

Control de alunizaje por medio de control de vector de empuje.

R. Cortés-Martínez* Krishna Dev Kumar**
H. Rodríguez-Cortés*

* *Departamento de Ingeniería Eléctrica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, {rcortes,hrodriguez}@cinvestav.mx*

** *Department of Aerospace Engineering, Ryerson University, Toronto, Ontario M5B 2K3, Canada, kdkumar@ryerson.ca*

Resumen. En el presente artículo se aborda el problema de control de descenso de un alunizador hasta el aterrizaje. En la literatura, este problema se ha resuelto asumiendo que se cuenta con una dinámica completamente actuada; este artículo explora la opción de usar control de vector de empuje (CVE): una fuerza de empuje y dos ángulos que modifican su dirección. Este esquema de actuación limitado se justifica en el escenario de la ocurrencia de fallas en múltiples actuadores del vehículo. El sistema sub-actuado se modela con coordenadas cilíndricas con el fin de apreciar acoplamiento entre elementos del vector de estado. Se emplea la técnica de control de estructura variable (CEV). Simulaciones numéricas muestran la validez del controlador propuesto.

Keywords: Motor propulsor articulado, control de orientación y descenso, Alunizador.

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes, el interés por el estudio de la superficie lunar ha crecido. La misión más reciente en torno a la exploración lunar es la misión Chang'e 4 Li et al. [2016], la cual forma parte de un programa extenso de exploraciones. Existen diferentes etapas en el proceso de alunizaje, desde que el vehículo se encuentra en órbita estacionaria hasta que aterriza de forma suave. Este trabajo se enfoca en la fase final.

En general, los vehículos de alunizaje son sobre-actuados debido a la alta confiabilidad requerida. Bajo este esquema, se hace uso de un propulsor principal para controlar la maniobra de des-aceleración y descenso suave; mientras que un sistema de control de reacción (SCR) compuesto por varios pares de pequeños propulsores controlan la orientación. En las misiones Chang'e 3 y Chang'e 4 Li et al. [2016], se emplea un total de 29 actuadores (uno principal con empuje ajustable y el resto conforman el SCR). El controlador, un esquema Proporcional-Integral-Derivativo (PID), resuelve los problemas de control de orientación y de posición. Otros ejemplos de alunizadores sobre-actuados se reportan en Kwon et al. [2016], Zhang and Duan [2013]. En Kwon et al. [2016] se presenta un controlador basado en una trayectoria virtual representada con cuaternos duales, se logra un alunizaje preciso, suave y robusto contra ruido en mediciones. En Zhang and Duan [2013] se deriva un control integral que considera la dinámica de traslación y la de orientación como un sistema acoplado, de esta manera se encuentra solución al problema de control de descenso en tres dimensiones.

El control de vector de empuje (CVE) se refiere a la capacidad de cambiar la dirección del vector de empuje con respecto al marco de referencia cuerpo. Existen diferentes métodos para proveer a un vehículo aéreo de CVE tales como: inyección de fluido reactivo, paletas móviles, motores de propulsión auxiliares, y motores de propulsión articulados (*gimbal thrusters*). CVE se ha empleado en aviones y cohetes para control de orientación en maniobras de aterrizaje en Nagabhushan and Faiss [1984], Ishijima et al. [1998], Liu [2018]. En aplicaciones espaciales CVE se ha usado de manera muy limitada. Un ejemplo es la misión lunar Apollo Widnall [1971], donde un propulsor articulado alinea el vector de empuje con el centro de masa del vehículo. En este caso el actuador solamente opera a una velocidad de rotación fija. Se considera un modelo de tercer orden y se calcula el tiempo que cada actuador debe activarse para alcanzar la rotación deseada en tiempo mínimo. No se consideran efectos de acoplamiento entre la fuerza de empuje y los pares mecánicos generados por el actuador y solamente se resuelve el problema de orientación sin tomar en cuenta la trayectoria de traslación.

En algunos trabajos, CVE se emplea para controlar la orientación de vehículo espacial con la dinámica de traslación en lazo abierto. En Godard et al. [2013] se usó esta estrategia considerando incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas en un vehículo en órbita terrestre; un filtro desacopla las señales de control que aparecen forma no afín. En Saber and Zandieh [2015] se presenta un estudio de diferentes configuraciones de actuadores articulados para control de orientación.

El problema de control para sistemas subactuados en aplicaciones espaciales puede resolverse empleando la técnica de control de estructura variable (CEV). En Frias et al. [2017] se aborda el control de orientación de un vehículo en órbita terrestre mientras que en Godard et al. [2014] se presenta el caso de una formación de satélites orbitando la tierra.

En este trabajo se trata el problema de control de seguimiento de trayectoria para un sistema subactuado con un actuador modelado por ecuaciones no afines Godard et al. [2013]. Se muestra que es posible usar la técnica de CEV con control por modos deslizantes (SMC) para lograr robustez ante perturbaciones, para lograr alunizaje suave y preciso. Se elije SMC ya que ofrece simplicidad en el diseño a pesar de tratar con un sistema altamente no lineal. Este resultado se puede extender al ámbito de control tolerante a fallas en el caso de un vehículo completamente actuado, en donde se dispone de un actuador articulado sin fallas.

2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL ALUNIZADOR

El vector de posición $\mathbf{p} = [x \ r \ \theta]^\top$ del centro de masa (CM) del alunizador se expresa en coordenadas cilíndricas a partir de un marco de referencia inercial fijo en el centro de la Luna, ver Fig 1, r es la proyección de $\mathbf{p}$ sobre el plano $Y_i Z_i$, θ es el ángulo de la proyección medido desde el eje Y_i , y x es el componente a lo largo del eje X_i . El marco de referencia en ejes cuerpo es $X_b Y_b Z_b$, mientras que los marcos de referencia inercial y local son $X_i Y_i Z_i$ y $X_L Y_L Z_L$, respectivamente. El modelo puede escribirse en

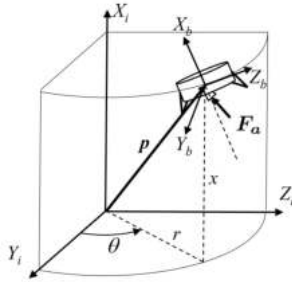


Figura 1. Posición en coordenadas cilíndricas.

forma escalar como

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} e_1^\top \mathbf{F}_g + \frac{1}{m} e_1^\top R^\top \mathbf{F}_a, \quad (1)$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{m} e_2^\top \mathbf{F}_g + r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{m} e_2^\top R^\top \mathbf{F}_a, \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{mr} e_3^\top R^\top \mathbf{F}_a, \quad (3)$$

donde m es la masa del alunizador, R es la matriz de rotación que lleva del marco de referencia local al marco de referencia cuerpo, ver Fig. 2, $\mathbf{F}_g$ es la fuerza de gravedad y $\mathbf{F}_a$ es el vector de empuje, $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^\top$, $e_2 = [0 \ 1 \ 0]^\top$, $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^\top$. La matriz de rotación es

función de los ángulos de Euler (α , ϕ y γ) en la secuencia 3-2-1 Sidi [1997] (ver Fig. 2) como

$$R = R_z(\gamma) R_y(\phi) R_x(\alpha + \theta), \quad (4)$$

$$R_x(\alpha + \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha+\theta} & s_{\alpha+\theta} \\ 0 & -s_{\alpha+\theta} & c_{\alpha+\theta} \end{bmatrix},$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} c_\phi & 0 & -s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\phi & 0 & c_\phi \end{bmatrix}, R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

y $c_x = \cos(x)$, $s_x = \sin(x)$. La dinámica rotacional es

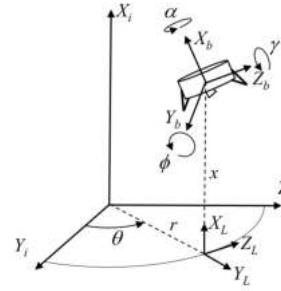


Figura 2. Orientación en ángulos de Euler.

$$\dot{\Phi} + e_1 \dot{\theta} = W^{-1} \Omega, \quad (6)$$

$$J \dot{\Omega} = J \Omega \times \Omega + \tau_g + \tau_a, \quad (7)$$

con $\Phi = [\alpha \ \phi \ \gamma]^\top$, Ω es la velocidad angular, τ_g es el par de gradiente gravitacional, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el tensor de inercia y

$$W = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\phi & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma c_\phi & c_\gamma & 0 \\ -s_\phi & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

En particular, en coordenadas cilíndricas, en (6) se puede observar una relación de acoplamiento entre ecuaciones de estado correspondientes a α y θ .

2.1 Actuador de empuje articulado

Bajo la presencia de posibles fallas en actuadores los alunizadores pueden llegar a condiciones de sub-actuación, en este artículo se analiza el caso específico en que se cuenta con un actuador de empuje articulado. Este consiste en un motor de propulsión con magnitud variable y dos posiciones angulares que pueden proveer fuerza y momento mecánico de forma acoplada siempre que la colocación del actuador sea fuera del centro de masa del vehículo, tal como se muestra en la Fig. 3. La posición del actuador está dada por el vector en ejes cuerpo $\chi = [-1; 0 \ 0]^\top$. El vector de empuje $\mathbf{F}_a$ se muestra en la Fig. 4 tal como se presenta en Godard et al. [2013] con un ajuste en la definición de los ángulos β_1 y β_2 , se define como

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} F \cos(\beta_1) \cos(\beta_2) \\ F \cos(\beta_1) \sin(\beta_2) \\ F \sin(\beta_1) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

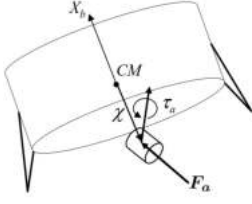


Figura 3. Ubicación del actuador.

con $F = \|\mathbf{F}_a\|$, β_1 es el ángulo sobre el plano $X_b Y_b$ y β_2 es el ángulo de elevación hacia el eje Z_b . Note que cuando $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 0$, el vector $\mathbf{F}_a$ apunta hacia el CM del alunizador y el actuador provee solo empuje F con momento mecánico igual a cero. Por otra parte, cuando

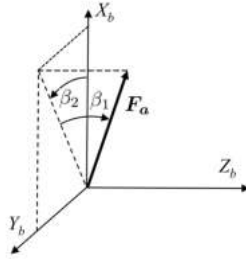


Figura 4. Vector de empuje del actuador.

β_1 y β_2 son diferentes de cero, el momento mecánico es $\boldsymbol{\tau}_a = \chi \times \mathbf{F}_a$, equivalente a

$$\boldsymbol{\tau}_a = F \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta_1) \\ -\cos(\beta_1)\sin(\beta_2) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

2.2 Perturbaciones externas

Las perturbaciones consideradas en este trabajo son debidas a la fuerza de gravedad. En la dinámica traslacional se tiene $\mathbf{F}_g = -\frac{m\mu}{(r^2+x^2)^{3/2}}[x \ r \ 0]^\top$, con μ como la constante gravitacional de la Luna. Por otra parte, el momento mecánico debido al gradiente gravitacional de acuerdo a Hughes [2012] está dado como

$$\boldsymbol{\tau}_g = 3 \frac{\mu}{\|\mathbf{p}\|^3} R \hat{\mathbf{p}} \times (JR \hat{\mathbf{p}}), \quad (11)$$

donde $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$, y en términos del marco de referencia inercial $\hat{\mathbf{p}} = -[x \ r \ 0]^\top \cdot 1/(x^2 + r^2)^{1/2}$. Sustituyendo en (11) se tiene

$$\boldsymbol{\tau}_g = 3 \frac{\mu}{\|\mathbf{p}\|^5} R[x \ r \ 0]^\top \times (JR[x \ r \ 0]^\top). \quad (12)$$

Esta perturbación resulta en expresiones matemáticas extensas en función del momento de inercia, la posición con respecto al marco de referencia local y la orientación, por lo que una cancelación exacta resulta poco práctico.

3. DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL

El controlador se diseña definiendo una superficie de deslizamiento que se obtiene después de identificar una

parte lineal del sistema, tanto en las variables de estado como en las entradas de control. Para el modelo lineal, se hace una separación de variables de estado actuadas y no actuadas y se busca controlar las últimas por medio de las primeras por medio de la técnica de CEV (Dwyer III and Sira-Ramirez [1988]). El algoritmo de optimización LQR (Linear Quadratic Regulator) se usa para obtener las ganancias de control. Se añade un componente de SMC para añadir robustez contra incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Antes de abordar el diseño del control se analiza el punto de equilibrio del sistema en lazo abierto. El sistema (1) a (7), al igualarse a cero en cada variable de estado se concluye lo siguiente. De (6) se tiene $\Omega = 0$, sustituyendo en (7) resulta en $\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\tau}_g$. Por otra parte, de (1) a (3) se encuentra $\mathbf{F}_g = -R^\top \mathbf{F}_a$, la solución de interés para dicha expresión (la que mantiene al alunizador erguido) corresponde a lo siguiente: $\|\mathbf{F}_g\| = \|\mathbf{F}_a\|$ y $R^\top = I_3$. Esta última condición obliga a $\alpha + \theta = \phi = \gamma = 0$. En conclusión, existe una fuerza de equilibrio $\mathbf{F}_a = e_3 F_e$, un radio de equilibrio $r = r_e$ y un par mecánico de equilibrio $\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\tau}_e$.

3.1 Control de estructura variable

El modelo dinámico del alunizador se reduce a un modelo que resulta de hacer una aproximación local y considerar a la mayor parte de los términos no lineales como perturbaciones del sistema. El modelo es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A_{11}(X_1)X_1 + A_{12}X_2 + f_1(X_1, X_2, U) \\ \dot{X}_2 &= B_2U + f_2(X_1, X_2, U), \end{aligned} \quad (13)$$

donde $X_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ es un vector de los estados no actuados, $X_2 \in \mathbb{R}^m$ son los estados actuados, $U \in \mathbb{R}^m$ son las entradas de control, $f_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $f_2 \in \mathbb{R}^m$ son campos vectoriales analíticos no lineales que agrupan la mayor parte de las no linealidades del modelo y que serán considerados como perturbaciones, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ es una matriz analítica no lineal que es función de X_1 , y $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices lineales invariantes en el tiempo. Suponga que existe un cambio de variables que linealiza de manera exacta a A_{11} , dado como $[X_1 \ X_2] = H(X_{1L}, X_{2L})$, el modelo puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1L} &= \bar{A}_{11}X_{1L} + \bar{A}_{12}X_{2L} + \bar{f}_1 \\ \dot{X}_{2L} &= \bar{B}_2U + \bar{f}_2, \end{aligned} \quad (14)$$

donde $\bar{f}_i = H(f_i)$, $i = 1, 2$. En la ley de control, se considera a X_{2L} como control virtual para los estados X_{1L} , de tal forma que pueda calcularse una matriz de ganancias que haga que el par $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ sea Hurwitz. La ley de control U deberá asegurar que el sistema llegue a dicha condición. Los términos no lineales de (14) se consideran perturbaciones, la parte lineal de la primer ecuación se transforma a la forma controlable. En el caso general donde la matriz de controlabilidad tiene rango menor que el orden del sistema, se tiene $X_{1L} = T^{-1}[Z_1 \ Z_2]^\top$, siendo Z_2 los estados controlables y Z_1 los estados no controlables, tal que

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= A_{uc}Z_1 \\ \dot{Z}_2 &= A_{21}Z_1 + A_cZ_2 + T\bar{A}_{12}X_{2L}.\end{aligned}\quad (15)$$

Para los estados controlables Z_2 , una ley de control $X_{2L} = -K_{lqr}Z_2$ estabiliza el sistema tomando a X_{2L} como la señal de control virtual y logrando que el par $(A_c, T\bar{A}_{12})$ sea Hurwitz. A partir de este resultado se define una estrategia SMC para el sistema (15), y siguiendo los pasos inversos se logra estabilizar (13).

Para llevar el modelo del alunizador, (1) a (7), a la forma (13), se suman y restan términos como sigue

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \left(\pm K_{re} + K_r \left(-\mathbf{F}_g + \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta}^2 \\ -2\dot{r}\dot{\theta} \end{bmatrix} + R_\alpha \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\pm \Delta R_{\phi\gamma} + R_\phi R_\gamma) \left(\pm \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_a \right) \right) \right),\end{aligned}\quad (16)$$

con

$$K_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_e \end{bmatrix}, K_{re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_e \end{bmatrix},$$

donde $\Delta R_{\phi\gamma}$ es la aproximación de ángulos pequeños de $R(\phi)R(\gamma)$, F_e y r_e son puntos de equilibrio de F y r , respectivamente. De (16) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} K_{re} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \gamma \cos(\alpha) + \phi \sin(\alpha) & * & * \\ \gamma \sin(\alpha) - \phi \cos(\alpha) & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d_1 \quad (17)$$

donde d_1 agrupa el resto de los términos, que serán tratados como perturbaciones. En esta aproximación, el término $\mathbf{F}_g$ no se linealiza y es agrupado directamente en d_1 . De forma análoga se hace una linealización para la parte rotacional (6) (7) alrededor del mismo punto de equilibrio. El término τ_g no se linealiza, quedando

$$\dot{\Phi} = e_1\dot{\theta} + I_3\Omega + d_2 \quad (18)$$

$$\dot{\Omega} = J^{-1}F_e \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + d_3, \quad (19)$$

$$d_2 = (W^{-1} - I_3)\Omega \quad (20)$$

$$d_3 = J^{-1} \left(J\Omega \times \Omega + \tau_g - F_e \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \tau_a \right), \quad (21)$$

donde I_3 es la matriz identidad de 3×3 .

Diseño de control para los estados no actuados. Se agrupan las ecuaciones (18) y (19) con (17), y se separan las variables de estado en $X_1 = [x \ r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta} \ \alpha \ \phi \ \gamma \ \omega_1]^\top$ como los estados no actuados y $X_2 = [\dot{x} \ \omega_{2L} \ \omega_{3L}]^\top$ como los estados actuados. El sistema resulta en la forma (13), donde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 1} & I_3 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & 0 \\ 0_{1 \times 4} & 0 & 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & 0 \\ 0_{1 \times 4} & 0 & 0 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0_{3 \times 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 0_{5 \times 3} \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & F_e/J_y & 0 \\ 0 & 0 & -F_e/J_z \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} F \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

donde $0_{i \times j} \in \mathbb{R}^{i \times j}$ es una matriz con elementos igual a cero. Además

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix} = \frac{F_e}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/r_e & 0 \end{bmatrix} R_\alpha^\top, \quad (22)$$

$$R_\alpha^\top = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Y los términos f_1 y f_2 quedan en función de las perturbaciones d_i como

$$f_1 = [0, 0, 0, (I_{23}d_1)^\top, d_2^\top, e_1^\top d_3]^\top \quad (23)$$

$$f_2 = [e_1^\top d_1, (I_{23}d_3)^\top]^\top \quad (24)$$

$$I_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea el siguiente cambio de variables que linealiza (13)

$$\begin{bmatrix} \phi_L \\ \gamma_L \end{bmatrix} = R_\alpha^\top \begin{bmatrix} \phi \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (25)$$

tomando la derivada de (25) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = R_\alpha \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L \\ \dot{\gamma}_L \end{bmatrix} + \dot{R}_\alpha \begin{bmatrix} \phi_L \\ \gamma_L \end{bmatrix}. \quad (26)$$

La segunda parte del lado derecho de (26) forma parte de la función $\bar{f}_1$ en (14). Sustituyendo (25) y (26) en (13), y haciendo un segundo cambio de variables

$$\begin{aligned}X_{2L} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \omega_{2L} \\ \omega_{3L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & R_\alpha^\top \end{bmatrix} X_2 \\ &= R_x(\alpha)^\top X_2,\end{aligned}\quad (27)$$

se obtiene (14), cuya parte lineal es

$$\dot{X}_{1L} = A_{11L}X_{1L} + A_{12L}X_{2L}, \quad (28)$$

con $X_{1L} = [x \ r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta} \ \alpha \ \phi_L \ \gamma_L \ \omega_1]^\top$ como los estados no actuados y $X_{2L} = [\dot{x} \ \omega_{2L} \ \omega_{3L}]^\top$ como los estados actuados. La matriz de transformación T lleva al sistema a su forma controlable, tal que $Z = TX_{1L}$,

$$\dot{Z} = \bar{A}Z + \bar{B}X_{2L}, \quad (29)$$

donde

$$\bar{A} = TA_{11L}T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{uc} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_c \end{bmatrix}, \bar{B} = TA_{12L},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de controlabilidad tiene rango 7, con los estados controlables $[z_3 \dots z_9]^T = \hat{T}X_{1L}$ con $z_3 = r$, $z_4 = (\theta - \alpha)/\sqrt{2}$, $z_5 = -\dot{\theta}$, $z_6 = -\dot{r}$, $z_7 = \gamma$, $z_8 = \phi$, $z_9 = x$, y tiene 2 estados no controlables $[z_1 \ z_2]^T$ que son estables ya que $[\dot{z}_1 \ \dot{z}_2]^T = \bar{A}_{uc}[z_1 \ z_2]^T$ con $\bar{A}_{uc} = 2^{-3/2}[1 \ -1; 1 \ -1]$, la cual tiene dos eigen-valores en 0, generando un sub-espacio de equilibrio, Khalil and Grizzle [1996]. El modo no controlable es estable y el modo inestable es controlable, por lo que el sistema completo es estabilizable. Se calcula la matriz $K_{lqr} \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$ para la parte controlable y la ley de control para (29) es $X_{2L} = -K_{lqr}Z_2$. Esto es

$$X_{2L} = -K_{lqr}\hat{T}X_{1L}, \quad (30)$$

donde $\hat{T} = T(3 : 9, 1 : 9)$ es la matriz de transformación para los estados controlables. Sustituyendo (27) se tiene

$$X_2 = R_x(\alpha)X_{2L} = -R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T}X_{1L}. \quad (31)$$

Superficie de deslizamiento. Se define una superficie de deslizamiento a partir de (31) tal que

$$S = \{X_1 \in \mathbb{R}^9, X_2 \in \mathbb{R}^3 : K_a X_2 + R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T}X_1 = 0\} \quad (32)$$

con $K_a = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$, $k_i \in \mathbb{R}_+$. Puede reemplazarse X por las coordenadas del error $\tilde{X} = X - X_d$ para la parte linealizada (Khalil and Grizzle [1996]). Además, debido a la transformación T se define $\tilde{\theta} = \theta - (\theta_d - \alpha)$ y $\tilde{\alpha} = \alpha - (\theta - \theta_d)$; por otra parte, debido al cambio de variables (25) se tiene $\tilde{\phi} = \phi - \sin(\alpha + \theta - \theta_d)\gamma_d$ y $\tilde{\gamma} = \gamma - \cos(\alpha + \theta - \theta_d)\gamma_d$. Se puede definir la superficie de deslizamiento de la siguiente forma

$$S = \Gamma\tilde{X}, \quad \Gamma = [R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T} \mid K_a]. \quad (33)$$

Cuando el sistema (13) se restringe a esta variedad, su estructura se reduce a la forma $\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}K_a^{-1}R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T}X_1$ y $\dot{X}_2 = B_2U$. La primer dinámica asegura $X_1 \rightarrow 0$, y resta asegurar que los errores de los estados actuados converjan a cero con una acción de control apropiada para U . Sea la ley de control para el sistema (13)

$$U = -S - \psi, \quad (34)$$

donde $\psi \in \mathbb{R}^3$ es la parte de control robusto contra perturbaciones e incertidumbres paramétricas¹. Este término es el que asegura que el sistema permanezca sobre la superficie de deslizamiento S , siendo de la forma $\psi = \rho \text{sgn}(S)$, con ρ una constante positiva y $\text{sgn}()$ la función signo.

¹ puede verificarse a partir del modelo (1) a (7) que las perturbaciones son diferenciables localmente y por lo tanto puede emplearse SMC para brindar robustez

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa	m	100kg
Tensor de inercia	J	$\text{diag}\{100, 90, 80\} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
Parámetro gravitacional	μ	$4.902 \times 10^{12} \text{m}^3/\text{s}^2$
Radio de la Luna	r_m	$1738 \times 10^3 \text{m}$

Tabla 1. Parámetros del alunizador.

Para dimensionar ρ se debe asegurar la condición dada en Khalil and Grizzle [1996]

$$\rho \geq |B_2^{-1}[K_a^{-1}R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T}(A_{11}(X_1)X_1 + A_{12}X_2 + f_1) + f_2]|. \quad (35)$$

Para eliminar el efecto de castaño de alta frecuencia de SMC, alternativamente se define ψ como

$$\psi = \rho \tanh\left(\frac{\rho S}{\delta}\right), \quad (36)$$

donde δ es una constante positiva. Al sustituir la ley de control, la estructura dinámica reducida queda $\dot{X}_2 = -B_2K_aX_2 - B_2R_x(\alpha)K_{lqr}\hat{T}X_1$, con $X_1 \rightarrow 0$, por lo tanto $X_2 \rightarrow 0$.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros que definen las características de la misión de alunizaje se muestran en la Tabla 1 (tomados de Kwon et al. [2016]). Los parámetros de la trayectoria y las condiciones iniciales se muestran en la Tabla 2 y en la Tabla 3, respectivamente. En la Tabla 4 se presentan los

Variable de estado	Valor deseado
x_d	$r_m + 1000(1 - \sin(\pi t/(2T)))$ [m]
r_d	$2500(1 - \sin(\pi t/(2T)))$ [m]
θ_d	0.6435 rad
α_d, ϕ_d	0 rad
γ_d	$\arctan\left(\frac{\ddot{r}_d + \mu r_d/(x_d^2 + r_d^2)^{3/2}}{\ddot{x}_d + \mu x_d/(x_d^2 + r_d^2)^{3/2}}\right)$
$\dot{x}_d$	$-\pi/(2T)1000 \cos(\pi t/(2T))$ m/s
$\dot{r}_d$	$-\pi/(2T)2500 \cos(\pi t/(2T))$ m/s
$\dot{\theta}_d$	0 rad/s
Ω_d	$[0 \ 0 \ 0]^T$ rad/s

Tabla 2. Trayectoria deseada.

Variable	Valor
$[x_0 \ r_0 \ \theta_0]$	$[r_m + 1000 \ 2500 \ 0.6435]$ m
$[\alpha \ \phi \ \gamma]$	$[0 \ 0 \ 0]$ rad
$[\dot{x}_0 \ \dot{r}_0 \ \dot{\theta}_0]$	$[-10 \ -24 \ -0.0028]$ m/s
Ω_0	$[0 \ 0 \ 0]$ rad/s

Tabla 3. Condiciones iniciales.

parámetros del controlador, las matrices Q_{lqr} y R_{lqr} del algoritmo LQR en (31) se escogen como $Q_{lqr} = \text{diag}\{1 \times 10^2, 1 \times 10^9, 4 \times 10^{12}, 1 \times 10^3, 7 \times 10^6, 7 \times 10^6, 1 \times 10^2\}$, $R_{lqr} = \text{diag}\{1 \times 10^3, 5 \times 10^6, 1 \times 10^8\}$. La matriz de ganancias obtenida es

$$K_{lqr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.316 \\ 0 & -14.14 & k_{23} & 0 & 0 & -1.31 & 0 \\ -0.001 & 0 & 0 & 0.0218 & -0.374 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $k_{23} = 1062.5$.

En la Figura 5 se muestra la trayectoria realizada por el alunizador, Como puede observarse, se logra convergencia a pesar de que las condiciones iniciales lo obligan a alejarse

Parámetros	Valor
F_e	160 N
r_e	10000 m
ρ	1
k_1, k_2, k_3	1.0, 14.0, 2.0 respectivamente
δ	5×10^1

Tabla 4. Parámetros del controlador.

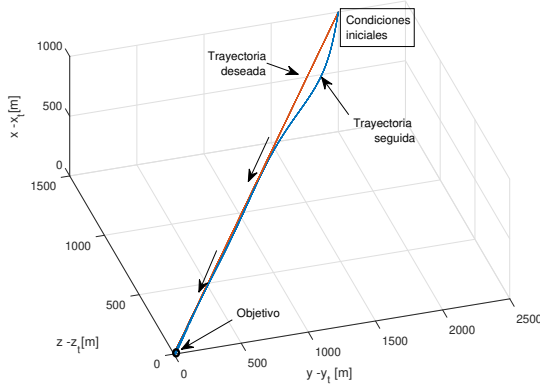


Figura 5. Trayectorias deseada y seguida por el vehículo. de la trayectoria en un inicio En la Fig. 6 se muestra el error de seguimiento en coordenadas cartesianas, y en la Figura 7 se muestran las señales de control: F , β_1 y β_2 .

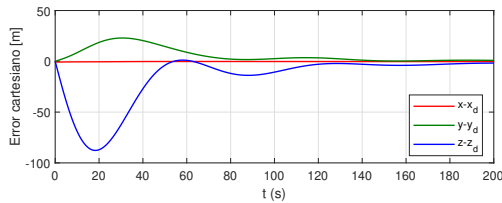


Figura 6. Error en coordenadas Cartesianas.

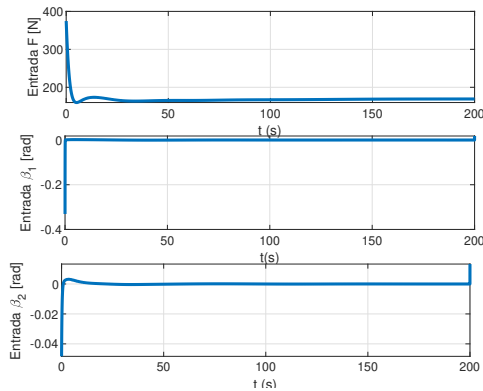


Figura 7. Señales de control, F , β_1 , β_2 .

5. CONCLUSIONES

La ley de control presentada muestra que se puede lograr precisión y descenso suave a pesar de emplear un número limitado de actuadores y un esquema de control sencillo. El resultado, aunque funciona de forma local, representa

una alternativa útil en búsqueda de reducción de costos para futuras misiones de alunizaje. Como trabajo complementario, en este esquema pueden agregarse observadores de estados. Así mismo, un estudio de Monte Carlo podría emplearse para evaluar la robustez.

REFERENCIAS

- Dwyer III, T.A. and Sira-Ramirez, H. (1988). Variable-structure control of spacecraft attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 11(3), 262–270. URL <https://doi.org/10.2514/3.20303>.
- Frias, A., de Ruiter, A.H., and Kumar, K.D. (2017). Velocity-free attitude stabilization of a nadir-pointing underactuated rigid spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 41(5), 1068–1082.
- Godard, Kumar, K.D., and Zou, A.M. (2013). A novel single thruster control strategy for spacecraft attitude stabilization. *Acta Astronautica*, 86, 55–67.
- Godard, Kumar, K.D., and Zou, A. (2014). Robust stationkeeping and reconfiguration of underactuated spacecraft formations. *Acta Astronautica*, 105(2), 495–510.
- Hughes, P.C. (2012). *Spacecraft attitude dynamics*. Courier Corporation.
- Ishijima, Y., Matsumoto, S., and Hayashi, K. (1998). Reentry and terminal guidance for vertical-landing tsto (two-stage to orbit). In *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 4120.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey.
- Kwon, J.W., Lee, D., and Bang, H. (2016). Virtual trajectory augmented landing control based on dual quaternion for lunar lander. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2044–2057.
- Li, S., Jiang, X., and Tao, T. (2016). Guidance summary and assessment of the chang'e-3 powered descent and landing. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 53(2), 258–277.
- Liu, X. (2018). Fuel-optimal rocket landing with aerodynamic controls. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42(1), 65–77.
- Nagabhushan, B. and Faiss, G. (1984). Thrust vector control of a v/stol airship. *Journal of aircraft*, 21(6), 408–413.
- Saberi, F.F. and Zandieh, M. (2015). Design and analysis of gimbal thruster configurations for 3-axis satellite attitude control. *International Journal of Computer Applications*, 112(6).
- Sidi, M.J. (1997). *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach*, volume 7. Cambridge university press.
- Widnall, W.S. (1971). Lunar module digital autopilot. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 8(1), 56–62.
- Zhang, F. and Duan, G.R. (2013). Integrated translational and rotational control for the terminal landing phase of a lunar module. *Aerospace science and technology*, 27(1), 112–126.