

Determinación de los coeficientes de una ecuación diferencial a partir de señales muestreadas entrada-salida

Oswaldo Valdez Franco * Efrain Alcorta Garcia **
Miguel Angel Platas Garza *** César Elizondo Gonzalez ****

* Universidad Autónoma de Nuevo León,
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
(e-mail: oswaldovaldezfranco@gmail.com).
** (e-mail: efrain.alcortagr@uanl.edu.mx).
*** (e-mail: miguel.platas@gmail.com).
**** (e-mail: celizond@yahoo.com).

Resumen. La digitalización de los procesos industriales está cada día más presente en el contexto de la Industria 4.0 y hace necesario un manejo adecuado de los datos para poder cuadrar con la naturaleza continua de muchos procesos industriales. Técnicas de control requieren de modelos y estos a su vez son obtenidos de los datos muestreados disponibles. En este trabajo se discute una forma sencilla de obtener los coeficientes de modelos continuos a partir de los datos muestreados suponiendo un periodo de muestreo conocido. El procedimiento es aplicado a un proceso de laboratorio y los resultados discutidos. Una ventaja importante en la búsqueda de coeficientes de modelos continuos, en lugar de los modelos discretos equivalentes, es que el efecto de los errores de truncamiento de decimales se reducen con respecto a los coeficientes que se pueden identificar del modelo equivalente discreto.

Palabras Clave: Algoritmos de identificación, sistemas continuos, muestreos, sistemas lineales, discretización.

1. INTRODUCCIÓN

La posibilidad de determinar los coeficientes de una ecuación diferencial a partir de mediciones brinda oportunidades para contar con un modelo de procesos. Este modelo puede ser utilizado, posteriormente, en el diseño y sintonización de controladores y así como en la mejora del desempeño de los sistemas de control.

Muchos procesos industriales son de naturaleza continua, es decir, la forma natural de modelar el comportamiento de estos procesos es mediante el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias o bien, entre derivadas parciales. En este trabajo solo se consideran los correspondientes a ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto en contraste con la clase de sistemas que operan en tiempo discreto y cuya forma natural de modelo es a través de ecuaciones en diferencias. Este trabajo considera la primera clase de procesos, los cuales están asociados a ecuaciones diferenciales. En la literatura de control frecuentemente se recurre a obtener modelos discretos equivalentes a partir del modelo continuo y en la práctica está siempre la tentación de obtener a partir de señales muestreadas modelos discretos directamente Franklin et al. (1992); Ogata (2015).

Como es bien sabido, cuando se discretiza un sistema continuo, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales son proyectados de los números reales (para el caso de los coeficientes de la variable independiente) y de los reales negativos (para los coeficientes de la variable dependiente) al interior del círculo unitario Ogata (2015). Esta proyección hace que la magnitud de los coeficientes, en valor absoluto, esté entre cero y uno. El impacto que esto tiene a la hora de identificar el proceso discreto equivalente es que, independientemente de la magnitud de las señales entrada-salida del sistema, los errores numéricos en la determinación de los coeficientes de la ecuación en diferencias, tendrán un mayor impacto que los mismos porcentajes de error cuando se determinan los coeficientes de la ecuación diferencial.

En la literatura de identificación se han reconocido estos problemas y se han propuesto diversos algoritmos en los pasados 15 años para hacer frente a este problema, como puede ser apreciado en Garnier and Wang (2008). La mayor parte de los algoritmos parte de relaciones entrada salida y utiliza filtros para procesar las señales muestreadas entrada-salida y obtener los mencionados coeficientes de la ecuación diferencial. Una alternativa de identificación es mediante el uso de un enfoque algebraico

Fliess and Sira-Ramirez (2003). En este último enfoque se requiere tener disponible las derivadas de algunas señales para poder determinar los coeficientes.

El enfoque propuesto sigue los lineamientos generales de Garnier and Wang (2008) pero utiliza una representación en espacio de estado. Mediante el enfoque propuesto la interpretación de las relaciones es transparente. El algoritmo propuesto es aplicado a un prototipo de laboratorio y los resultados son puestos en contraste con los de los métodos estándar de identificación Ljung (1999), Isermann and Münchhof (2011).

El trabajo está organizado como sigue: en la siguiente sección se presentan algunos resultados que sirven de base para el algoritmo propuesto, el cual es discutido en la sección 3. En la sección 4 se presenta un ejemplo de aplicación en un prototipo de laboratorio. Los resultados son discutidos y comparados con otros algoritmos. En la sección 5 se resumen las conclusiones y trabajos futuros.

2. PRELIMINARES

Se consideran sistemas lineales de coeficientes constantes, pero posiblemente desconocidos, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1)$$

Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que (1) es controlable y observable y que tiene $2n$ parámetros identificables (distinguidos), los cuales están asociados a los coeficientes de la función de transferencia correspondiente. La linealidad del sistema (1) significa que este satisface el principio de superposición Kailath (1980).

El procedimiento propuesto requiere de obtener filtros discretos de tal manera que garanticen que el sistema discreto y las señales continuas coinciden en los instantes de muestreo, Ogata (2015). Por ejemplo, si se desea obtener el modelo discreto del sistema (1), el modelo discretizado equivalente esta dado por:

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \underbrace{(e^{AT})}_{A_d} x(kT) + \underbrace{\left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \cdot B \right)}_{B_d} u(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \quad (2)$$

Dado que la representación interna de sistemas no es única, se busca que esta se presente en un formato con un número mínimo de parámetros. De las diferentes posibilidades disponibles, se considera para este trabajo la llamada forma canónica de observador, la cual tiene la siguiente estructura:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ & \ddots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad C = [0 \cdots 0 \ 1]$$

Se requiere adicionalmente que la señal de entrada tenga suficientes componentes en frecuencia y de amplitud adecuada (excitación persistente de orden $2n$).

3. ENFOQUE PROPUESTO EN ESPACIO DE ESTADOS

El punto de partida es un sistema continuo en forma canónica de observador, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ & \ddots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= [0 \cdots 0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Considerar el conjunto $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, en donde los β_i pertenecen al semiplano complejo izquierdo $\beta_i \in \mathcal{C}_-$, con $i = 0, 1, \dots, n-1$. Considerar el polinomio cuyas raíces coinciden por completo con el conjunto β :

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= (s - \beta_0)(s - \beta_1) \cdots (s - \beta_{n-1}) \\ &= s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \lambda_1s + \lambda_0 \end{aligned} \quad (4)$$

y definiendo el vector $\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$, considerar la representación alternativa de (3):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ & \ddots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \pm \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} x_n(t) \\ y(t) &= [0 \cdots 0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (5)$$

donde $x_n(t)$ representa la n -ésima componente del vector de estados $x(t)$ y el cual corresponde a la salida $y(t)$, recomodando las ecuaciones es posible escribir (5) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_0 \\ 1 & -\lambda_1 \\ & \ddots \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}}_F x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \lambda_0 - a_0 \\ \lambda_1 - a_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} y(t) \\ y(t) &= [0 \cdots 0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

definiendo $B_n^T \triangleq [0 \cdots 0 \ 1]$ y utilizando la linealidad del sistema (6) se puede obtener una representación equivalente, conocida como forma de regresor :

$$\dot{\xi}(t) = F\xi(t) + B_n u(t) \quad (7)$$

$$\dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + B_n y(t) \quad (8)$$

$$y(t) = C\phi^T(t)\theta \quad (9)$$

donde

$\phi^T(t) \triangleq [\xi(t) \ T_1\xi(t) \ \cdots \ T_{n-1}\xi(t) \ \zeta(t) \ T_1\zeta(t) \ \cdots \ T_{n-1}\zeta(t)]$
y T_i , con $i = 1, \dots, n-1$ cumple la ecuación:

$$(sI - F)^{-1}B_i = T_i(sI - F)^{-1}B_n \quad (10)$$

donde B_i es de la misma dimensión que B con puros ceros excepto en la i -ésima posición donde hay un uno, con $i = 1, \dots, n$, y

$$\theta = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ \lambda_0 - a_0 \\ \lambda_1 - a_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^s \quad (11)$$

La representación de las ecuaciones (7)-(9) es la forma de regresor, la cual es comúnmente utilizada en identificación para representaciones entrada-salida Ljung (1999); Isermann and Münchhof (2011).

Los coeficientes de la ecuación diferencial asociada con un sistema está representado con el vector de parámetros θ . Para poder obtener los valores del vector θ se requiere contar con las señales en tiempo continuo de la entrada y salida. Note que las ecuaciones (7)-(8) son filtros que dependen solo de valores conocidos. De hecho la diferencia entre ambos es la entrada, en un caso es la $u(t)$ y en otro es la $y(t)$.

El algoritmo está basado en el hecho de que la ecuación (9) es válida para todo tiempo, en particular para los instantes kT :

$$y(kT) = C\phi^T(kT)\theta \quad (12)$$

De (12) se puede obtener el vector de parámetros θ a partir de un conjunto de mediciones. Sin embargo, se requieren las señales del regresor en los instantes de muestreo kT .

El regresor $\phi(t)$ está formado por los vectores auxiliares $\xi(t)$ y $\zeta(t)$. En los instantes kT los valores pueden ser obtenidos mediante el procedimiento de discretización, ver por ejemplo Kuo (1995); Ogata (2015). El procedimiento fue revisado brevemente en la sección 2. Para las ecuaciones del regresor (7)-(8), el sistema discreto equivalente resulta:

$$\xi(kT + T) = F_d\xi(kT) + B_d u(kT) \quad (13)$$

$$\zeta(kT + T) = F_d\zeta(kT) + B_d y(kT) \quad (14)$$

con

$$F_d \triangleq e^{FT}, \quad B_d \triangleq \int_0^T e^{F\tau} B_n d\tau$$

De (13)-(14) es posible obtener la información requerida para el cálculo de θ a partir de las señales muestreadas en $u(kT)$ y $y(kT)$ bajo el supuesto de que durante el periodo de muestreo estas señales permanecen constantes,

es decir, suponiendo que $u(\tau) = u(kT)$ y $y(\tau) = y(kT)$ para $kT \leq \tau \leq kT + T$.

Dado un conjunto de mediciones entrada-salida, dadas por $\{u(kT), y(kT)\}$, con $k = 1, \dots, N$ y N suficientemente grande (mayor que el orden posible del sistema representado por la ecuación diferencial, al menos), es posible definir el vector y matriz siguientes:

$$Y \triangleq \begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y(NT) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^N; \quad \Phi \triangleq \begin{bmatrix} C\phi^T(0) \\ C\phi^T(T) \\ \vdots \\ C\phi^T(NT) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{N \times s}$$

Con lo cual es posible obtener la siguiente relación:

$$Y = \Phi\theta \quad (15)$$

El vector de parámetros se obtiene mediante la pseudo-inversa de Φ , siempre y cuando tenga rango completo por columnas:

$$\theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY \quad (16)$$

de esta forma el vector de parámetros θ corresponde a los coeficientes del sistema continuo (3) y es calculado utilizando información de las muestras de $u(t)$ y $y(t)$.

4. CASO DE ESTUDIO: ESTACIÓN DE CONTROL DE PRESIÓN

Se considera para el caso de estudio una estación de control de presión para entrenamiento en laboratorio.

4.1 Descripción

Este sistema consiste en un depósito, una tubería de alimentación de aire a presión con una válvula de control para el suministro al tanque. El aire es proporcionado por un compresor (el cual no se muestra en la representación esquemática). Como salida se tiene el flujo de aire a presión a través de una tubería que cuenta con una válvula a la salida. El equipo cuenta con dos transmisores de presión, uno en cada tubería, como se muestra en la figura 1.

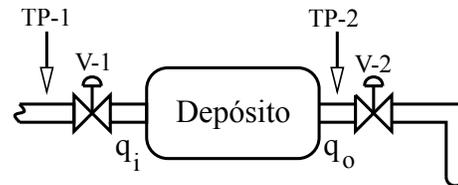


Figura 1. Representación esquemática de la planta parte de la estación de control de presión

Donde $TP-1$ y $TP-2$ son transmisores de presión, $V-1$ y $V-2$ son válvulas; q_i y q_o representa los flujos de aire a la entrada y salida del depósito.

Aún y cuando el equipo está preparado para realizar lazos cerrados de control, para fines de este trabajo se considera el lazo abierto.

4.2 Escenarios de medición

Fueron medidas señales de presión de los transmisores de presión *TP-1* y *TP-2*. Se introdujo un cambio de presión, a forma de un escalón, en la entrada y se midió la presión en la salida.

La medición se realizó con la ayuda de un convertidor corriente-voltaje y un **myRIO-1900**.

Las señales muestreadas están tomadas en una escala equivalente 0-80 psi a 0-10 volts para ambos transmisores, utilizando un periodo de muestreo de 20 ms. El experimento se repitió cinco veces para tener una mayor selección de datos para la identificación y validación. Finalmente, los datos utilizados fueron procesadas para eliminar el ligero offset que no se pudo eliminar por completo con el uso del convertidor. Los datos medidos disponibles se muestran en la figura 2.

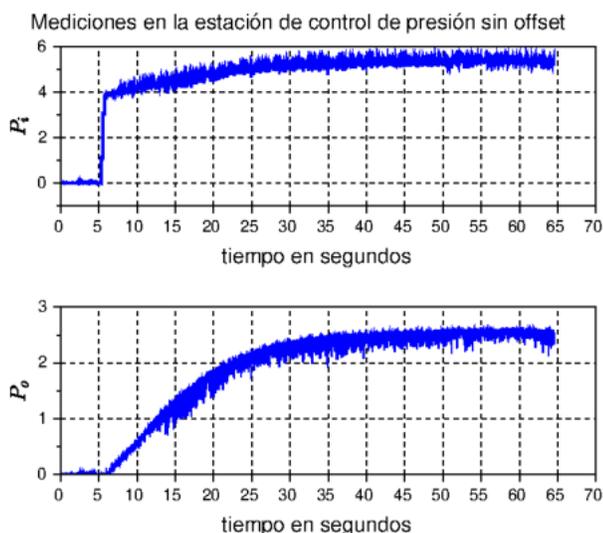


Figura 2. Muestras entrada salida sin offset

Note que las mediciones cuentan con algo de “ruido” debido principalmente a las características del transmisor de presión y de las dimensiones del depósito (que es algo pequeño).

4.3 Determinación de coeficientes del sistema

Revisando la física del sistema bajo consideración se puede verificar que un modelo simplificado de este es dado por un sistema lineal de orden 2 con parámetros variantes dependientes del punto de operación, o bien por un sistema de orden 4 con las mismas características, ver por ejemplo Ogata (2004).

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los modelos obtenidos, utilizando el algoritmo presentado en este trabajo, son los siguientes.

5.1 Resultados de las identificaciones

Para el caso de utilizar una estructura de segundo orden resulta en el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -0,035 \\ 1 & -0,298 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,016 \\ 0,021 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (17)$$

El desempeño del modelo obtenido se puede apreciar en la figura 3, donde se compara la salida medida con la estimada, esta última obtenida de discretizar el modelo (17) y aplicarle la entrada correspondiente. Se obtuvo

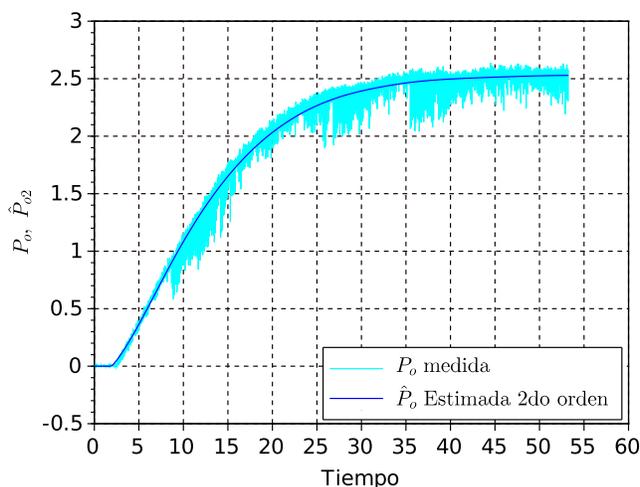


Figura 3. Salida medida vs la estimada con el modelo obtenido de segundo orden.

también un índice mediante la integral del valor absoluto del error, el cual se obtuvo mediante la resta de la señal medida de presión y el estimado obtenido al aplicar la entrada al modelo cuyos coeficientes fueron determinados mediante el procedimiento propuesto. El error anterior es normalizado dividiendo entre el valor de la salida medida y multiplicando el resultado por 100. El índice resultó, para el modelo de segundo orden, con un valor de **3,07**. Para obtener este resultado se probó con distintos coeficientes Λ , los que se utilizaron finalmente tienen los siguientes valores:

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,7 \end{bmatrix}$$

Para la estructura de cuarto orden se obtuvieron los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,103 \\ 1 & 0 & 0 & -1,035 \\ 0 & 1 & 0 & -4,835 \\ 0 & 0 & 1 & -0,279 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,048 \\ 0,143 \\ -0,046 \\ 0,024 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] x(t) \end{aligned} \quad (18)$$

El desempeño del modelo obtenido se puede apreciar en la figura 4, donde se compara la salida medida con la estimada obtenida de discretizar el modelo (18) y aplicarle la entrada correspondiente. El índice encontrado tiene un

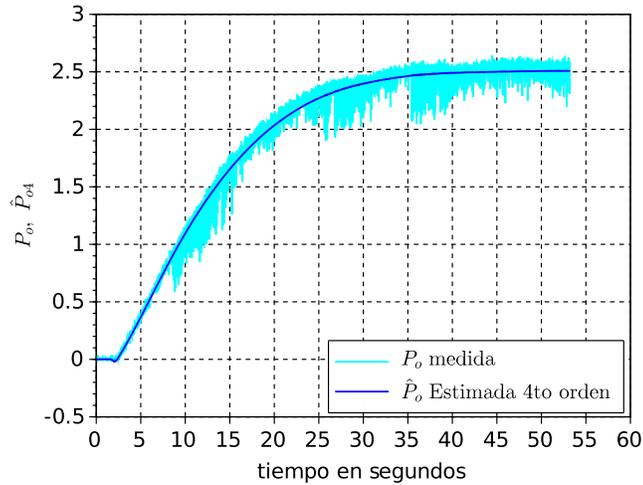


Figura 4. Salida medida vs la estimada con el modelo obtenido de cuarto orden.

valor de **2,76**, el cual es un poco más bajo que el del correspondiente del de segundo orden. Y los coeficientes del filtro de las entradas y salidas se seleccionó con valores de:

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Así mismo, resulta difícil de apreciar esta ventaja del modelo de cuarto orden a simple vista.

Con la finalidad de obtener los resultados mostrados en las figuras 3 y 4 se procedió a discretizar los modelos con los coeficientes continuos encontrados. Esto debido a que los datos disponibles están en tiempo discreto.

5.2 Discusión de resultados

Primeramente hay que decir que el esfuerzo para realizar la identificación no se incrementa por el hecho de obtener los coeficientes de la ecuación diferencial. Recordando que cuando se procede directamente de la ecuación entrada-salida, generalmente se parte de ecuaciones en diferencias. Por el contrario, la implementación de los filtros resultan más directa.

El paso intermedio, el hecho de utilizar filtros discretos, de obtención de los coeficientes correspondientes a la ecuación diferencial hace que los errores de identificación sean menores en el modelo discreto obtenido, pues el mismo porcentaje de error de identificación implica modificaciones mayores en los coeficientes de la ecuación en diferencias cuando se calculan estos directamente.

Mediante el uso de *Scilab* se procedió a intentar buscar un modelo (discreto) que ajuste los datos entrada salida usados anteriormente. Sin embargo, ninguna de las opciones brinda un resultado que pueda ser comparable con los mostrados en las figuras 3 y 4. Las mejores opciones se presentan en la figura (5), las cuales fueron obtenidos usando el comando `time_id` de *Scilab*. La integral del error absoluto del error de estimación de los datos para validación fue de **17,46** y de **11,22** para el modelo de segundo y cuarto orden respectivamente.

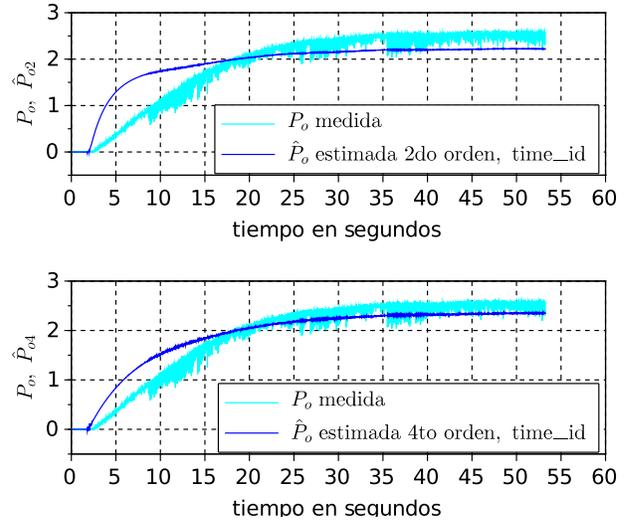


Figura 5. Respuesta de los modelos identificados mediante toolbox de *Scilab*

6. CONCLUSIÓN

El presente documento propone el uso de filtros discretos en conjunto con una forma de regresor que incluye los coeficientes de la ecuación diferencial que se desea determinar. Mediante el procedimiento propuesto es posible obtener un modelo en términos de ecuaciones diferenciales en el cual los errores del proceso de identificación se reflejan sobre los coeficientes obtenidos. Esto pudiera reducir el error de identificación de parámetros con respecto a los procedimientos que estiman directamente el valor de los coeficientes del modelo discreto equivalente, pues el mismo porcentaje de error tiene un significado más importante en el modelo discreto que en el continuo. Esto último cuando se comparan los modelos discretos equivalentes. El procedimiento propuesto tiene aplicaciones posibles en diagnóstico de procesos que operan en tiempo continuo y que tienen disponibles mediciones muestreadas.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido apoyado por el CONACyT México, a través del apoyo No. 166654, A1-5-31628.

REFERENCIAS

- Fliess, M. and Sira-Ramirez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9, 151–168. doi:DOI: 10.1051/cocv:2003008.
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Workman, M.L. (1992). *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley.
- Garnier, H. and Wang, L. (eds.) (2008). *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. Advances in Industrial Control. Springer.
- Isermann, R. and Münchhof, M. (2011). *Identification of dynamic systems, an introduction with applications*. Springer.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall Information and System Sciences Series.
- Kuo, B. (1995). *Digital Control Systems*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press, 2nd edition.
- Ljung, L. (1999). *System identification, theory for the user*. Prentice hall.
- Ogata, K. (2004). *Dynamic systems*. Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Ogata, K. (2015). *Discrete time control systems*. Pearson India.