

Diseño de un Controlador Robusto para Seguimiento de Trayectorias Aplicado a un Robot Móvil tipo Uniciclo

Manuel Mera * Héctor Ríos **

* ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx

** CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Blvd. Revolución y Cuautémoc S/N, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. E-mail: hriosb@correo.itlalaguna.edu.mx

Resumen: En este trabajo se propone un algoritmo de seguimiento robusto para el modelo cinemático de robots móviles tipo uniciclo. La estrategia de control propuesta se basa en el conocido enfoque de modos deslizantes de primer orden, con una modificación que reduce el efecto de *chattering*. Esta estrategia toma en cuenta el modelo cinemático afectado por perturbaciones multiplicativas y considera cualquier trayectoria suave admisible, respecto a la restricción no holónoma. El control resultante es una función discontinua y con conmutación que asegura convergencia global y asintótica del error de seguimiento al origen. El resultado se ilustra por medio de simulaciones y una comparación con la implementación convencional de modos deslizantes.

Palabras Clave: Control Robusto, Robot Tipo Uniciclo, Seguimiento de Trayectorias.

1. INTRODUCCIÓN

Muchas aplicaciones industriales y de robots móviles se construyen sobre la funcionalidad del seguimiento preciso de trayectorias geométricas predefinidas (Kurfess (2004); Siciliano and Khatib (2016)). Es bien sabido que el seguimiento de trayectorias es uno de los problemas centrales para el control de robots y vehículos móviles autónomos, como se ha mostrado en Peymani and Fossen (2015); Ackermann et al. (1995). La cinemática de todos estos vehículos presentan restricciones del tipo no holónomas, por lo que actualmente su estudio sigue siendo uno de los ejes fundamentales para el desarrollo de teorías de control para sistemas mecánicos con este tipo de restricciones (ver e.g. Kapitanjuk et al. (2018); Guerra et al. (2017)).

En este sentido, el problema de control de sistemas mecánicos no holónomos, ha sido estudiado extensamente pues no solamente resulta de interés en las aplicaciones (Nakamura and Mukherjee (1990); Laumond et al. (1998)), también existe un interés relacionado al estudio teórico y su generalización (Hespanha and Morse (1999); Bloch (2003)), especialmente porque uno de los resultados más conocidos relacionados con las restricciones de naturaleza no holónoma (Brockett et al. (1983)), es que los sistemas no holónomos carecen de una condición necesaria para su estabilización por medio de funciones de control suaves, o incluso continuas.

Desde entonces numerosos y diversos enfoques se han propuesto para estabilizar este tipo de sistemas. Algunos

de los enfoques y métodos más conocidos incluyen señales de control generadas usando señales senoidales (Murray and Sastry (1993)), controladores dinámicos (M'Closkey and Murray (1994); Amer et al. (2016)), redes neuronales (Fierro and Lewis (1998); Ye (2008)), control basado en homogeneidad (Nakamura et al. (2002)) y modos deslizantes (Yang and Kim (1999); Bloch and Drakunov (1994)).

Específicamente en referencia al enfoque de modos deslizantes aplicados al problema de seguimiento para robots móviles tipo uniciclo se pueden mencionar algunos resultados recientes: Bessas et al. (2016); Goswami and Padhy (2018) y Zhai and Song (2018). En estos trabajos se consideran los modelos cinemáticos afectados por algunas perturbaciones y el problema de seguimiento con señales discontinuas asegurando una convergencia muy cercana al origen.

El enfoque que se propone está basado en modos deslizantes de primer orden. Sin embargo con el fin de reducir la oscilación de alta frecuencia cerca del origen, (i.e. *chattering*) ocasionada por la naturaleza discontinua de la señal de retroalimentación, se propone una superficie de deslizamiento construida a partir de una señal suave a pedazos pero continua en el origen. Esta selección de la superficie de deslizamiento evita una discontinuidad adicional en uno de los estados cerca del origen, reduciendo el efecto indeseable del *chattering* y mejorando considerablemente el desempeño respecto a la selección habitual de la superficie de deslizamiento.

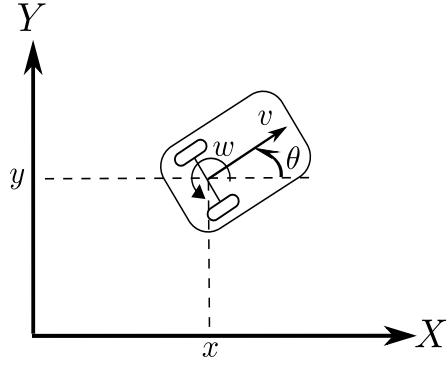


Figura 1. Diagrama del robot móvil tipo unicycle

La estructura de este artículo es la siguiente. El planteamiento del problema y las consideraciones relevantes relacionadas con la cinemática del robot móvil se presentan en la sección 2. La definición de la trayectoria deseada y el diseño del controlador propuesto se encuentran en la sección 3. La sección 4 presenta, a manera de ilustración del funcionamiento del algoritmo propuesto, algunas simulaciones y la comparación con el diseño clásico. Finalmente, las observaciones finales se pueden encontrar en la sección 5.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el modelo cinemático del Robot Móvil tipo Unicycle (ver, Fig 1):

$$\dot{x} = v \cos(\theta)(1 + d_1(t)), \quad (1a)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta)(1 + d_1(t)), \quad (1b)$$

$$\dot{\theta} = \omega(1 + d_2(t)), \quad (1c)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ denotan la posición del centro de masa del robot móvil, $\theta \in \mathbb{R}$ representa el ángulo de dirección, mientras $v, \omega \in \mathbb{R}$ son las velocidades lineal y angular respectivamente; y también representan las entradas de control. Los términos d_1 y d_2 representan perturbaciones e incertidumbres relacionadas con las dinámicas no modeladas. Estas perturbaciones son multiplicativas porque si ninguna orden le es enviada al robot móvil, este permanece sin movimiento y ninguna perturbación lo afecta independientemente del control. Tales perturbaciones surgen del tiempo de asentamiento de la señal de control interno, el cual convierte los comandos de velocidad a señales de voltaje/corriente y las envía a los motores. Además, las perturbaciones se asumen acotadas: $-1 < d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max}$, para $i = 1, 2$; donde la condición $d_{\min} > -1$ asegura que las perturbaciones no causen un cambio de signo en las entradas de control v y ω .

El objetivo de este trabajo es diseñar una estrategia de control robusta para el seguimiento de una trayectoria deseada para el robot móvil tipo unicycle a pesar de estar afectado por perturbaciones de tipo aditivo.

3. CONTROL ROBUSTO PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

3.1 Dinámica del Error de Seguimiento

Considere un modelo cinemático de referencia para el robot móvil tipo unicycle como

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r \cos \theta_r, \\ \dot{y}_r &= v_r \sin \theta_r, \\ \dot{\theta}_r &= \omega_r, \end{aligned}$$

donde v_r y ω_r son las velocidades de referencia lineales y angulares respectivamente. Estas se asumen acotadas por las constantes escalares positivas $\bar{v}_r$ y $\bar{\omega}_r$, de la forma $|v_r| \leq \bar{v}_r$, y $|\omega_r| \leq \bar{\omega}_r$. Adicionalmente, se asume que

$$\int_{t_1}^{t_2} |v_r(\tau)| d\tau > 0, \quad (2)$$

para cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ con $0 \leq t_1 < t_2$, lo cual conlleva a que la función de la velocidad lineal de referencia sea diferente de cero excepto en algunos instantes de tiempo. En otras palabras v_r sólo puede ser cero en un conjunto de puntos de medida cero.

Utilizando el cambio de coordenadas al marco de referencia fijo sobre el robot móvil, y definiendo los errores de seguimiento como

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (1 + d_2)\omega e_2 - v d_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= -(1 + d_2)\omega e_1 + v_r \sin e_3, \\ \dot{e}_3 &= -\omega d_2 + u_2, \end{aligned} \quad (4)$$

y definiendo las entradas de control virtuales u_1 y u_2 como

$$u_1 = -v + v_r \cos e_3, \quad (5)$$

$$u_2 = \omega_r - \omega. \quad (6)$$

3.2 Diseño del Controlador

Se proponen de (5) y (6) las funciones u_1 y u_2 como

$$u_i = -\rho_i \text{sign}(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

con $\rho_i > 0$ para $i = 1, 2$. Esto es

$$\begin{aligned} v &= \rho_1 \text{sign}(\sigma_1) + v_r \cos e_3, \\ \omega &= \rho_2 \text{sign}(\sigma_2) + \omega_r \end{aligned}$$

y las superficies de deslizamiento

$$\sigma_1 = e_1, \quad (8)$$

$$\sigma_2 = e_3 - \arcsin(f(e_2)), \quad (9)$$

donde f es una función suave a pedazos dada por

$$f(e_2) = -(\min\{\delta_1 |e_2|^{-1}, \delta_2\}) e_2. \quad (10)$$

con $\delta_1 \in (0, 1)$, $\delta_2 > 0$.

El resultado principal de este trabajo se presenta a continuación.

Teorema 1. Sean las funciones de control (7) aplicadas al sistema (4). Entonces, si las ganancias ρ_1 y ρ_2 se seleccionan como

$$\rho_1 > \max \left\{ \frac{\delta_1 + d_{\max} \sqrt{1 - \delta_1^2}}{1 - d_{\max}} \bar{v}_r, \frac{(1 + d_{\max}) \bar{\omega} \frac{\delta_1}{\delta_2} + \bar{v}_r d_{\max}}{1 - d_{\max}} \right\}, \quad (11)$$

$$\rho_2 > \frac{d_{\max} \bar{\omega}_r}{1 - d_{\max}}, \quad (12)$$

la dinámica del error de seguimiento (4) converge asintóticamente a cero.

Demostración. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov para la superficie σ_2

$$V_{\sigma_2} = \frac{1}{2}\sigma_2^2, \quad (13)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2} &= \sigma_2 \left(\dot{e}_3 - \frac{d}{dt} \arcsin(f(e_2)) \right) \\ &= \sigma_2 \left(u_2 - \omega d_2 - \frac{d}{dt} \arcsin(f(e_2)) \right). \end{aligned}$$

Puesto que la función f es suave a pedazos, su derivada es discontinua en $|e_2| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$. Primero se examina el caso cuando $|e_2| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$, lo que implica que $f(e_2) = -\delta_1 \text{sign}(e_2)$ y $\arcsin(f(e_2))$ es constante, entonces

$$\frac{d}{dt} \arcsin(f(e_2)) = 0, \quad (14)$$

sustituyendo (14) y ω de (6) y (7) en la derivada de V_{σ_2} se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2} &= \sigma_2 \left(-(1+d_2)\rho_2 \text{sign}(\sigma_2) - d_2\omega_r \right) \\ &\leq -((1-d_{\max})\rho_2 - d_{\max}\bar{\omega}_r) |\sigma_2| = -\gamma_3 |\sigma_2|, \end{aligned}$$

$\gamma_3 := (1-d_{\max})\rho_2 - d_{\max}\bar{\omega}_r$. Entonces, note que $\gamma_3 > 0$, si ρ_2 se selecciona como en (11) por lo tanto $|\sigma_2| = \sqrt{2}V_{\sigma_2}^{1/2}$

$$\dot{V}_{\sigma_2} \leq -\sqrt{2}\gamma_3 V_{\sigma_2}^{1/2},$$

esto implica que σ_2 alcanza 0 en un tiempo T_1 acotado por $T_1 \leq \frac{\sqrt{2}V_{\sigma_2}^{1/2}(\sigma_2(0))}{\gamma_3}$. El siguiente paso es probar que existe un instante $T_2 > T_1$ tal que $|e_2(T_2)| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$. De nuevo, si $\sigma_2 = 0$ se tiene que

$$\sin(e_3) = -\delta_1 \text{sign}(e_2), \quad \forall t \in [T_1, T_2]. \quad (15)$$

Sustituyendo (15) en (4) se obtienen las dinámicas equivalentes para e_1 y e_2 en la superficie de deslizamiento

$$\dot{e}_1 = (1+d_2)\omega e_2 - v d_1 - \rho_1 \text{sign}(e_1), \quad (16)$$

$$\dot{e}_2 = -(1+d_2)\omega e_1 - v_r \delta_1 \text{sign}(e_2). \quad (17)$$

Defina las funciones candidatas de Lyapunov para e_1 y e_2 como $V_{e_1} = \frac{1}{2}e_1^2$ y $V_{e_2} = \frac{1}{2}e_2^2$. Entonces, para el vector $(e_1, e_2)^T$ se puede escribir la función

$$V_e = V_{e_1} + V_{e_2}, \quad (18)$$

la derivada con respecto al tiempo de (18) satisface a lo largo de (16) y (17)

$$\dot{V}_e = -\rho_1 |e_1| - v_r \delta_1 |e_2| - v d_1 e_1.$$

Note que de (5) y (7), la velocidad lineal está acotada en $\sigma_2 = 0$ como $v \leq \rho_1 + \bar{v}_r \sqrt{1-\delta_1^2}$. Entonces si ρ_1 se selecciona como (11), $\dot{V}_e$ está acotada superiormente por

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq -(\rho_1 - v d_1) |e_1| - v_r \delta_1 |e_2| \\ &\leq -v_r \delta_1 (|e_1| + |e_2|) \leq -\delta_1 \sqrt{2} v_r V_e^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

La desigualdad (19) también implica que e_1 y e_2 decrecen para cualquier $e_1(T_1) \in \mathbb{R}$, $|e_2(T_1)| > \frac{\delta_1}{\delta_2}$. De hecho, integrando (19) sobre el intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$ se obtiene

$$V_e(T_2) \leq \left(\sqrt{V_e(T_1)} - \frac{\delta_1 \sqrt{2}}{2} \int_{T_1}^{T_2} |v_r(\tau)| d\tau \right)^2. \quad (20)$$

Por la continuidad de V_e ; la compacidad y la contractividad de sus curvas de nivel; por la restricción dada en (2) y la desigualdad (20), existe $T_2 > T_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} V_e(T_2) &= \frac{1}{2} \left(e_1^2(T_2) + \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \right) < V_e(T_1) \\ &= \frac{1}{2} (e_1^2(T_1) + e_2^2(T_1)), \end{aligned}$$

por lo tanto $|e_2(T_2)| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$.

El siguiente paso es considerar $|e_2| \leq \frac{\delta_1}{\delta_2}$. Para este caso $f(e_2) = -\delta_2 e_2$, $|\delta_2 e_2| \leq \delta_1 < 1$ y la derivada de $\arcsin(f(e_2))$ ahora está dada por

$$\frac{d}{dt} \arcsin(-\delta_2 e_2) = -\frac{-\delta_2(1+d_2)\omega e_1 + \delta_2 v_r \sin e_3}{\sqrt{1-\delta_2^2 e_2^2}}$$

y calculando la derivada con respecto al tiempo de (13),

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2} &= \sigma_2 \left(-(1+d_2)\rho_2 \text{sign}(\sigma_2) - d_2\omega_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\delta_2(1+d_2)\omega e_1 + \delta_2 v_r \sin e_3}{\sqrt{1-\delta_2^2 e_2^2}} \right). \end{aligned}$$

La función candidata de Lyapunov para la superficie de deslizamiento σ_1 considerada después de que $|e_2| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ es

$$V_{\sigma_1} = V_{e_1} = \frac{1}{2}e_1^2,$$

y su derivada está dada por

$$\dot{V}_{\sigma_1} = e_1 ((1+d_2)\omega e_2 - v d_1 - \rho_1 \text{sign}(e_1)).$$

Definiendo $\gamma_1 := \rho_1 - (1+d_{\max})\bar{\omega} \frac{\delta_1}{\delta_2} - \rho_1 d_{\max} - \bar{v}_r d_{\max}$ y seleccionando ρ_1 como en (11), $\dot{V}_{\sigma_1}$ está acotada superiormente por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_1} &\leq -\left(\rho_1 - (1+d_{\max})\bar{\omega} \frac{\delta_1}{\delta_2} - \rho_1 d_{\max} - \bar{v}_r d_{\max} \right) |e_1| \\ &= -\gamma_1 \sqrt{2} V_{\sigma_1}^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces, la derivada de v_{σ_1} se asegura que sea negativa y la superficie $\sigma_1 = 0$ atractiva. Además, existe un tiempo $T_{\Delta_1} \leq \frac{\sqrt{2}V_{\sigma_1}^{1/2}(\sigma_1(T_2))}{\gamma_1}$ tal que $e_1(t) = 0$ para cualquier $t \geq T_3 = T_2 + T_{\Delta_1}$. Ahora, la derivada de V_{σ_2} está acotada superiormente, después de T_3 por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2} &\leq -\left((1+d_2)\rho_2 - d_{\max}\bar{\omega}_r - \frac{\delta_2 \bar{v}_r}{\sqrt{1-\delta_1^2}} \right) |\sigma_2| \\ &= -\gamma_4 \sqrt{2} V_{\sigma_2}^{1/2}, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_4 := \left((1+d_2)\rho_2 - d_{\max}\bar{\omega}_r - \frac{\delta_2 \bar{v}_r}{\sqrt{1-\delta_1^2}} \right).$$

Nuevamente, existe un T_{Δ_2} tal que $\sigma_2(t) = 0$ para todo $t \geq T_4 = T_3 + T_{\Delta_2}$. Esto implica que para cualquier $t \geq T_4$ se tiene $\sin(e_3) = f(e_2)$ y $e_1 = 0$, entonces

$$\dot{V}_{e_2} = v_r e_2 f(e_2). \quad (21)$$

Puesto que el producto $e_2 f(e_2)$ es negativo definido y v_r es positiva en casi cualquier lugar, entonces (21) es negativa definida casi en cualquier parte. Por lo tanto, e_2 converge asintóticamente al origen. Consecuentemente, dado que

$$\lim_{e_2 \rightarrow 0} \arcsin(e_2) = 0,$$

y en $\sigma_2 = 0$, $e_3 = \arcsin(-\delta_2 e_2)$. Entonces, e_3 también converge asintóticamente al origen. Esto concluye la prueba. $\square$

Observación 1. Durante el intervalo de tiempo $[T_2, T_3]$ la función $\dot{V}_{\sigma_2}$ no se puede asegurar que sea definida negativa, sin embargo σ_2 no puede escapar a infinito durante ese intervalo de tiempo. De hecho, por continuidad, σ_2 es acotada.

Observación 2. Para la implementación de las señales de control dadas en (7) es posible aproximar la función signo, como

$$\text{sign}(x) \approx \frac{x}{|x| + \beta}, \quad (22)$$

donde β es una constante positiva cercana a cero (Shtessel et al. (2014)). Esta aproximación genera una señal de control continua que reduce el chattering, pero limita las propiedades de robustez del controlador.

4. SIMULACIONES

4.1 Seguimiento de Trayectoria: Lemniscata

Con el fin de mostrar el funcionamiento del algoritmo propuesto en la Sección 3 se considera el problema de seguimiento de una trayectoria que describe la figura de una *Lemniscata* en dos dimensiones, generada por las funciones

$$\begin{aligned} x_r(t) &= a \frac{\sin(\omega_0 t)}{1 + \cos^2(\omega_0 t)}, \\ y_r(t) &= a \frac{\sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)}{1 + \cos^2(\omega_0 t)}, \\ \theta_r(t) &= \arctan \left(\frac{\dot{y}_r(t)}{\dot{x}_r(t)} \right), \end{aligned}$$

con los parámetros $a = 10$ y $\omega_0 = 1$. Por lo tanto, para este caso se tienen las cotas $\bar{v}_r = 10$ y $\bar{\omega}_r = 3,9270$. Se consideran las siguientes perturbaciones externas

$$d_1(t) = d_2(t) = 0,05(\cos(100t) + \sin(0,1t)).$$

Para los parámetros de la función f se proponen los valores $\delta_1 = 0,75$ y $\delta_2 = 5$, consecuentemente, las ganancias para las señales de control se seleccionan como

$$\rho_1 = 113, \rho_2 = 75.$$

Las condiciones iniciales para el robot móvil se asumen en $x(0) = 0$, $y(0) = 3$ y $\theta(0) = 0$. Y se usó el paso de integración para el método de Euler $h = 0,001$ segundos.

Para esta sección, se consideró la aproximación de la función signo dada en (22) con $\beta = 0,03$. Note que la superficie de deslizamiento (9) con la función (10) no requiere esta aproximación.

La figura 2 presenta la evolución de los errores de seguimiento en el tiempo. La figura 4 muestra las trayectorias descritas por el robot en x y y , así como la trayectoria de referencia deseada. Las figuras 3a, 3b y 3c muestran la evolución con respecto al tiempo de cada una de las variables de interés. Finalmente las figuras 5a y 5b presentan las señales de control ω y v respectivamente.

4.2 Comparación con el Enfoque Convencional

De manera similar a lo propuesto en la sección 3, también es posible diseñar un control considerando la función f como $f(e_2) = -\varepsilon \text{sign}(e_2)$, con $\varepsilon \in (0, 1)$.

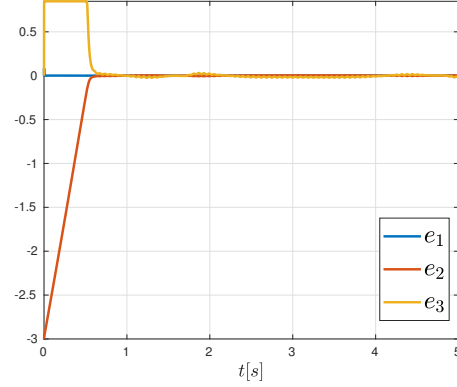


Figura 2. Evolución de la dinámica del error de seguimiento con la función suave a pedazos definida en (10).

Para este caso la prueba de convergencia se puede desarrollar de manera muy similar a la del Teorema 1, seleccionando $\rho_1 \geq \frac{\varepsilon + d_{\max} \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - d_{\max}} \bar{v}_r$. Sin embargo, la principal desventaja de este control es el incremento en el *chattering*, dado que en $\sigma_2 = 0$ se tiene $\sin(e_3) = -\varepsilon \text{sign}(e_2)$ y para $e_2 = 0$, se tiene $e_3 \in (\arcsin(-\varepsilon), \arcsin(\varepsilon))$.

Para las simulaciones se emplearon las mismas condiciones iniciales y la misma trayectoria de referencia. Las ganancias para ρ_1 y ρ_2 se mantuvieron iguales a las del caso anterior. Se consideran dos casos para ε , el primero con $\varepsilon = 0,75$ y el segundo con $\varepsilon = 0,25$.

Como es de esperarse, en el primer caso que se muestra en la figura 7, el tiempo de convergencia es similar al del algoritmo de control propuesto, sin embargo la amplitud de la oscilación cercana al origen es mucho mayor. Esto se puede apreciar en la figura 6, en la que la oscilación es demasiado grande incluso para tener un desempeño de seguimiento aceptable.

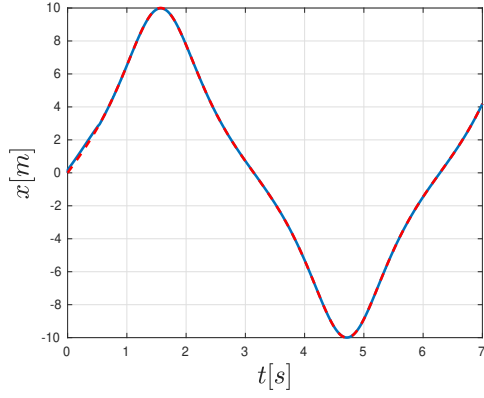
En el segundo caso, el tiempo de convergencia es mayor pero se tiene una oscilación con una amplitud mucho menor, sin embargo sigue siendo más grande que la del algoritmo propuesto.

5. CONCLUSIONES

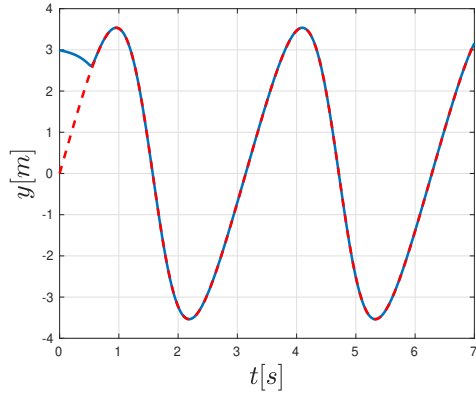
En este trabajo un algoritmo de seguimiento robusto se propuso para un robot tipo uniciclo. El control se diseñó a partir del enfoque por modos deslizantes, añadiendo una modificación que reduce el efecto del *chattering*. Esta estrategia toma en cuenta el modelo cinemático afectado por perturbaciones multiplicativas del robot móvil y considera cualquier trayectoria suave admisible, respecto a la restricción no holónoma. La implementación de los resultados se ilustraron por medio de simulaciones y una comparación con el enfoque convencional de modos deslizantes.

REFERENCIAS

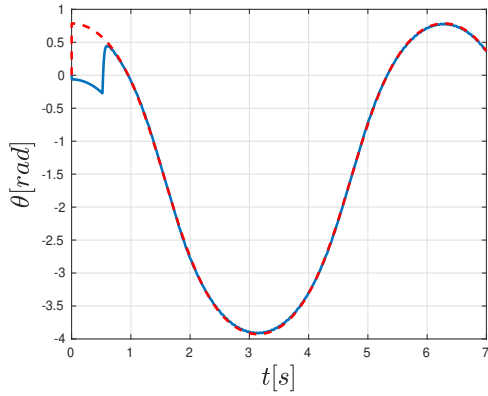
- Ackermann, J., Guldner, J., Sienel, W., Steinhauser, R., and Utkin, V.I. (1995). Linear and nonlinear controller design for robust automatic steering. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1), 132–143.
- Amer, A.F., Sallam, E.A., and Sultan, I.A. (2016). Adaptive sliding-mode dynamic controller for nonholonomic



(a) Trayectoria de x .



(b) Trayectoria de y .



(c) Trayectoria de θ .

Figura 3. Trayectorias respecto al tiempo. En azul se muestra la trayectoria del robot móvil y en rojo punteado la trayectoria de referencia.

mobile robots. In *2016 12th International Computer Engineering Conference (ICENCO)*, 230–235. IEEE.

Bessas, A., Benalia, A., and Boudjema, F. (2016). Integral sliding mode control for trajectory tracking of wheeled mobile robot in presence of uncertainties. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016.

Bloch, A. and Drakunov, S. (1994). Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2961–2963. IEEE.

Bloch, A.M. (2003). Nonholonomic mechanics. In *Nonholonomic mechanics and control*, 207–276. Springer.

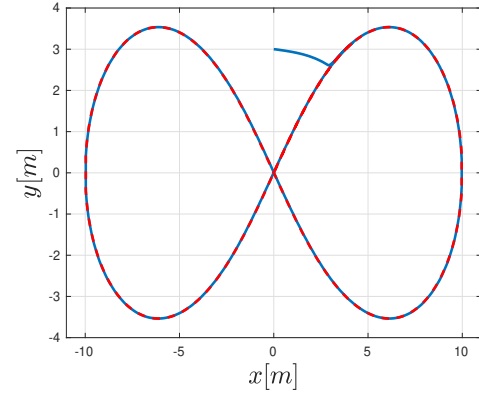
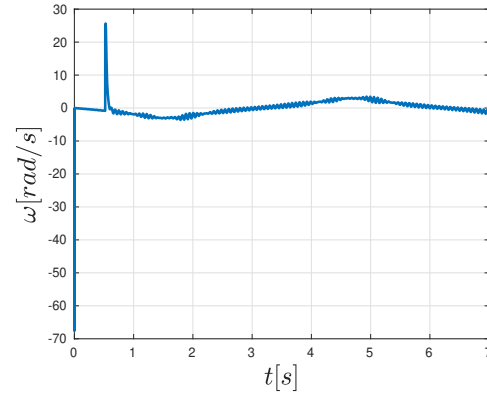
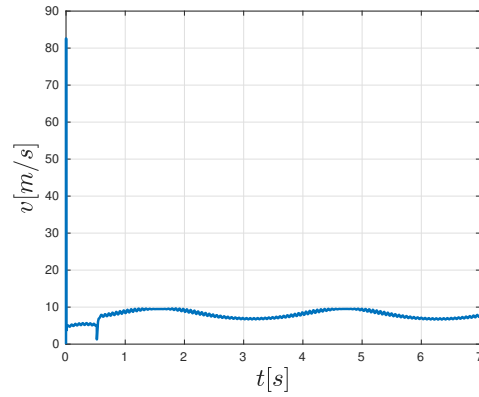


Figura 4. En rojo se muestra la trayectoria de referencia, en azul la trayectoria del robot móvil.



(a) Señal de control ω .



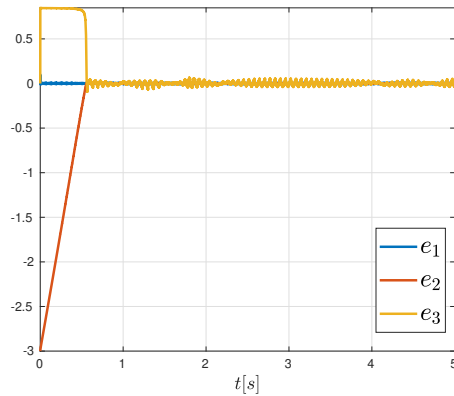
(b) Señal de control v .

Figura 5. Señales de control.

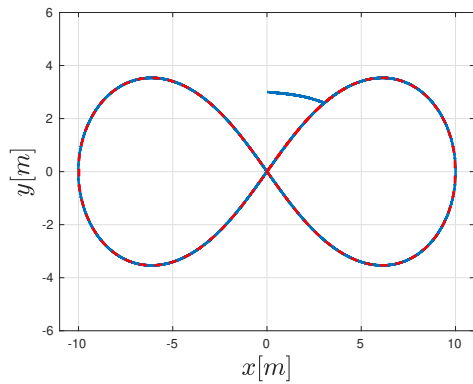
Brockett, R.W. et al. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential geometric control theory*, 27(1), 181–191.

De Marina, H.G., Kapitanyuk, Y.A., Bronz, M., Hattenberger, G., and Cao, M. (2017). Guidance algorithm for smooth trajectory tracking of a fixed wing uav flying in wind flows. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 5740–5745. IEEE.

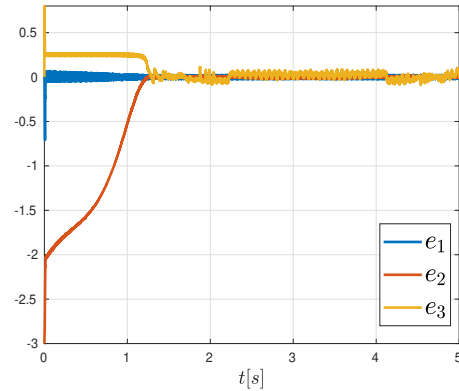
Fierro, R. and Lewis, F.L. (1998). Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on neural networks*, 9(4), 589–600.



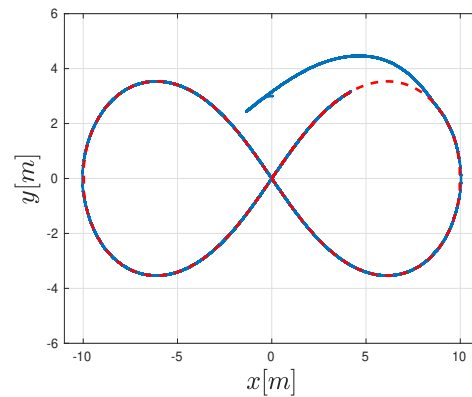
(a) Evolución en el tiempo de los errores de seguimiento.



(b) Trayectoria en x y y .



(a) Evolución en el tiempo de los errores de seguimiento.



(b) Trayectoria en x y y .

Figura 6. Resultado de las simulaciones considerando $\varepsilon = 0,75$.

Figura 7. Resultado de las simulaciones considerando $\varepsilon = 0,25$.

Goswami, N.K. and Padhy, P.K. (2018). Sliding mode controller design for trajectory tracking of a non-holonomic mobile robot with disturbance. *Computers & Electrical Engineering*, 72, 307–323.

Guerra, M., Efimov, D., Zheng, G., and Perruquetti, W. (2017). Finite-time obstacle avoidance for unicycle-like robot subject to additive input disturbances. *Autonomous Robots*, 41(1), 19–30.

Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (1999). Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching. *Automatica*, 35(3), 385–393.

Kapitanyuk, Y.A., Proskurnikov, A.V., and Cao, M. (2018). A guiding vector-field algorithm for path-following control of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(4), 1372–1385.

Kurfess, T.R. (2004). *Robotics and automation handbook*. CRC press.

Laumond, J.P. et al. (1998). *Robot motion planning and control*, volume 229. Springer.

Murray, R.M. and Sastry, S.S. (1993). Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE transactions on Automatic Control*, 38(5), 700–716.

M'Closkey, R.T. and Murray, R.M. (1994). Extending exponential stabilizers for nonholonomic systems from kinematic controllers to dynamic controllers. *IFAC Proceedings Volumes*, 27(14), 243–248.

Nakamura, H., Yamashita, Y., and Nishitani, H. (2002). Stabilization of nonholonomic systems using homoge-

neous finite-time control technique. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 181–186.

Nakamura, Y. and Mukherjee, R. (1990). Nonholonomic path planning of space robots via bi-directional approach. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1764–1769. IEEE.

Peymani, E. and Fossen, T.I. (2015). Path following of underwater robots using lagrange multipliers. *Robotics and Autonomous Systems*, 67, 44–52.

Samson, C. (1992). Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. In *Proceedings of the international conference on advanced robotics and computer vision*, volume 13, 1–1.

Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer.

Siciliano, B. and Khatib, O. (2016). *Springer handbook of robotics*. Springer.

Yang, J.M. and Kim, J.H. (1999). Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 15(3), 578–587.

Ye, J. (2008). Adaptive control of nonlinear pid-based analog neural networks for a nonholonomic mobile robot. *Neurocomputing*, 71(7-9), 1561–1565.

Zhai, J.y. and Song, Z.b. (2018). Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots. *International Journal of Control*, 1–8.