

Diseño de Observadores para Sistemas Híbridos Lineales con Saltos Periódicos

Héctor Ríos* y Jorge Dávila**

* CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna,
División de Estudios de Posgrado e Investigación, Blvd. Revolución y
Cuauhtémoc S/N, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. (e-mail:
hriosb@correo.itlalaguna.edu.mx)

** Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de Posgrado e
Investigación, ESIME-UPT, C.P. 07340, CDMX, México. (e-mail:
jadavila@ipn.mx)

Abstract: En este artículo se proponen observadores híbridos para la estimación del estado en sistemas híbridos lineales con saltos periódicos. Los observadores propuestos poseen una estructura tipo Luenberger y su síntesis está dada en términos de Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs, por sus siglas en inglés, Linear Matrix Inequalities) proporcionando un diseño constructivo. La estructura de las LMIs depende de algunas propiedades estructurales de los sistemas híbridos lineales. Ejemplos numéricos ilustran la viabilidad de los métodos propuestos.

Keywords: Diseño de Observadores, Sistemas Híbridos, Sistemas Lineales.

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento resultante de la interacción entre dinámicas continuas y discretas puede ser descrito perfectamente por medio de un sistema híbrido. Este tipo de sistemas complejos ha sido estudiado durante las últimas décadas debido a su gran utilidad para la descripción de una gran variedad de sistemas, por ejemplo, choques de bolas de billar, el péndulo de Newton, el rebote de una pelota, robot caminante, control de potencia con tiristores, controles de muestra y retención, sistemas de control cuantificados, *etc.* Se ha puesto mucha atención en los problemas relativos a la estabilidad y estabilización de este tipo de sistemas, así como las técnicas de diseño basadas en estas propiedades (vea, *por ejemplo*, Branicky (1998), Goebel et al. (2012) y Lygeros et al. (2003)).

En un contexto no híbrido, la importancia del estudio de las propiedades sistemáticas que permiten la reconstrucción del estado, ha probado su eficiencia, dando lugar a resultados tales como el bien conocido test de rango de Popov-Belevitch-Hautus para sistemas lineales Kailath (1985). Así mismo, las condiciones para la observabilidad del estado en sistemas lineales han sido usadas de manera constructiva para el diseño de observadores. Las condiciones para la observabilidad de sistemas lineales conmutados han sido estudiadas durante las últimas décadas, proporcionando de manera similar al caso no conmutado, herramientas como un test de rango para sistemas lineales

autónomos, vea el trabajo de Vidal et al. (2003), o por medio de condiciones algebraicas como las presentadas por Babaali and Pappas (2005) para sistemas autónomos no conmutados. De manera similar, las propiedades de observabilidad han sido explotadas para el diseño de observadores, dando lugar a poderosas herramientas de estimación para diferentes clases de sistemas híbridos. La caracterización de la observabilidad para sistemas lineales conmutados con saltos en el estado, así como el uso constructivo de la propiedad de observabilidad, y su uso para el diseño de observadores que garantizan convergencia exponencial del error de estimación, ha sido presentado por Tanwani et al. (2013). Las mencionadas propiedades han sido explotadas también, para el diseño de observadores con convergencia en tiempo-finito (vea, por ejemplo, Davila et al. (2012) y Gómez-Gutiérrez et al. (2015)) así como para el diseño de observadores homogéneos con convergencia uniforme Mincarelli et al. (2016). Entre los sistemas híbridos, una clase muy importante es la presentada por sistemas con impulsos Bainov and Simeonov (1989). Para esta clase de sistemas híbridos, el estado es gobernado por una dinámica de tiempo continuo, llamada flujo, pero también está sujeto a efectos impulsivos que dependen del tiempo o de los mismos estados y que producen cambios abruptos. Estos reciben el nombre de saltos Zavalishchin and Sesekin (1997). Una diversidad de fenómenos puede ser descrita mediante cambios instantáneos en el estado del sistema en ciertos instantes de tiempo, por ejemplo electrónica de potencia, sistemas con muestreo, modelos de ritmo en medicina y biología, sistemas modulados en frecuencia, algunos movimientos

* H. Ríos agradece el apoyo financiero de CONACYT 270504. J. Dávila el apoyo financiero de SIP-IPN 20195310.

de misiles y aeronaves, *etc.* En este sentido, el estudio de este tipo de sistemas híbridos es relevante y resulta de gran importante. Este artículo se enfoca en el estudio de esta clase de sistemas utilizando el enfoque híbrido propuesto por Goebel et al. (2012).

Recientemente, los conceptos de observabilidad y detectabilidad han sido extendidos por Possieri and Teel (2017) a la clase de sistemas híbridos lineales en los que una restricción de periodicidad ha sido impuesta a la dinámica de salto, proporcionando condiciones similares a las del criterio de Popov-Belevitch-Hautus. Un primer acercamiento al diseño de observadores para sistemas lineales con saltos ha sido presentado por Bernard and Sanfelice (2018). De manera similar, Carnevale et al. (2012) y Carnevale et al. (2016), han propuesto algunas condiciones estructurales que permiten garantizar la regulación por retroalimentación de salida para sistemas lineales híbridos. Recientemente, en el mismo orden de ideas, condiciones suficientes tanto implícitas como explícitas fueron dadas por Zattoni et al. (2018) para la existencia de un regulador dinámico por retroalimentación híbrido. Particularmente, en Carnevale et al. (2012), se propuso el diseño de un observador para sistemas lineales híbridos detectables. Para el caso de existencia de entradas desconocidas, Conte et al. (2017), basado en nociones geométricas, propone un observador híbrido para estimar una función lineal del estado, para sistemas lineales híbridos con saltos. Sin embargo, los mencionados trabajos no son dados en una forma constructiva.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema lineal híbrido de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (1a)$$

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ex \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d, \quad (1b)$$

$$y = Cx, \quad (1c)$$

donde $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$ y la variable de tiempo $\tau(t, k) \in [0, \tau_d]$ representan el estado del sistema; y el parámetro $\tau_d \in \mathbb{R}_{>0}$ es una constante conocida que impone una condición de salto periódico. La variable $y(t, k) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema. Las condiciones iniciales están dadas por $x(0, 0) = x_0$ y $\tau(0, 0) = 0$. Las matrices A , E y C son conocidas y tienen dimensiones apropiadas.

Entonces, cada solución del sistema (1) está definida en el *dominio de tiempo híbrido*

$$\mathcal{T} := \{(t, k), t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \mathbb{N}\},$$

donde $t_k := k\tau_d$ y $t_{k+1} := (k+1)\tau_d$. Las soluciones de (1) son llamadas también *arcos híbridos*, *i.e.*, funciones locales absolutamente continuas que mapean $(t, k) \in \mathcal{T}$ en el conjunto correspondiente. Sea $\varphi(t, k, x_0)$ la solución del sistema (1) en el tiempo híbrido $(t, k) \in \mathcal{T}$, con condición inicial x_0 . Abusando de la notación, el sistema

(1) se dice Lineal Invariante en el Tiempo (LIT) dado que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ satisfacen que $\varphi(t, k, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \varphi(t, k, x_1) + \beta \varphi(t, k, x_2)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\tau(0, 0) = 0$, la solución $\varphi(t, k, x_0)$ es igual a la solución del sistema (1) en el tiempo híbrido $(t + h\tau_d, k + h) \in \mathcal{T}$, con condición inicial $x(t_h, h) = x_0$, para cada $(t, k) \in \mathcal{T} \cap ([t_h, \infty) \times \{h, h+1, \dots\})$, $h \in \mathbb{N}$.

El objetivo de este artículo es diseñar observadores híbridos para la estimación del estado del sistema (1) con base solamente en información de la salida y .

2.1 Nociones de estabilidad

Algunas definiciones de estabilidad uniforme y estabilidad entrada estado (ISS) se introducen para el sistema (1) (para más detalles vea Goebel et al. (2012) y Teel et al. (2013)).

Definición 1. Dado un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y un conjunto cerrado $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la distancia de \bar{x} a \mathcal{A} se define como $|\bar{x}|_{\mathcal{A}} := \inf_{a \in \mathcal{A}} |\bar{x} - a|$. Dada una constante $\mu > 0$, define $\mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^o := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : |\bar{x}|_{\mathcal{A}} < \mu\}$.

Definición 2. Para el sistema (1), el conjunto cerrado $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se dice que es Exponencialmente Estable (ES) si existen números reales $\alpha, \mu, k > 0$ tales que, cada solución $\varphi(t, k, x_0, w)$, que satisface $|\varphi(0, 0, x_0, w_0)|_{\mathcal{A}} < \mu$, satisface

$$|\varphi(t, k, x_0, w)|_{\mathcal{A}} \leq k |\varphi(0, 0, x_0, w_0)|_{\mathcal{A}} e^{-\alpha(t+k)}, \quad \forall (t, k) \in \mathcal{T}. \quad (2)$$

Se dice Global Exponencialmente Estable (GES) si existen números reales $\mu, k > 0$ tales que cada solución $\varphi(t, k, x_0, w)$ satisface (2), sin importar la condición inicial.

3. DISEÑO DE OBSERVADORES HÍBRIDOS

3.1 Dinámica de Flujo Observable

Considere el siguiente observador híbrido tipo Luenberger

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{x} + L[y - C\hat{x}] \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (3a)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\hat{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d, \quad (3b)$$

donde $\hat{x}(t, k) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación del estado del sistema $x(t, k)$; y el parámetro $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es una matriz de diseño. Las condiciones iniciales están dadas por $\hat{x}(0, 0) = \hat{x}_0$ y $\tau(0, 0) = 0$.

La dinámica del error de estimación del estado $\epsilon(t, k) := x(t, k) - \hat{x}(t, k)$, obtenida entre el sistema (1) y el observador (3), está dada a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A - LC]\epsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (4a)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\epsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d. \quad (4b)$$

Para la dinámica de estimación del error (4), defina el conjunto cerrado $\mathcal{A} := \{0\} \times [0, \tau_d] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. El siguiente Teorema presenta un procedimiento basado en el cálculo de una Desigualdad Matricial Lineal (Linear Matrix Inequality - LMI) para diseñar el observador híbrido (3) y garantizar que, para la dinámica del error de estimación (4), el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES. Un resultado parecido fue presentado por Carnevale et al. (2012).

Teorema 3. Sea el observador híbrido (3) aplicado al sistema híbrido (1). Sea el par (A, C) observable. Considere que existen matrices $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que las siguientes LMIs

$$PA + A^T P - YC - C^T Y^T \leq -(\alpha + \lambda)P, \quad (5a)$$

$$E^T P E - P e^{\alpha \tau_d - \lambda} \leq 0, \quad (5b)$$

son factibles para algunas constantes fijas $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ y $\tau_d > 0$. Entonces, eligiendo $L = P^{-1}Y$, el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES.

Prueba.

Considere la función candidata de Lyapunov $V(\epsilon, \tau) = \epsilon^T P \epsilon e^{\alpha(\tau - \tau_d)}$. Note que V , restringida a $\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]$, es positiva definida y radialmente no acotada. Por lo tanto, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (4) está dada por

$$\dot{V}(\epsilon, \tau) = \epsilon^T [PA_l + A_l^T P + \alpha P] \epsilon e^{\alpha(\tau - \tau_d)}, \quad (6)$$

donde $A_l := A - LC$. Por otro lado, se tiene que

$$V(\epsilon^+, \tau^+) - V(\epsilon, \tau) = \epsilon^T E^T P E \epsilon e^{-\alpha \tau_d} - \epsilon^T P \epsilon,$$

Note que, de acuerdo a Teel et al. (2013), Si las condiciones $\dot{V}(\epsilon, \tau) \leq -\lambda V(\epsilon, \tau)$, $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\lambda} V(\epsilon, \tau)$, se satisfacen para toda $\lambda > 0$ y toda $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$; entonces, para el sistema (4), el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES.

Entonces, si la LMI (5a) es realizable con $Y = PL$, se tiene que $\dot{V}(\epsilon, \tau) \leq -\lambda V(\epsilon, \tau)$ se satisface para todo $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d])$. La factibilidad de (5a), para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$, es garantizada por el hecho de que el par (A, C) es observable; y entonces, siempre existe $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tal que se satisface $PA_l + A_l^T P \leq -(\alpha + \lambda)P$. Además, si la LMI (5a) es satisfecha, $\dot{V}(\epsilon, \tau) \leq -\lambda V(\epsilon, \tau)$ se satisface para toda $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$.

Con el objetivo de satisfacer $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\alpha} V(\epsilon, \tau)$, la LMI (5b) debe ser satisfecha para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\tau_d > 0$. La realizabilidad de (5b) es garantizada para un valor adecuado de α . Además, si la LMI (5b) se satisface, $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\alpha} V(\epsilon, \tau)$ se satisface para toda $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$. ■ Note que la realizabilidad de (5b) es equivalente a satisfacer la condición

$$\alpha \tau_d - \lambda \geq \ln \left(\frac{\sigma^2(E) \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}} \right)$$

Entonces, es posible fijar α dependiendo del valor de λ y τ_d , como se muestra:

$$\alpha \geq \frac{1}{\tau_d} \left[\ln \left(\frac{\sigma^2(E) \gamma_2}{\gamma_1} \right) + \lambda \right], \gamma_1 I \leq P \leq \gamma_2 I \quad (7)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ son constantes fijas. Note que si $P = P^T > 0$ satisface $\gamma_1 I \leq P \leq \gamma_2 I$ para constantes fijas $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, entonces (7) garantiza que (5b) sea satisfecha.

3.2 Dinámica de Flujo No-Observable

Proporcionaremos ahora, las condiciones de convergencia para el error de estimación del estado cuando la dinámica de flujo es no-observable y es aplicado el observador híbrido (3). Con este objetivo, considere las siguientes matrices

$$\bar{A} = T A T^{-1} = \begin{pmatrix} A_o & 0 \\ A_3 & A_{\bar{o}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{E} = T E T^{-1}, \quad \bar{C} = C T^{-1} = (C_o \ 0),$$

$$T = (O_a^T, \bar{O}_a^T)^T, \quad \bar{O}_a \in \ker(O),$$

donde $O := (C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T)^T$, $O_a := (C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n_o-1})^T)^T$, con $A_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $A_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-n_o) \times (n-n_o)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-n_o) \times n_o}$ con $n_o = \text{rank}(O)$.

Teorema 4. Considere la aplicación del observador híbrido (3) al sistema híbrido (1). Sea el par (A, C) no-observable. Considere que existen matrices $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que las siguientes LMIs

$$PA + A^T P - YC - C^T Y^T \leq -(\alpha + \lambda)P, \quad (8a)$$

$$E^T P E - P e^{\alpha \tau_d - \lambda} \leq 0, \quad (8b)$$

son realizables para constantes $\alpha < -2\text{Re}\{\lambda_{\max}(A_{\bar{o}})\} - \lambda$, $\lambda > 0$ y $\tau_d > 0$. Entonces, seleccionando $L = P^{-1}Y$, para el error de estimación del estado (4) el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES.

Prueba. Siempre existe una matriz no singular T tal que la dinámica del error (4) toma la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_l \bar{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (9a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E} \bar{\epsilon} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d, \quad (9b)$$

donde $\bar{\epsilon} = T \epsilon = (\epsilon_o^T, \epsilon_{\bar{o}}^T)^T$ y $\bar{L} = TL = (L_1^T \ L_2^T)^T$

$$\bar{A}_l = T A_l T^{-1} = \begin{pmatrix} A_o - L_1 C_o & 0 \\ A_3 - L_2 C_o & A_{\bar{o}} \end{pmatrix}.$$

Note que $\epsilon_o \in \mathbb{R}^{n_o}$ representa el error de estimación de la parte observable, mientras que $\epsilon_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n-n_o}$ representa el error de estimación de la parte no-observable de la dinámica de flujo (1a).

Considere la función candidata de Lyapunov $V(\bar{\epsilon}, \tau) = \bar{\epsilon}^T P \bar{\epsilon} e^{\alpha(\tau - k\tau_d)}$. Por lo tanto, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (4) está dada por

$$\dot{V}(\bar{\epsilon}, \tau) = \bar{\epsilon}^T [P A_l + A_l^T P + \alpha P] \bar{\epsilon} e^{\alpha(\tau - \tau_d)}, \quad (10)$$

y

$$V(\bar{\epsilon}^+, \tau^+) - V(\bar{\epsilon}, \tau) = \bar{\epsilon}^T E^T P E \bar{\epsilon} e^{-\alpha \tau_d} - \bar{\epsilon}^T P \bar{\epsilon}, \quad (11)$$

Note que la realizabilidad de (8a) está garantizada si la matriz $\tilde{A}_l + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I =$

$$\begin{pmatrix} A_o - L_1 C_o + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I & 0 \\ A_3 - L_2 C_o & A_{\bar{o}} + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I \end{pmatrix},$$

es Hurwitz. Evidentemente, dado que el par (A_o, C) es observable, solamente es posible asignar los eigenvalores de $A_o - L_1 C_o$ tales que $\Lambda(A_o - L_1 C_o + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I) \in \mathbb{C}_+$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Sin embargo, no es posible asignar los eigenvalores de $A_{\bar{o}}$, y α se debe fijar de tal forma que $\alpha < -2\text{Re}\{\lambda_{\max}(A_{\bar{o}})\} - \lambda$, i.e. tal que $\Lambda(A_{\bar{o}} + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I) \in \mathbb{C}_+$, y garantizando que $\tilde{A}_l + \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)I$ sea Hurwitz.

Por otro lado, la factibilidad de (8b) está garantizada para un conjunto adecuado de valores de α y λ . ■

Observación 1. *En este caso, la detectabilidad de la dinámica de flujo no es necesaria dado que sólo se necesita que $\alpha < -\text{Re}\{\lambda_{\max}(A_{\bar{o}})\}$. Entonces, la detectabilidad del par (A, C) no juega ningún rol para satisfacer dicha condición.*

3.3 Dinámica de Salto Observable

En esta sección se considera que la dinámica de flujo es no-detectable pero que la dinámica de salto es observable. Con este objetivo, se propone el siguiente observador híbrido tipo Luenberger

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (12a)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\hat{x} + L[y - C\hat{x}] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d, \quad (12b)$$

donde $\hat{x}(t, k) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación del estado del sistema $x(t, k)$; y el parámetro $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es una matriz de diseño. Las condiciones iniciales están dadas por $\hat{x}(0, 0) = \hat{x}_0$ y $\tau(0, 0) = 0$. Note que en este caso la inyección de salida es aplicada a la dinámica de salto del observador.

La dinámica del error de estimación entre el sistema (1) y el observador (12) está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\epsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau \in [0, \tau_d], \quad (13a)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon^+ \\ \tau^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [E - LC]\epsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \tau = \tau_d. \quad (13b)$$

Para la dinámica de estimación del error (13), defina el conjunto cerrado $\mathcal{A} := \{0\} \times [0, \tau_d] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Las condiciones para estabilidad exponencial global del conjunto \mathcal{A} , están dadas en el siguiente Teorema.

Teorema 5. *Considere la aplicación del observador híbrido (12) al sistema (1). Sea el par (E, C) observable. Considere que existen matrices $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que las siguientes LMIs*

$$PA + A^T P \leq -2\alpha P, \quad (14a)$$

$$\begin{pmatrix} P & PE - YC \\ E^T P - C^T Y^T & Pe^{\alpha(\tau_d - 1)} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (14b)$$

son realizables para alguna constante $\alpha < -\text{Re}\{\lambda_{\max}(A)\}$ y $\tau_d > 0$. Entonces, seleccionando $L = P^{-1}Y$, para la dinámica del error de estimación (13) el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES.

Prueba.

Considere la función candidata de Lyapunov $V(\epsilon, \tau) = \epsilon^T P \epsilon e^{\alpha(\tau - \tau_d)}$. Entonces, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (13) satisface

$$\dot{V}(\epsilon, \tau) = \epsilon^T [PA + A^T P + \alpha P] \epsilon e^{\alpha(\tau - \tau_d)}, \quad (15)$$

mientras

$$V(\epsilon^+, \tau^+) - V(\epsilon, \tau) = \epsilon^T E_l^T P E_l \epsilon e^{-\alpha\tau_d} - \epsilon^T P \epsilon. \quad (16)$$

donde $E_l := E - LC$. Entonces, como en el Teorema 3, si las condiciones $\dot{V}(\epsilon, \tau) \leq -\alpha V(\epsilon, \tau)$, $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\alpha} V(\epsilon, \tau)$, son satisfechas para todo $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$; entonces, para el sistema (13), queda garantizada la estabilidad global exponencial de \mathcal{A} .

Entonces, si la LMI (14a) es realizable, se tiene que $\dot{V}(\epsilon, \tau) \leq -\alpha V(\epsilon, \tau)$ se satisface para toda $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$. La realizabilidad de tal LMI es asegurada si la matriz $A + \alpha I$ es Hurwitz. Con este objetivo, α debe seleccionarse tal que $\alpha < -\text{Re}\{\lambda_{\max}(A)\}$ y garantice que $A + \alpha I$ es Hurwitz.

Por otro lado, dado que el par (E, C) es observable, siempre es posible asignar los eigenvalores de E_l de tal forma que $E_l^T P E_l - P e^{\alpha(\tau_d - 1)} \leq 0$, para cualquier $\alpha < -\text{Re}\{\lambda_{\max}(A)\}$ y algún $\tau_d > 0$; entonces, $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\alpha} V(\epsilon, \tau)$ se satisface para todo $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$. Sin embargo, la desigualdad matricial

$$E_l^T P E_l - P e^{\alpha(\tau_d - 1)} \leq 0 \quad (17)$$

es no-lineal con respecto a P y L . Con el objetivo de proponer LMIs para diseñar L de manera constructiva, es posible utilizar el complemento de Schur para reescribir (17) como

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & E_l \\ E_l^T & P e^{\alpha(\tau_d - 1)} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Entonces, aplicando la transformación cuadrática no singular $\mathcal{T}_1 = \text{diag}(P, I)$ a la desigualdad anterior, se obtiene (14b). Por lo que se ha probado que si la LMI (14b) es realizable, entonces (17) es satisfecha, y entonces $V(\epsilon^+, \tau^+) \leq e^{-\alpha} V(\epsilon, \tau)$ se satisface para toda $(\epsilon, \tau) \in (\mathbb{R}^n \times [0, \tau_d]) \cap \mathcal{A} + \mu \mathbb{B}^\circ$ con $\mu = \infty$. ■

3.4 Dinámica de Salto No-Observable

Ahora, las condiciones de convergencia a cero del error de estimación del estado cuando el observador híbrido (12) es aplicado, cuando ni la dinámica del flujo, ni la dinámica

de salto son detectables. Con este objetivo, considere las siguientes matrices

$$\bar{A} = \bar{T}A\bar{T}^{-1}, \quad \bar{C} = C\bar{T}^{-1} = (\bar{C}_o \ 0),$$

$$\bar{E} = \bar{T}E\bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} E_o & 0 \\ E_3 & E_{\bar{o}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{T} = (O_e^T, \bar{O}_e^T)^T, \quad \bar{O}_e \in \ker(\bar{O}),$$

donde $\bar{O} := (C^T, (CE)^T, \dots, (CE^{n-1})^T)^T$, $O_e := (C^T, (CE)^T, \dots, (CE^{\bar{n}_o-1})^T)^T$, con $E_o \in \mathbb{R}^{\bar{n}_o \times \bar{n}_o}$, $E_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}_o) \times (n-\bar{n}_o)}$, $E_3 \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n}_o) \times \bar{n}_o}$, con $\bar{n}_o = \text{rank}(\bar{O})$. Entonces, las condiciones para garantizar la estabilidad exponencial global del conjunto cerrado \mathcal{A} , para la dinámica del error de estimación (13), para una dinámica de salto no observable, están dadas en el siguiente Teorema.

Teorema 6. *Considere que el observador híbrido (12) es aplicado al sistema (1). Sea el par (E, C) no-observable. Considere que existen matrices $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que las siguientes LMIs*

$$PA + A^T P \leq -2\alpha P, \quad (18a)$$

$$\begin{pmatrix} P & PE - YC \\ E^T P - C^T Y^T & P e^{\alpha(\tau_d - 1)} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (18b)$$

son realizables para una constante fija $\alpha < -\text{Re}\{\lambda_{\max}(A)\}$ y algún $\tau_d > 0$. Entonces, seleccionando $L = P^{-1}Y$, para la dinámica del error de estimación (13), con $w \equiv 0$, el conjunto cerrado \mathcal{A} es GES.

Prueba. La prueba de este Teorema se omite por razones de espacio, sin embargo se puede obtener directamente de los Teoremas anteriores. ■

Observación 2. *En este caso la dinámica de salto no necesita ser detectable dado que sólo se requiere seleccionar el valor adecuado de α , y entonces, la detectabilidad del par (E, C) no es factor para satisfacer dicha restricción, así como también la detectabilidad del par (A, C) no tiene influencia en satisfacer (18a).*

Observación 3. *Se puede combinar el observador (3) con el observador (12) con el objetivo de aumentar los grados de libertad del observador conservando la estructura tipo Luenberger. Sin embargo, tal como fue mostrado en el Teorema 6, se puede obtener una estimación del estado compensando, por medio de la inyección del error de estimación, en la dinámica de salto.*

Es importante destacar que si (A, C) es observable, entonces el sistema híbrido (1) es observable, i.e.

Definición 1. *El sistema (1) con tiempo híbrido $(t, k) \in \mathcal{T}$ se dice que es:*

i) Observable si para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\tau(0, 0) = 0$ lo siguiente se satisface: $y(t, k) = C\varphi(t, k, x_0, 0) = 0$ para todo $t + k \geq 0$ implica que $\varphi(t, k, x_0, 0) = 0$ para todo $t + k \geq 0$.

ii) Detectable si para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\tau(0, 0) = 0$ lo siguiente se satisface: $y(t, k) = C\varphi(t, k, x_0, 0) = 0$ para todo $t + k \geq 0$ implica que $\varphi(t, k, x_0, 0) \rightarrow 0$ conforme $t + k \rightarrow \infty$.

No obstante, es posible ver de los Teoremas anteriores, que la observabilidad de la dinámica de flujo no es necesaria para la existencia de un observador que estime el estado del sistema híbrido. En este sentido, la detectabilidad del sistema híbrido implica la existencia de un observador, como fue anteriormente estudiado por Carnevale et al. (2012).

En este sentido también, la detectabilidad del sistema híbrido (1) está garantizada sí y sólo sí $(Ee^{A\tau_d}, O)$, con $O = (C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T)^T$, es detectable (vea, e.g. Possieri and Teel (2017) y Carnevale et al. (2012)). Por lo tanto, con el objetivo de verificar la detectabilidad del par $(Ee^{A\tau_d}, O)$, se puede utilizar el siguiente test de Lyapunov:

Proposición 1. *El par $(Ee^{A\tau_d}, O)$ es detectable sí y sólo sí, existe una solución $0 < Q^T = Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a la desigualdad*

$$e^{A^T \tau_d} E^T Q E e^{A \tau_d} - Q - O^T O < 0. \quad (19)$$

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Por limitaciones de espacio, en esta sección se muestran los resultados correspondientes a una dinámica de salto no observable. Las simulaciones se realizaron en Matlab con el método de discretización de Euler, un tiempo de muestreo de 0.001 y el “solver” SeDuMi corriendo en YALMIP para Matlab fue usado para resolver las LMIs.

Considere el sistema híbrido lineal (1) con $\tau_d = 0.8$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1.5 & 0 \\ -0.5 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0),$$

y condiciones iniciales $x(0, 0) = (5, -5)^T$. Es fácil mostrar que $\text{rank}(O_e) = 1$; entonces, la dinámica de salto es no-observable. Note también que $\text{rank}(O) = 1$ y $A_{\bar{o}} = 1$; entonces, la dinámica de flujo es no-detectable. Sin embargo, Se puede mostrar que

$$Q = \begin{pmatrix} 4.7960 & 1.4673 \\ 1.4673 & 2.5087 \end{pmatrix},$$

es solución de la desigualdad matricial (19), dada en la Proposición 1. Por lo que el sistema híbrido es *detectable* y entonces existe un observador. El observador híbrido (12) es implementado con condiciones iniciales $\hat{x}(0, 0) = (1, 1)^T$. La siguiente solución factible de las LMIs es obtenida fijando $\alpha = -2.2110$, lo que satisface $\alpha < -2.0100 = -\text{Re}\{\lambda_{\max}(\bar{A})\} - \lambda$, con $\lambda = 0.01$, se obtiene:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9687 & 0.6244 \\ 0.6244 & 1.7085 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1.6781 \\ -1.5678 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1.4924 \\ -0.3722 \end{pmatrix}.$$

Las trayectorias del sistema, la estimación del estado y el error de estimación del estado son presentado en la Fig. 1. El error de estimación converge exponencialmente a cero, tal como fue mostrado en el Teorema 6.

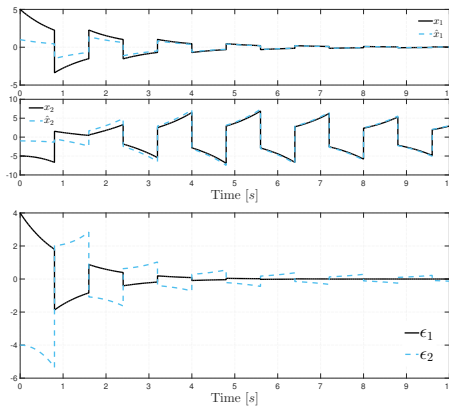


Fig. 1. Trayectorias del Sistema Híbrido, Estimación de Estado y Error - Salto No-Observable

5. CONCLUSIONES

Con el objetivo de resolver el problema de estimación del estado para sistemas híbrido lineales con saltos periódicos, se proponen distintos diseños de observadores híbridos. Los observadores propuestos poseen una estructura tipo Luenberger y si síntesis se propone por medio de la solución de Desigualdades Matriciales Lineales. Por lo tanto, la metodología de diseño de observadores propuesta, es completamente constructiva. Es importante mencionar que la estructura del observador, así como la estructura de las Desigualdades Matriciales Lineales dependen de la observabilidad del flujo y de la dinámica del salto, respectivamente. Sin embargo, la existencia de un observador depende la detectabilidad del sistema híbrido.

REFERENCES

- Babaali, M. and Pappas, G.J. (2005). Observability of switched linear systems in continuous time. In M. Morari and L. Thiele (eds.), *Hybrid systems: computation and control*, Lecture notes in computer science, 103–117. Springer, Berlin.
- Bainov, D. and Simeonov, P. (1989). *Systems with Impulse Effects: Stability, Theory and Applications*. Academy Press.
- Bernard, P. and Sanfelice, R. (2018). Observers for hybrid dynamical systems with linear maps and known jump times. In *Proc. 57th IEEE Conf. Decision Control*, 3140–3145. Miami Beach, FL, USA.
- Branicky, M.S. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatatic Control*, 43(5), 475–482.
- Carnevale, D., Galeani, S., and Menini, L. (2012). Output regulation for a class of linear hybrid systems. Part 2: stabilization. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, 6157–6162. Maui, Hawaii, USA.
- Carnevale, D., Galeani, S., Menini, L., and Sassano, M. (2016). Hybrid output regulation for linear systems with periodic jumps: Solvability conditions, structural implications and semi-classical solutions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9), 2416–2431.
- Conte, G., Perdon, A., and Zattoni, E. (2017). Unknown input observers for hybrid linear systems with state jumps. In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, volume 50, 6458–6464. Toulouse, France.
- Davila, J., Ríos, H., and Fridman, L. (2012). State observation for nonlinear switched systems using non-homogeneous high-order sliding mode observers. *Asian Journal of Control*, 14(4), 911–923.
- Gómez-Gutiérrez, D., Celikovsky, S., Ramírez-Treviño, A., and Castillo-Toledo, B. (2015). On the observer design problem for continuous-time switched linear systems with unknown switchings. *Journal of the Franklin Institute*, 352(4), 1595 – 1612. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.01.036>.
- Goebel, R., Sanfelice, R.G., and Teel, A.R. (2012). *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability and Robustness*. Princeton University Press, New Jersey, USA.
- Kailath, T. (1985). *Linear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Lygeros, J., Johansson, K.H., Simić, S.N., Zhang, J., and Sastry, S.S. (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1), 2–17.
- Mincarelli, D., Pisano, A., Floquet, T., and Usai, E. (2016). Uniformly convergent sliding mode-based observation for switched linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(7), 1549–1564. doi:10.1002/rnc.3366.
- Possieri, C. and Teel, A.R. (2017). Structural properties of a class of linear hybrid systems and output feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(6), 2704–2719.
- Tanwani, A., Shim, H., and Liberzon, D. (2013). Observability for switched linear systems: Characterization and observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4), 891–904. doi: 10.1109/TAC.2012.2224257.
- Teel, A.R., Forni, F., and Zaccarian, L. (2013). Lyapunov-based sufficient conditions for exponential stability in hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6), 1591–1596. doi:10.1109/TAC.2012.2228039.
- Vidal, R., Chiuso, A., Soatto, S., and Sastry, S. (2003). Observability of linear hybrid systems. In O. Maler and A. Pnueli (eds.), *Hybrid systems: computation and control*, Lecture notes in computer science, 526–539. Springer, Berlin.
- Zattoni, E., Perdon, A., and Conte, G. (2018). Measurement dynamic feedback output regulation in hybrid linear systems with state jumps. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(2), 416–436.
- Zavalishchin, S. and Sesekin, A. (1997). *Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.