a una región alrededor del origen dado por  $\|\varepsilon_0(t)\| \leq \lambda_{\min}^{-1/2}(P_0)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

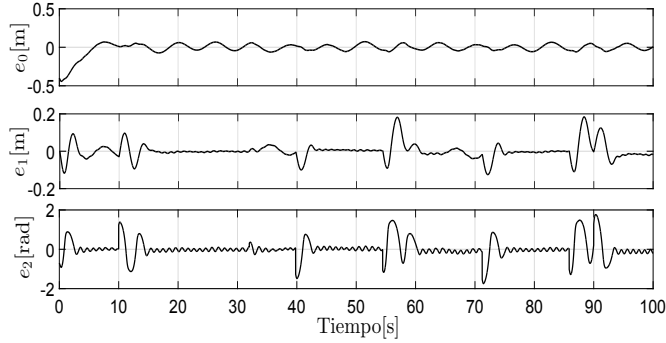


Fig. 4. Errores de Posición

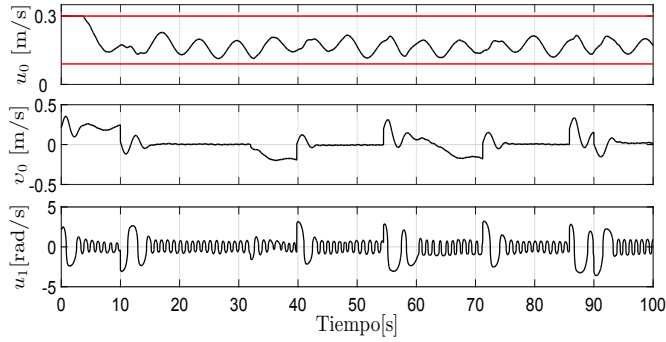


Fig. 5. Señales de Controles Virtuales

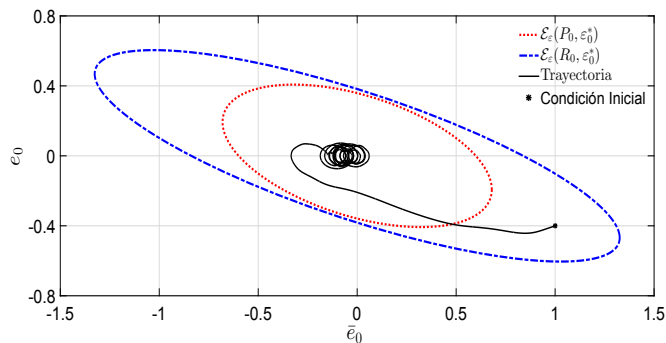


Fig. 6. Elipsoides Atractivos y trayectoria

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se aborda el problema de seguimiento de trayectorias para UMRs por medio de técnicas de control robusto. Específicamente, se propone un algoritmo de SMC-*Continuo*, para garantizar que el error de orientación converja a cero en tiempo finito, a pesar de algunas perturbaciones e incertidumbres acotadas. Por otro lado, el AEM en conjunto con un enfoque de una BLF es utilizada para diseñar el control de posición. En este sentido, los errores de posición convergen asintóticamente a una pequeña vecindad del origen. Se ha demostrado que, cuando las trayectorias inician en  $\mathcal{E}_\varepsilon(R_0, \varepsilon_0^*) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ , estas convergen asintóticamente a  $\mathcal{E}_\varepsilon(P_0, \varepsilon_0^*)$ . Algunos resultados experimentales han sido mostrados con el fin de probar el desempeño de los enfoques propuestos.

## REFERENCIAS

- Bessas, A., Benalia, A., and Boudjema, F. (2016). Integral sliding mode control for trajectory tracking of wheeled mobile robot in presence of uncertainties. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016, 1–10.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Brockett, R.W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential Geometric Control Theory*, 181–191. Birkhauser.
- Kamal, S., Moreno, J.A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., and Fridman, L. (2016). Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica*, 69, 308–314.
- Mera, M. and Salgado, I. (2018). Robust control of linear systems under input saturation using barrier lyapunov functions. *International Journal of Dynamics and Control*, 6(3), 1231–1238.
- Poznyak, A., Polyakov, A., and Azhmyakov, V. (2014). *Attractive Ellipsoids in Robust Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser.
- Salgado, I., Mera, M., and Chairez, I. (2018). Suboptimal adaptive control of dynamic systems with state constraints based on barrier lyapunov functions. *IET Control Theory & Applications*, 12(8), 1116–1124.
- Sun, Z., Dai, L., Liu, K., Xia, Y., and Johansson, K. (2018). Robust MPC for tracking constrained unicycle robots with additive disturbances. *Automatica*, 90(2018), 172–184.
- Tarbouriech, S., Prieur, C., and Silva, J.D. (2006). Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8), 1364–1371.
- Xin, L., Wang, Q., Sheb, J., and Li, Y. (2016). Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robot. *Robotics and Autonomous Systems*, 78(2016), 36–48.
- Yoo, S. (2016). Formation tracker design of multiple mobile robots with wheel perturbations: adaptive output-feedback approach. *International Journal of Systems Science*, 47(15), 3619–3630.
- Yu, X. and Liu, L. (2017). Target enclosing and trajectory tracking for a mobile robot with input disturbances. *IEEE Control Systems Letters*, 1(2), 221–226.