

# Control por Modos Deslizantes Continuos para Sistemas Subactuados con Grado Relativo Dos <sup>\*</sup>

L. Ovalle <sup>\*</sup>, H. Ríos <sup>\*\*</sup> y M. Llama <sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México/I.T. la Laguna, Torreón, Coahuila, 27000, México.

<sup>\*\*</sup> División de Estudios de Posgrado e Investigación, CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. la Laguna, Torreón, Coahuila, 27000, México. (e-mail: hrriosb@correo.itlalaguna.edu.mx)

---

**Resumen:** Este trabajo trata con el diseño de controladores por modos deslizantes para la estabilización de algunas clases de sistemas subactuados. El método aprovecha las propiedades mecánicas de dos clases distintas de sistemas en vez de usar transformaciones no lineales. Para realizar el diseño de los controladores, una serie de variables de deslizamiento con grado relativo dos son presentadas. Todos los resultados se prueban por medio de funciones de Lyapunov y se presentan simulaciones para una clase en específico, aplicando el esquema a un manipulador de dos grados de libertad con una articulación flexible.

*Palabras Clave:* Control por modos deslizantes, Sistemas subactuados, Control robusto, Estabilización, Sistemas inciertos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El procedimiento convencional para el diseño de controladores válidos para una clase de sistemas subactuados se realiza, en general, en base a una transformación de la dinámica del sistema a una forma normal (Olfati-Saber, 1999) para luego diseñar el controlador para tal forma. Sin embargo, esta metodología implica el uso de un esquema de linealización por realimentación el cual no es robusto y podría causar problemas cuando se trate con perturbaciones, dinámicas no modeladas o incertidumbre paramétrica. Otros problemas del diseño mencionado es que, debido a que se requiere el conocimiento de una señal de salida, el control sigue siendo diseñado caso por caso; además, el uso de la linealización por realimentación parcial se propuso para desacoplar la señal de control de alguna de las ecuaciones del sistema, lo que implica que alguna señal debe tener grado relativo cuatro con respecto a la perturbación (Olfati-Saber, 2000).

Los controladores por modos deslizantes (SMC) poseen propiedades de robustez, o inclusive insensibilidad ante perturbaciones, que los hace muy atractivos para el control de sistemas mecánicos; no obstante, el efecto de *chattering* dificulta su aplicación. Debido a esto, una fa-

milia de SMCs *continuos* se desarrolló para, teóricamente, disminuir el fenómeno de *chattering* al aplicar una ley de control continua. Aún así, se ha demostrado que las ventajas de dichos controladores se disminuyen cuando las dinámicas de los actuadores son lentas (Pérez-Ventura y Fridman, 2019). Además, es posible que los términos Hölder continuos en el controlador exciten dinámicas no modeladas, resultando en una fuente distinta de *chattering* (véase, e.g., (Utkin, 2016)), complicando el control de sistemas con grados relativos altos. El precio a pagar por la continuidad de la ley de control es la modificación de la clase de perturbaciones admisibles. Por ejemplo, el algoritmo de primer orden es capaz de manejar perturbaciones acotadas, mientras que el algoritmo *Super-Twisting*, un controlador continuo para sistemas de grado relativo unitario, es insensible ante perturbaciones Lipschitz continuas (Shtessel et al., 2014).

El diseño de SMCs es un área de investigación muy activa. Por ejemplo, en (Haghighi y Pang, 2018) se presenta un SMC adaptable para resolver el problema de formaciones de nanosatélites. En (Park y Chwa, 2009), se presenta un diseño de una variable de deslizamiento para el control de un sistema carro-péndulo; en dicho trabajo la dinámica del sistema no se lleva a la forma normal, sin embargo el controlador propuesto es discontinuo. En (Aguilar et al., 2013), se propone un controlador de dos relevadores para el control de seguimiento de un péndulo de rueda inercial. En (Vázquez et al., 2015) se utilizan controladores

---

<sup>\*</sup> Los autores agradecen el apoyo financiero de los proyectos de investigación del Tecnológico Nacional de México. L. Ovalle y H. Ríos también reconocen el apoyo financiero de los proyectos CONACYT 591548 y 270504, respectivamente.

*Twisting* y *Super-Twisting* para el control de una grúa de 5 grados de libertad (g.d.l.). En (Xu y Özgüner, 2008), se presenta el procedimiento para el control de sistemas subactuados con una forma de realimentación estricta; se diseña una variable de deslizamiento con grado relativo uno y se propone un controlador de primer orden. En (Lu et al., 2018) se propone un controlador continuo de segundo orden para la clase de sistemas considerada en (Xu y Özgüner, 2008); sin embargo el controlador es la integral de un controlador *Twisting*, lo que implica la necesidad de conocer más información del estado. La mayoría de los trabajos mencionados realizan el diseño caso por caso. Es por esto que el diseño de controladores válidos para clases completas de sistemas subactuados es importante. En el contexto de SMCs, los trabajos presentados en (Xu y Özgüner, 2008) y (Lu et al., 2018) son de particular importancia ya que en éstos se presenta un diseño válido para una clase completa de sistemas subactuados basados en cambios de variables no lineales.

De acuerdo con la discusión previa, este trabajo pretende diseñar una serie de controladores para la estabilización robusta de sistemas subactuados sin utilizar cambios de variables no lineales. Para realizar el diseño de los controladores, una serie de variables de deslizamiento con grado relativo dos son presentadas. Además, se muestran simulaciones para un manipulador de dos grados de libertad con una articulación flexible.

## 2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema mecánico:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(\tau + d_x), \quad (1)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$  es un vector de variables de configuración,  $M : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  es la matriz de inercias,  $C : \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  es una matriz que representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  representa las fuerzas debido a la gravedad,  $B = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  es una matriz de distribución de entradas,  $\tau \in \mathbb{R}$  es el vector de fuerzas generalizadas y  $d_x \in \mathbb{R}$  representa a los términos de perturbación. El sistema (1) puede ser particionado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M_{uu}(q_u, q_a) & M_{ua}(q_u, q_a) \\ M_{ua}^T(q_u, q_a) & M_{aa}(q_u, q_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a) & C_{ua}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a) \\ C_{au}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a) & C_{aa}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{ru}(q_u, q_a) \\ g_{ra}(q_u, q_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $q_u = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$  representa la parte subactuada de la dinámica y  $q_a = q_{n+1} \in \mathbb{R}$  es la parte actuada.

Se introduce la siguiente suposición sobre el sistema mecánico (2).

**Suposición 1.** *El sistema mecánico (2) cumple las siguientes condiciones:*

- i) Cada punto de equilibrio de (2) está contenido en el conjunto  $\mathcal{Q}_u := \{q_u \in \mathbb{R}^n | q_u = 0\}$ .
- ii)  $M(q)$  es no singular para todo  $q \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $\mathcal{Q}_u \in \mathcal{D}$ .

**Observación 1.** *La restricción i) implica que las variables subactuadas no tengan otro punto de equilibrio sino  $q_u = 0$ , mientras que la restricción ii) implica que no existen problemas de controlabilidad.*

Basándose en las propiedades estructurales del sistema (2), se proponen las siguientes clases de sistemas subactuados:

**Definición 1.** *Se dice que el sistema (2) pertenece a Clase I si:*

- i)  $\dim(q_u) = \dim(q_a)$ , i.e.  $q_u \in \mathbb{R}$ .
- ii) La matriz de inercias  $M(q)$  es diagonal, i.e.  $M_{ua}(q) = 0$ .
- iii) Al menos uno de los términos  $C_{uu}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a)$ ,  $C_{ua}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a)$ ,  $g_{ru}(q) \in \mathbb{R}$  no es idénticamente cero y depende de  $q_a$  or  $\dot{q}_a$ .
- iv) Si  $q_u = \dot{q}_u = 0$  se tiene que  $q_a(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .
- v)  $\frac{\partial \ddot{q}_u}{\partial \dot{q}_a} = 0$  y  $\frac{\partial \ddot{q}_u}{\partial q_a} \neq 0$  para todo  $q \in \mathcal{D}$ .

**Definición 2.** *Se dice que el sistema (2) pertenece a Clase I si:*

- i) Ningún elemento del vector  $M_{ua}(q)$  es idénticamente cero.
- ii)  $C_{ua}(q_u, q_a, \dot{q}_u, \dot{q}_a) \neq 0$  para todo  $q \in \mathcal{D}$  y  $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Observación 2.** *Un ejemplo de un sistema Clase I es un helicóptero de 3 g.d.l. mientras que un robot de 2 g.d.l con una articulación flexible pertenece a Clase II.*

**Observación 3.** *Un sistema no puede pertenecer a ambas clases. Además, si un sistema no cayese dentro de alguna de las clases propuestas, es posible encontrar una transformación no lineal para llevarlo a Clase I, siempre y cuando  $\dim(q_u) = \dim(q_a)$  (Olfati-Saber, 2000).*

El sistema mecánico (2) tiene una representación en el espacio de estados de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_v \\ \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v \\ f_u(x) + g_u(x_u, x_a)(\tau + d_x) \\ x_b \\ f_a(x) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde  $x_u : q_u \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_v := \dot{q}_u \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_a := q_a \in \mathbb{R}$ ,  $x_b := \dot{q}_a \in \mathbb{R}$ ,  $f_u(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_a(x) \in \mathbb{R}$ ,  $[f_u^T, f_a]^T = -M^{-1}(x_u, x_a)[C(x)[x_v, x_b]^T + g(x)]$ ,  $g_u(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $g_a(x) \in \mathbb{R}$ ,  $[g_u^T, g_a]^T = M(q)^{-1}B$ ,  $x := [x_u^T, x_a, x_v^T, x_b]^T$  y  $x \in \mathcal{X} := \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n+1}$ .

El objetivo del trabajo es diseñar una serie de SMCs para estabilizar sistemas que pertenezcan a alguna de las clases propuestas sin utilizar transformaciones no lineales. Todos los diseños emplearán leyes de control continuas y cada controlador será robusto ante perturbaciones Lipschitz continuas. Para esto se presentará el diseño de algunas variables de deslizamiento con grado relativo dos.

### 3. DISEÑO DE LAS VARIABLES DE DESLIZAMIENTO

Esta sección trata con el diseño de variables de deslizamiento y controladores nominales que permitan la estabilización de las clases de sistemas propuestas.

#### 3.1 Diseño para sistemas Clase I

Considere el sistema mecánico (2) y suponga que éste pertenece a la Clase I. Debido a las restricciones *ii*) y *iii*) de la Definición 1, es posible mostrar que su representación en espacio de estados está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_u \\ x_v \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v \\ f_u(x) \\ x_b \\ f_a(x) + g_a(x_u, x_a)(\tau + d_x) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

**Observación 4.** Debido a la estructura de (4), la restricción *iv*) de la definición 1 puede ser expresada como:  $f_u(0, x_a, 0, x_b) = 0$  implica que  $x_a \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Considere el siguiente cambio de variables:

$$z_1 = x_u, \quad z_3 = f_u(x), \quad z_2 = x_v, \quad z_4 = \frac{df_u(x)}{dt}.$$

Debido a la restricción *iv*) de la Definición 1, se sabe que llevar  $x_u$  a cero implica la estabilidad asintótica de  $x_a$ .

Se propone la siguiente variable de deslizamiento:

$$s = c_1 z_1 + c_2 z_2 + z_3. \quad (5)$$

El grado relativo de  $s$  con respecto de  $\tau$  es dos, esto es comprobado al derivar dos veces (5), *i.e.*:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c_1 z_2 + c_2 z_3 + z_4, \\ \ddot{s} &= c_1 z_3 + c_2 z_4 + \omega(x, t) + \left( \frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right) (\tau + d_x), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \omega(x, t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_u}{\partial x_u} x_v + \frac{\partial f_u}{\partial x_v} f_u \right) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_u}{\partial x_a} \right) x_b + \frac{\partial f_u}{\partial x_a} f_a, \end{aligned}$$

Entonces, el siguiente teorema describe la estabilidad de (4) en la variedad de deslizamiento.

**Teorema 1.** Suponga que  $f_u$  en (4) no depende explícitamente de  $x_b$ , *i.e.*  $\frac{\partial f_u}{\partial x_b} = 0$  y  $\frac{\partial f_u}{\partial x_a} \neq 0$ , y que los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  se diseñan de tal forma que la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sea Hurwitz. Si se lleva el sistema (4) a un modo deslizante, con (5) como la variable de deslizamiento, entonces el origen de (4),  $[x_u, x_a]^T = 0$ , es Asintóticamente Estable.

**Demostración.** Debido a que se alcanza un modo deslizante se sabe, de (5), que la dinámica de (4) se reduce a

$$z_4 = -c_1 z_1 - c_2 z_2 - c_3 z_3.$$

Esta ecuación representa una dinámica lineal la cual puede ser reescrita como  $\dot{z} = A_n z$  con  $z = [z_1, z_2, z_3]^T$  y  $A_n$  dadas en (6). Por lo tanto, si  $A_n$  es Hurwitz, de la definición de  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$ , se tiene que  $x_u = 0$  es Exponencialmente Estable. De acuerdo con la restricción *iv*) de la Definición 1, la estructura del sistema (4) implica que  $x_a \rightarrow 0$  si  $x_u = \dot{x}_u = 0$ ; Entonces, se puede concluir la Estabilidad Asintótica de  $x_a = 0$ .  $\square$

Considere la siguiente ley de control nominal

$$\tau = - \left( \frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right)^{-1} \left( c_1 z_3 + c_2 z_4 + \omega(x, t) - v \right). \quad (7)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado estará descrito por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \left( \frac{\partial f_u}{\partial x_a} g_a \right) d_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix},$$

donde  $\delta_x$  representa un nuevo término de perturbación.

#### 3.2 Diseño para sistemas Clase II

Considere el sistema (2) y suponga que éste pertenece a clase II. Debido a la restricción *i*) se sabe que el sistema tiene una representación en espacio de estados de la forma (3). Se propone la superficie de deslizamiento

$$s = \lambda_a x_a + \lambda^T x_u, \quad (8)$$

con  $\lambda_a \in \mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Debido a que dicha variable depende sólo de variables de posición, se puede demostrar que ésta tiene grado relativo dos con respecto a  $\tau$ . La estabilidad de la dinámica residual no es sencilla de establecer. Para este propósito se utilizará el siguiente lema.

**Lema 1.** Suponga que los parámetros de la variable de deslizamiento (8) son elegidos de tal manera que  $\lambda^T M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^* x_u) \neq \lambda_a$ , con  $\lambda^* = -\lambda_a^{-1} \lambda^T$ . Entonces, en la superficie de deslizamiento,  $s = 0$ , la dinámica (3) se reduce a:

$$\dot{x}_v = -C_2(x_u, x_v)x_v - g_2(x_u), \quad (9)$$

con

$$\begin{aligned} C_2(x_u, x_v) &= M_2(x_u)^{-1} [C_{ua}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) \lambda^* \\ &\quad + C_{uu}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v)], \\ g_2 &= M_2(x_u)^{-1} g_{ru}(x_u, \lambda^* x_u), \\ M_2(x_u) &= M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^* + M_{uu}(x_u, \lambda^* x_u). \end{aligned}$$

**Demostración.** Suponga que se alcanza un modo deslizante de tercer orden en  $s = 0$ , *i.e.*  $s(t) = \dot{s}(t) = \ddot{s}(t) = 0$ , para todo  $t \geq t_r > 0$ . Esto implica el cumplimiento de las siguientes relaciones

$$x_a = \lambda^* x_u, \quad x_b = \lambda^* x_v, \quad \dot{x}_b = \lambda^* \dot{x}_v.$$

Entonces, la primer ecuación de (2) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} M_{uu}(x_u, \lambda^* x_u) \dot{x}_v + M_{ua}(x_u, \lambda^* x_u) \lambda^* \dot{x}_v \\ + C_{uu}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) x_v \\ + C_{ua}(x_u, \lambda^* x_u, x_v, \lambda^* x_v) \lambda^* x_v + g_{ru}(x_u, \lambda^* x_u) = 0. \end{aligned}$$

Por la definición de  $M_2(x_u)$  se tiene que

$$M_2(x_u)\dot{x}_v + C_{uu}(x_u, \lambda^*x_u, x_v, \lambda^*x_v)x_v + g_{ru}(x_u, \lambda^*x_u) + C_{ua}(x_u, \lambda^*x_u, x_v, \lambda^*x_v)\lambda^*x_v = 0,$$

La cual puede ser reescrita como (9). Debido a que  $M_2 = M_{uu}(x_u, \lambda^*x_u) + M_{ua}(x_u, \lambda^*x_u)\lambda^*$ , su inversa puede ser calculada por medio de la formula de Sherman-Morrison (Sherman y Morrison, 1950), *i.e.*

$$M_2^{-1}(x_u) = -\frac{1}{1 + \lambda^*M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^*x_u)M_{ua}(x_u, \lambda^*x_u)} \times [M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^*x_u)M_{ua}(x_u, \lambda^*x_u) \times \lambda^*M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^*x_u)] + M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^*x_u),$$

la cual es no singular si se tiene que  $\lambda^T M_{ua}(x_u, \lambda^*x_u) M_{uu}^{-1}(x_u, \lambda^*x_u) \neq \lambda_a$ .  $\square$

Para establecer la estabilidad de (9) se introduce el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Suponga que las siguientes condiciones son satisfechas*

- i)  $\lambda$  y  $\lambda_a$  cumplen las condiciones del Lema 1,
- ii)  $\lambda$  y  $\lambda_a$  cumplen además con  $C_2(x_u, x_v) > 0$ ,
- iii)  $\text{sign}([H(x_u)]_i) = \text{sign}([x_u]_i)$ ,
- iv)  $[H(x_u)^T]_i$  es monótonamente creciente con respecto de  $[x_u]_i$ ,

con  $H(x_u) = M_2(x_u)^{-1}g_{ru}(x_u)$ , para todo  $x \in \mathcal{X}$ . Entonces, el origen de (3), *i.e.*  $[x_u, x_v]^T = 0$ , es Asintóticamente Estable.

**Demostración.** Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x_u, x_v) = \frac{1}{2}x_v^T x_v + \int_0^1 H(\tau x_u)^T x_u d\tau. \quad (10)$$

Debido a que  $\text{sign}([H(\tau x_u)]_i) = \text{sign}([H(x_u)]_i) = \text{sign}([x_u]_i)$  para todo  $\tau > 0$ , y  $H(0) < H(x_u)$ , para todo  $x_u \in \mathcal{D}_u = \{x_u \in \mathbb{R}^n \mid [x_u^T, x_a^T]^T \in \mathcal{D}\}$ , se tiene que el integrando del segundo término es definido positivo para todo  $x_u \in \mathcal{D}_u$ . La integral se desvanece para  $x_u = 0$  y es proporcional a  $x_u$  y  $\tau$ . Entonces, (10) es positiva semidefinida con respecto a  $x_u \in \mathcal{D}_u$ , demostrando la definidad positiva de (10) para todo  $[x_u^T, x_v^T]^T \in \mathcal{D}_u \times \mathbb{R}^n$ .

La derivada temporal de  $V$  está dada por

$$\dot{V} = -x_v^T C_2(x_u, x_v)x_v$$

Debido a que  $C_2$  es positiva definida, la derivada de la función de Lyapunov es negativa semidefinida y el máximo conjunto invariante de la derivada es  $x_v = 0$ . Esto implica, por medio del principio de invarianza (Khalil, 1996), que  $x_v \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Además, (3) converge asintóticamente a  $\dot{x}_v = M_2^{-1}g_{ru}(x_u)$ . Entonces, debido a que todos los puntos de equilibrio del sistema están contenidos en  $\mathcal{Q}_u$ , el origen de (3) es Asintóticamente Estable.  $\square$

**Observación 5.** *Las condiciones i) y ii) del Teorema 2 son condiciones satisfechas por diseño, mientras que las*

*condiciones iii) y iv) representan restricciones estructurales del sistema (2).*

Ya que la estabilidad en el modo deslizante se ha comprobado, se propone el siguiente controlador nominal

$$\tau = -\frac{(\lambda_a f_a(x) + \lambda^T f_u(x) - v)}{\lambda_a g_a(x_u, x_a) + \lambda^T g_u(x_u, x_a)}. \quad (11)$$

Entonces, la representación del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix},$$

donde  $\delta_x = [\lambda_a g_a(x_u, x_a) + \lambda^T g_u(x_u, x_a)] d_x$ .

#### 4. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO

Una vez que la estabilidad del sistema en modo deslizante ha sido comprobada y se propusieron controladores nominales para ambos casos, se discutirá el diseño de controladores robustos. Antes de mostrar el diseño de los controladores, se introduce la siguiente suposición sobre el término de perturbación  $\delta_x$ .

**Suposición 2.** *Existe una constante  $\eta > 0$  tal que*

$$\left| \frac{d}{dt} \delta_x(x) \right| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (12)$$

**Observación 6.** *La suposición 2 implica que el término de perturbación  $\delta_x$  sea Lipschitz continuo.*

Ambos controladores nominales han producido el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ v + \delta_x \end{bmatrix}, \quad (13)$$

lo cual implica que la tarea se ha reducido a la estabilización de (13) con  $v$  como la entrada a diseñar.

Una posibilidad para el diseño del control robusto es el controlador *Twisting* continuo (CTA) (Torres-González et al., 2017):

$$v = -k_1[s]^{1/3} - k_2[\dot{s}]^{1/2} + \bar{v} \quad (14)$$

$$\dot{\bar{v}} = -(k_3[s]^0 + k_4[\dot{s}]^0). \quad (15)$$

De acuerdo a (Torres-González et al., 2017), las ganancias pueden ser elegidas de acuerdo a

$$k_1 = 7\eta^{2/3}, \quad k_2 = 5\eta^{1/2}, \quad k_3 = 2.3\eta, \quad k_4 = 1.1\eta. \quad (16)$$

El siguiente teorema habla de la estabilidad de  $s = 0$ .

**Teorema 3.** (Torres-González et al., 2017) *Suponga que el sistema (13) es controlado por el CTA (14)–(15), y las ganancias del controlador son elegidas de acuerdo a (16); entonces,  $s = 0$  es Estable en Tiempo Finito.*

**Observación 7.** *Existen otros SMCs continuos para sistemas con grado relativo dos, e.g. el control singular terminal continuo (Fridman et al., 2015), el controlador no singular terminal continuo (Kamal et al., 2016) o el controlador de integral discontinua (Moreno, 2016). Todos estos algoritmos comparten las propiedades teóricas de estabilidad e información necesaria.*

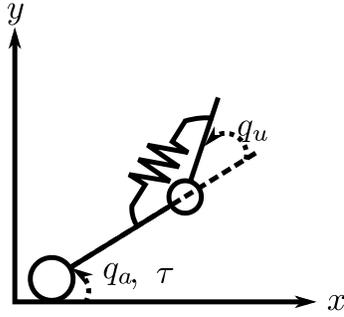


Fig. 1. Robot de 2 g.d.l. con una articulación flexible.

Los controladores basados en CTA son robustos ante perturbaciones Lipchitz continuas, proveen leyes de control continuas y aseguran que las trayectorias del sistema alcancen el conjunto  $s = 0$  en tiempo finito. La mayor desventaja de estos controladores es la necesidad de conocer  $\dot{s}$ , requiriendo más información que el algoritmo *Super-Twisting* (Levant, 1993), un SMC continuo para sistemas con grado relativo uno. Sin embargo, los esquemas de grado relativo uno usualmente requieren más información para el cálculo de la variable de deslizamiento. Entonces, desde un punto de vista teórico, las diferencias entre los esquemas no son significativas.

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se muestran algunas simulaciones para analizar el desempeño del controlador propuesto para sistemas de Clase II. Por cuestiones de espacio se omiten las simulaciones para el sistema de Clase I.

### 5.1 Simulación de un sistema Clase II

Considere un robot de 2 g.d.l con una articulación flexible (Fantoni y Lozano, 2002) (véase la Fig. 1). Este sistema consiste de un eslabón actuado por un motor y un segundo eslabón el cual no está actuado sino que está conectado al primero por medio de un resorte. Este sistema puede ser visto como una aproximación de un robot con un sólo eslabón flexible. Su dinámica está dada por:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_2 + \theta_3 c(q_u) \\ \theta_2 + \theta_3 c(q_u) & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 c(q_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kq_u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{vu} & \theta_3 s(q_u)\dot{q}_a \\ -\theta_3 s(q_u)(\dot{q}_u + \dot{q}_a) & -\theta_3 s(q_u)\dot{q}_u + f_{va} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau + d_x \end{bmatrix},$$

donde se utiliza la notación  $s(q_u) = \sin(q_u)$  y  $c(q_u) = \cos(q_u)$ . Además,  $q_a$  representa la posición angular del primer eslabón,  $q_u$  es la posición del segundo,  $\tau$  representa el par aplicado al eslabón actuado y  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $f_{vu}$ ,  $f_{va}$  y  $k$  son parámetros que dependen de las longitudes e inercias de los eslabones y la dureza del resorte. Este sistema cumple con las condiciones de la Suposición 1 y la Definición 2 para todo  $q_u$ ; por lo tanto el sistema pertenece a Clase II. Para cuestiones de simulación, se consideran los siguientes parámetros:

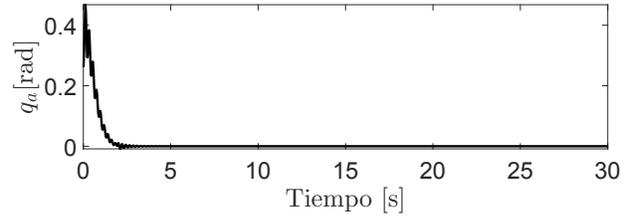


Fig. 2. Posición de  $q_a$  del sistema Clase II

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.079[\text{kgm}^2], \theta_2 = 0.024[\text{kgm}^2], \theta_3 = 0.02[\text{kgm}^2], \\ k &= 1[\text{Nm/Rad}], f_{va} = 0.001[\text{Nms/rad}], \\ f_{vu} &= 0.005[\text{Nms/rad}], q_u(0) = 0.3491[\text{rad}], \\ q_a(0) &= 0.2618[\text{rad}], \dot{q}_u(0) = \dot{q}_a(0) = 0[\text{rad/s}]. \end{aligned}$$

En las simulaciones se considera la variable de deslizamiento (8) y el CTA (14)–(15). Para probar la robustez del controlador se considera la señal de perturbación  $d_x = \sin(t) + 1$ . Además, se toma en cuenta que el objetivo de control es de estabilización, por lo que se busca que tanto  $q_a$  como  $q_u$  vayan a cero.

La selección de los parámetros de la variable de deslizamiento se hace de la siguiente manera: de acuerdo al Lema 1,  $M_2(x_u) = \theta_2 - (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_u)) \frac{\lambda}{\lambda_a}$ . Entonces, si  $\lambda_a = \bar{k} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2}$ , para algún  $\bar{k} > 0$ , se tiene que si  $\lambda < \bar{k}$ ,  $M_2(x_u)$  es positivo.

De acuerdo al Teorema 2,  $C_3(x_u, x_v) = M_2^{-1}(f_{vu} + \theta_3 \sin(x_u) \frac{\lambda^2}{\lambda_a^2} x_v)$ . La positividad de  $C_3$  no puede ser garantizada para todo valor de  $x_v$ ; por lo tanto se considera una cota superior de  $x_v$ ,  $|x_v| < x_{vm} \in (0, \infty)$ . Además, ya que  $M_2(x_u) > 0$  para  $\lambda < \bar{k}$ , se tiene que  $C_3(x_u, x_v) > 0 \Rightarrow f_{vu} > \theta_3 \frac{\lambda^2}{\lambda_a^2} x_{vm}$ . La definición de  $\lambda_a$  implica que  $\lambda < \bar{k} \sqrt{\frac{f_{vu}}{\theta_3 x_{vm}} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2}}$ . Escogiendo  $\lambda = \bar{k} \min(1, \sqrt{\frac{f_{vu}}{\theta_3 x_{vm}} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2}})$ , La positividad de  $C_3(x_u, x_v)$  se asegura.

Además, es posible comprobar que  $H(x_u) = (kx_u)(\theta_2 - (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_u)) \frac{\lambda}{\lambda_a})^{-1}$ . Debido a que el término inverso es positivo con los valores propuestos para  $\lambda$  y  $\lambda_a$  se sabe que  $\text{sign}(H(x_u)) = \text{sign}(x_u)$  y como el dicho término decrece conforme  $|x_u|$  se incrementa,  $H_2(x_u)$  es estrictamente creciente para  $|x_u| < \frac{\pi}{2}$ . Estos parámetros tienen los siguientes valores numéricos:  $\lambda_a = 7.3607$ ,  $\bar{k} = 4$ ,  $x_{vm} = 0.9085$ , y  $\lambda = 3.8139$ .

Las Figs. 2 y 3 muestran la evolución de  $q_a$  y  $q_u$ , respectivamente. La respuesta de estas variables parecen ser oscilatorias, esto puede ser atribuido a la manera en que las trayectorias del sistema en lazo cerrado son influenciadas por el CTA. Sin embargo el objetivo de control es alcanzado.

Las Figs. 4 y 5 muestran la respuesta de  $s$  y la entrada de control, respectivamente. Note que  $s$  alcanza el cero en tiempo finito. La principal desventaja del método es la oscilación presente en la señal de control. Esta desventaja puede ser atenuada al seleccionar un algoritmo menos

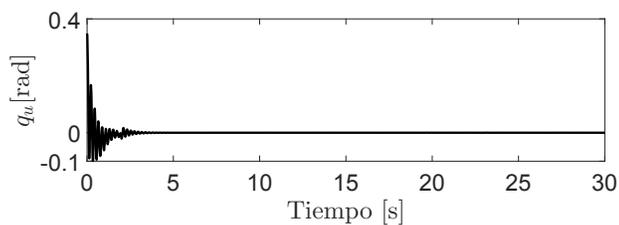


Fig. 3. Posición de  $q_u$  del sistema Clase II

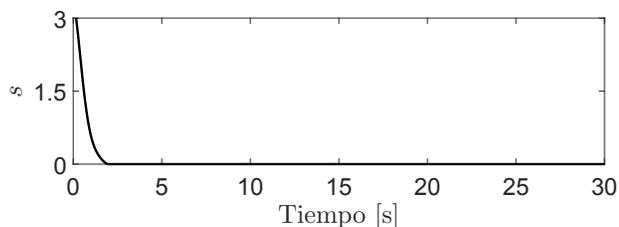


Fig. 4. Variable de deslizamiento para el sistema Clase II

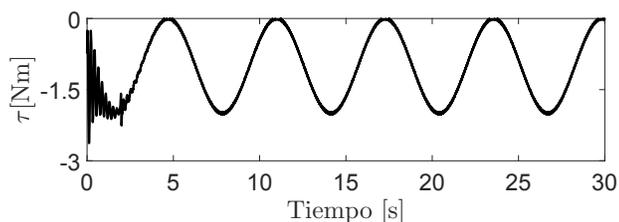


Fig. 5. Señal de control para el sistema Clase II

agresivo, como es el caso del controlador singular terminal continuo.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron SMCs para resolver el problema de estabilización para un par de clases de sistemas subactuados aprovechando las propiedades estructurales de los mismos, *i.e.* no se realizaron transformaciones no lineales. Para diseñar los controladores, se introdujeron algunas variables de deslizamiento adecuadas. La estabilidad del sistema fue discutida y la metodología se comprobó mediante simulaciones en un robot de 2 g.d.l con una articulación flexible.

## REFERENCIAS

Aguilar, L., Iriarte, R., y Fridman, L. (2013). Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, 350(1), 92–106.

Fantoni, I. y Lozano, R. (2002). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media.

Fridman, L., Moreno, J.A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., y Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. En *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, 5–35. Springer.

Haghighi, R. y Pang, C.K. (2018). Robust concurrent attitude-position control of a swarm of underactuated nanosatellites. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(1), 77–88.

Kamal, S., Moreno, J.A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., y Fridman, L.M. (2016). Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica*, 69, 308 – 314.

Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.

Lu, B., Fang, Y., y Sun, N. (2018). Continuous sliding mode control strategy for a class of nonlinear underactuated systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(10), 3471–3478.

Moreno, J.A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. En *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 142–147.

Olfati-Saber, R. (1999). Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum. En *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 2, 1174–1181 vol.2.

Olfati-Saber, R. (2000). Cascade normal forms for underactuated mechanical systems. En *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000.*, volumen 3, 2162–2167. IEEE.

Park, M. y Chwa, D. (2009). Swing-up and stabilization control of inverted-pendulum systems via coupled sliding-mode control method. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(9), 3541–3555.

Pérez-Ventura, U. y Fridman, L. (2019). When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? frequency domain criteria. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 810–828.

Sherman, J. y Morrison, W.J. (1950). Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *Ann. Math. Statist.*, 21(1), 124–127.

Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., y Levant, A. (2014). Conventional sliding mode observers. En *Sliding Mode Control and Observation*, 105–141. Springer.

Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L.M., y Moreno, J.A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 80, 119 – 126.

Utkin, V. (2016). Discussion aspects of high-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3), 829–833.

Vázquez, C., Fridman, L., Collado, J., y Castillo, I. (2015). Second-order sliding mode control of a perturbed-crane. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(8).

Xu, R. y Özgüner, Ü. (2008). Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 44(1), 233 – 241.