

Sintonización de Ganancia de Controladores \mathcal{H}_∞ para Ajuste de Comportamiento de Sistemas Lineales de Primer Orden ^{*}

Luis T. Aguilar ^{*} Ramón I. Verdés ^{*}
Topacio Osuna Altamirano ^{**}

^{*} Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310 Col. Nueva Tijuana, Tijuana, B.C., 22435 (e-mail: laguilarb@ipn.mx; rverdes@citedi.mx).

^{**} Universidad Autónoma de Sinaloa, Blvd. de las Américas y Avenida Universitarios s/n, Col. Universitarios, Culiacán, Sinaloa (e-mail: topacio@uas.edu.mx).

Resumen: En este artículo se establecen las condiciones de sintonización de las ganancias de controladores \mathcal{H}_∞ para establecer el tiempo de asentamiento de una trayectoria de sistemas lineales invariantes en el tiempo de primer orden. La teoría de control \mathcal{H}_∞ para la síntesis del controlador está basado en pasividad, sin embargo se utiliza la solución de la ecuación perturbada de Riccati para resolver el problema de control \mathcal{H}_∞ por lo que no se requiere verificar la condición de controlabilidad del sistema. Los resultados se verifican de manera experimental en el control de un motor de corriente directa.

Palabras clave: Controlador \mathcal{H}_∞ , funcionamiento, sistemas lineales.

1. INTRODUCCIÓN

Los controladores \mathcal{H}_∞ son reconocidos por su propiedad de robustez ante perturbaciones externas acopladas y no acopladas e incertidumbres en el modelo. En la literatura se exponen diversos casos de éxito como las aplicaciones presentadas por Wu et al. (2019) en sistemas de dimensiones infinitas, o en control y maniobrabilidad de aeronaves reportadas por Bai et al. (2019) o hasta el control de turbinas de viento (Mseddi et al., 2019).

En 1981, Zames plantea el problema de control \mathcal{H}_∞ para el caso escalar basada en normas y seminormas (Zames, 1981). La solución al problema de control \mathcal{H}_∞ desde la perspectiva del dominio de la frecuencia se obtienen por ejemplo en Glover (1984) o Francis y Doyle (1987) quienes posteriormente extienden los resultados para el caso multivariable. Es a partir de Doyle et al. (1989) cuando impulsan la solución algorítmica de los problemas de control \mathcal{H}_∞ en espacio de estados, obteniéndose un controlador de la misma dimensión que la planta ampliada o también denominada planta generalizada (constituida por el modelo del proceso junto con las matrices de ponderación que constituyen las especificaciones de diseño). Los algoritmos desarrollados en espacio de estado

se caracterizan por basarse en la solución de un par de ecuaciones algebraicas de Riccati desacopladas, partiendo de las matrices de estado de la planta generalizada. Otro enfoque de la teoría de control \mathcal{H}_∞ se relaciona con la teoría de juegos (Basar y Bernhard, 1995), esto es, se debe pensar en el diseñador por un lado y en el ambiente externo por otro lado, donde el objetivo del diseñador es elegir un controlador que estabilice el sistema y sea además óptimo con respecto a un criterio predeterminado mientras que el medio exterior tiene como objetivo hacer fracasar la estrategia del diseñador por medio de la peor perturbación posible que actúe sobre la planta a controlar. A partir de estas ideas, Ravi et al. (1991) extienden la teoría \mathcal{H}_∞ hacia sistemas lineales variantes en el tiempo basados en la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati. De manera simultánea, Van Der Shaft (1992) e Isidori y Astolfi (1992) presentan la solución al problema de control \mathcal{H}_∞ global y local de sistemas no lineales invariantes en el tiempo con retroalimentación de estados y de salida. En el caso de salida, la solución del problema consiste en resolver dos ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (caso global) o ecuaciones algebraicas de Riccati (caso local). Finalmente, Orlov et al. (1999) extienden la solución hacia sistemas no lineales variantes en el tiempo con retroalimentación de salida.

El presente trabajo está dirigido básicamente a practicantes y diseñadores de ingeniería de control. La con-

^{*} Luis T. Aguilar agradece al CONACYT por el apoyo brindado a través del proyecto 285279.

tribución del artículo reside en que se establece una fórmula, en términos del nivel de atenuación, para ajustar el tiempo de asentamiento de controladores \mathcal{H}_∞ en sistemas lineales de primer orden. Los trabajos reportados en los ochentas sobre la síntesis de controladores \mathcal{H}_∞ en el dominio de la frecuencia se pueden encontrar diversas contribuciones acerca de la sintonización de parámetros con el fin de asegurar un comportamiento deseado además de robustez a través de funciones de peso. Con comportamiento nos referimos a establecer tiempos de asentamiento, amortiguamiento y sobretiro en la respuesta de un sistema de lazo cerrado. Sin embargo, estas características no se han establecido en el dominio del tiempo. El esquema en la que trabaja este artículo es basado pasividad (Isidori y Astolfi, 1992), sin embargo la solución al problema de control \mathcal{H}_∞ involucra la solución de una ecuación algebraica perturbada de Riccati que evita la verificación de controlabilidad sistema (Acho et al., 2001).

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe la teoría de control \mathcal{H}_∞ para sistemas lineales invariantes en el tiempo. En la sección 3 se presenta la síntesis del control \mathcal{H}_∞ para un sistema de primer orden y se establecen las condiciones para definir el tiempo de establecimiento de las trayectorias. En la sección 5 se hacen verificaciones experimentales para el control de un motor de corriente directa. Se concluye el trabajo con comentarios y conclusiones en la sección 6.

2. TEORÍA DE CONTROL \mathcal{H}_∞ PARA SISTEMAS LINEALES

Para resolver el problema de control \mathcal{H}_∞ , considérese el siguiente sistema escrito en forma generalizada

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (1)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (2)$$

$$y = C_2x + D_{21}w \quad (3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el tiempo, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ son los disturbios desconocidos, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ es la salida desconocida a ser controlada y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la única variable medida en el sistema. Las matrices A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_{12} y D_{21} son de dimensiones apropiadas. Se asume que las perturbaciones deben pertenecer al espacio \mathcal{L}_2 , es decir

$$\int_0^T \|w(s)\|^2 ds < \infty \quad (4)$$

para todo $T \geq 0$ y toda función continua a tramos $w(t) \in \mathbb{R}^r$.

Las siguiente suposición se hace sobre el sistema (1)–(3):

A1)

$$\begin{aligned} C_1^T D_{12} &= 0, & D_{12}^T D_{12} &= I, \\ D_{21} B_1^T &= 0, & D_{21} D_{21}^T &= I, \end{aligned}$$

donde I denota la matriz identidad.

Las Suposición (A1) garantiza que mientras se inyecten entradas exógenas integrables, el sistema dinámico estará bien planteado.

Definición 1. Dado un número real $\gamma > 0$, el sistema (1) se dice que tiene una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (2) si la respuesta del sistema $z(t)$, que resulta de $w(t)$ para el estado inicial $x(t_0) = 0$, existe en un intervalo arbitrario $(0, T)$ y satisface la desigualdad

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (5)$$

para todo $T \geq 0$ y toda función continua a tramos $w(t)$.

Considérese un controlador de la forma

$$u = \theta(x) \quad (6)$$

donde θ es una función continuamente diferenciable que satisface $\theta(0) = 0$. El objetivo del controlador \mathcal{H}_∞ lineal que corresponde a un nivel de atenuación γ es encontrar un controlador (6) tal que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema de lazo cerrado (1)–(3) sea menor que γ o que el origen del sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable cuando $w = 0$.

El problema es bien entendido si el sistema lineal (1)–(3) es estabilizable y detectable de u y y , respectivamente. Las siguientes condiciones son suficientes y necesarias para que exista solución al problema de control \mathcal{H}_∞ (Doyle et al., 1989).

C1) La ecuación algebraica de Riccati

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0, \quad (7)$$

posee una solución simétrica positiva definida P tal que el origen del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] x(t) \quad (8)$$

sea exponencialmente estable.

Con base en el lema de acotamiento real (Anderson y Vreugdenhil 1973), las condición C1 asegura que existe una constante positiva ε_0 tal que las ecuación algebraica de Riccati perturbada

$$P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon + \varepsilon I = 0, \quad (9)$$

tiene una solución positiva definida de las matrices P_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Las ecuación algebraica de Riccati (9) se utiliza para derivar la solución al problema de control \mathcal{H}_∞ . El siguiente teorema resume el resultado principal.

Teorema 2. Asíumase que las condición C1 se satisface y sea P_ε una solución definida positiva de (9) para cualquier $\varepsilon > 0$. Entonces el control por retroalimentación de estado

$$u = -B_2^T P_\varepsilon x \quad (10)$$

es una solución al problema de control \mathcal{H}_∞ .

Demostración. La demostración del Teorema se encuentra en forma detallada en Orlov y Aguilar (2014). ■

La solución de la ecuación diferencial del sistema de lazo cerrado viene dado de manera generalizada por

$$x(t) = x(t_0)e^{(A-B_2B_2^T P_\varepsilon)(t-t_0)} \quad (11)$$

donde t_0 es el instante de tiempo inicial.

3. SÍNTESIS DE CONTROL \mathcal{H}_∞ PARA SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

Considérese un sistema lineal de primer orden sujeto a perturbaciones:

$$\dot{x} = -ax + w_x + bu \quad (12)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$ es el estado, $w_x(t) \in \mathbb{R}$ son las perturbaciones, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el tiempo y a y b son constantes positivas. Se asume que la salida medible $y(t)$ está perturbada, es decir

$$y = x + w_y \quad (13)$$

donde $w_y(t)$ representa el ruido en las mediciones o las perturbaciones. Para este caso, considérese la siguiente salida objetivo

$$z = \rho x + u \quad (14)$$

donde ρ es una constante positiva de ajuste.

El sistema (12)–(13) se puede transformar a la forma estándar \mathcal{H}_∞ (1)–(3) con

$$A = -a, \quad B_1 = [1 \ 0], \quad B_2 = b, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

donde $w = [w_x \ w_y]^T$. Sustituyendo las matrices (15) en la ecuación algebraica de Riccati (9) se llega a

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} - b^2\right)p_\varepsilon^2 - 2ap_\varepsilon + \rho^2 + \varepsilon = 0. \quad (16)$$

Resolviendo la ecuación de segundo orden anterior se llega a

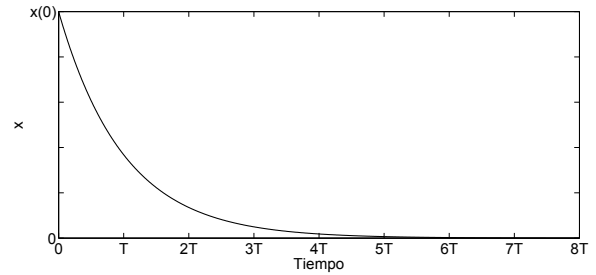


Fig. 1. Tasa de asentamiento de una respuesta exponencial.

$$p_\varepsilon = \gamma^2 \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - b^2\right)(\rho^2 + \varepsilon)}}{1 - \gamma^2 b^2} \right). \quad (17)$$

Nótese que puede ocurrir una singularidad en la ecuación (17) si $\gamma^2 b^2 = 1$. Sin embargo, empleando la regla de L'hopital se tiene que

$$\lim_{\gamma^{-2} \rightarrow b^2} p_\varepsilon = \frac{\rho^2 + \varepsilon}{2a}. \quad (18)$$

La solución de la ecuación (17) será real si y solo si

$$\gamma^2 \geq \frac{\rho^2 + \varepsilon}{a^2 + b^2(\rho^2 + \varepsilon)}. \quad (19)$$

Con base en la última desigualdad y al Teorema 2, entonces existe una solución al problema de control \mathcal{H}_∞ . El valor óptimo de γ es

$$\gamma_{\min}^2 = \frac{\rho^2 + \varepsilon}{a^2 + b^2(\rho^2 + \varepsilon)}. \quad (20)$$

La ley de control (10) queda definida de forma explícita de la siguiente manera

$$u = -b\gamma^2 \frac{a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - b^2\right)(\rho^2 + \varepsilon)}}{1 - \gamma^2 b^2} x \quad (21)$$

y la ecuación de lazo cerrado que resulta de sustituir (21) en (12) es

$$\dot{x} = - \left(a + b^2 \gamma^2 \frac{a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - b^2\right)(\rho^2 + \varepsilon)}}{1 - \gamma^2 b^2} \right) x. \quad (22)$$

Los parámetros libres para diseño son γ , ρ y ε , únicamente. Dado que el sistema de lazo cerrado es de primer orden, el *tiempo de establecimiento* (t_s) es la única variable a manipular. Para ello se pueden asumir ρ y ε como fijos.

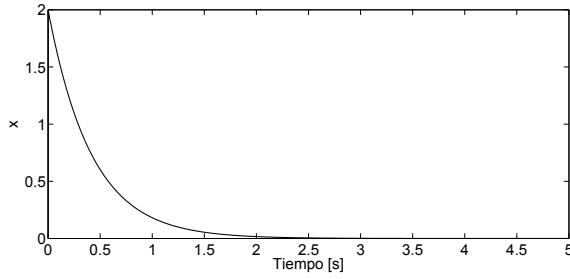


Fig. 2. Respuesta del sistema de lazo cerrado del ejemplo 1.

Considérese $x(t) = x(0) \exp\{-t/T\}$ como la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = -x/T$ donde T es una constante de tiempo de evolución de la exponencial con respecto al tiempo (véase la Figura 1). Por lo general, $6T$ corresponde a un 99 por ciento de la evolución de la trayectoria $x(t)$. Con esto en mente, el tiempo de establecimiento t_s del sistema de lazo cerrado (22) se encuentra en el intervalo

$$\frac{6a}{a^2 + b^2(\rho^2 + \varepsilon)} \leq t_s \leq \frac{6}{\sqrt{a^2 + b^2(\rho^2 + \varepsilon)}}. \quad (23)$$

El tiempo inferior se calcula sustituyendo γ por γ_{\min} y el superior se obtiene cuando γ es igual a infinito. Como es de esperarse, seleccionar γ_{\min} equivale a tener un controlador de alta ganancia y en consecuencia mayor rapidez de convergencia.

La fórmula para calcular γ , dado el tiempo de convergencia entre los límites dados en (23) es

$$\frac{1}{\gamma^2} = -\frac{2ab^2}{a - 6/t_s} - \frac{b^4(\rho^2 + \varepsilon)}{(a - 6/t_s)^2} + b^2. \quad (24)$$

Ejemplo 1. Sean $a = -2$, $b = 1$, $\rho = 1$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$. El intervalo de tiempo en la que la trayectoria llega al origen es

$$2.3995 \text{ s} \leq t_s \leq 2.6830 \text{ s}.$$

El valor más pequeño de γ es $\gamma_{\min} = 0.4474$. Si $t_s = 2.5 \text{ s}$ entonces bajo la fórmula (24) el nivel de atenuación debe ser $\gamma = 0.4591$. La figura 2 muestra la respuesta en el tiempo del sistema de lazo cerrado (10)–(12) donde se corrobora que el tiempo de asentamiento se encuentra en los límites calculados.

El resultado principal se resume en la siguiente Teorema.
Teorema 3. Asíumase que existe una constante positiva p_ε que resulta de la solución a la ecuación algebraica de Riccati (17) para el sistema (12)–(14). Entonces la ley de control (10) estabiliza de manera asintótica el sistema (12) y el tiempo de asentamiento está dado dentro del intervalo (23). Además, el tiempo de establecimiento, dependiente de γ , está dado por (24).

Demostración. El valor inferior de desigualdad (23) se obtiene de la solución algebraica de Riccati (17) bajo $\gamma = \gamma_{\min}$ y el superior se obtiene bajo la condición $\gamma = \infty$.

La fórmula (24) resulta del despeje del nivel de atenuación γ de la siguiente relación

$$a + b^2\gamma^2 \frac{a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - b^2\right)(\rho^2 + \varepsilon)}}{1 - \gamma^2 b^2} = \frac{6}{t_s}. \quad (25)$$

Con el fin de respaldar los resultados, en la siguiente sección se presentan resultados experimentales de control de velocidad de un motor de corriente directa.

4. DISEÑO DE CONTROLADOR \mathcal{H}_∞ PARA VARIAR EL TIEMPO DE ASENTAMIENTO

Para ampliar el intervalo del tiempo de asentamiento del sistema de lazo cerrado se propone la siguiente salida virtual

$$z = C_1 x + \frac{1}{\beta} D_{12} u \quad (26)$$

donde β es una constante positiva para diseño. Esta última variable define la compensación entre un buen rechazo al disturbio y el esfuerzo de control aplicado. Siguiendo la línea de razonamiento propuesta en Isidori y Astolfi (1992) y Orlov y Aguilar (2014) se obtiene la siguiente entrada de control

$$u = -\beta^2 B_2^T P_\varepsilon x \quad (27)$$

donde P_ε es una constante positiva que es solución de la siguiente ecuación algebraica de Riccati

$$P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - \beta^2 B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon + \varepsilon I = 0. \quad (28)$$

La representación de (28) para el sistema (12), (26) es

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} - \beta^2 b^2 \right) p_\varepsilon^2 - 2ap_\varepsilon + \rho^2 + \varepsilon = 0, \quad (29)$$

cuya solución explícita es

$$p_\varepsilon = \gamma^2 \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \beta^2 b^2\right)(\rho^2 + \varepsilon)}}{1 - \gamma^2 \beta^2 b^2} \right). \quad (30)$$

El valor mínimo de γ será

$$\gamma_{\min}^2 = \frac{\rho^2 + \varepsilon}{a^2 + \beta^2 b^2 (\rho^2 + \varepsilon)}. \quad (31)$$



Fig. 3. Plataforma usada en los experimentos.

El intervalo del tiempo de establecimiento para el sistema de lazo cerrado (12), (27) es

$$\frac{6a}{a^2 + \beta^2 b^2 (\rho^2 + \varepsilon)} \leq t_s \leq \frac{6}{\sqrt{a^2 + \beta^2 b^2 (\rho^2 + \varepsilon)}}. \quad (32)$$

Finalmente, la fórmula para calcular γ para establecer el tiempo de establecimiento en $6T$ es

$$\frac{1}{\gamma^2} = -\frac{2a\beta^2 b^2}{a - 6/t_s} - \frac{\beta^4 b^4 (\rho^2 + \varepsilon)}{(a - 6/t_s)^2} + \beta^2 b^2. \quad (33)$$

Con el fin de corroborar los resultados teóricos, en la próxima sección se mostrarán resultados experimentales en un solo eje de una grúa de tres dimensiones.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se realizaron los experimentos en un motor de corriente directa utilizado para elevar o bajar la carga en una grúa fabricada por INTECO[®] (véase la Figura 3). El motor tiene montado un codificador rotatorio que tiene una resolución de 4096 pulsos por revolución. El controlador se implementa usando *Matlab/Simulink*[®] que corre en una computadora personal con procesador Core i7 de séptima generación.

El desarrollo del experimento se lleva a cabo de la siguiente manera:

- (1) Se define el sistema lineal de primer orden como

$$\dot{x} = -(a + B_2 B_2^T P_\varepsilon)x, \quad (34)$$

donde $x = h - h_d$ es el error de posición, $h(t) \in \mathbb{R}$ es el desplazamiento de la carga con respecto al eje Z , h_d es la posición de referencia y P_ε es una matriz definida positiva que es solución de (9).

- (2) Considérese la siguiente superficie $s = \dot{x} + (a + B_2 B_2^T P_\varepsilon)x$.
- (3) La ley de control $u = -M \text{sign}(s)$, con $M > 0$ fuerza a la superficie $s(t)$ a ir hacia el origen en tiempo finito. Por lo tanto se tendrá la dinámica deseada

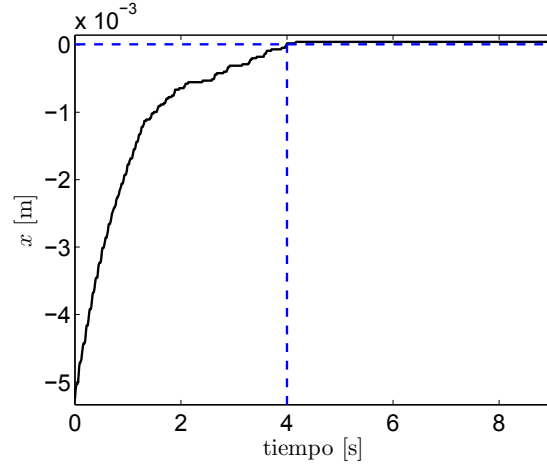


Fig. 4. Resultados experimentales del desplazamiento vertical de la carga con un tiempo de establecimiento $t_s = 2$ s.

(34) después de un instante de tiempo preestablecido t_r .

Nótese que el sistema (34) será lineal en el conjunto $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}, \dot{x} \in \mathbb{R} : s = \dot{s} = 0\}$.

Las condiciones iniciales fueron $x(t_r) = x(0) = -3.3 \times 10^{-4}$ m y $\dot{x}(t_r) = \dot{x}(0) = 4.1 \times 10^{-4}$ m/s. Los parámetros del sistema y del controlador fueron $a = 0.5$, $B_2 = 1$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ y $\rho = 1$. El tiempo deseado de establecimiento es $t_s = 2$ s para un 99.3 por ciento de la respuesta en estado estable de (34), arrojando $\gamma = 0.8945$. La figura 4 muestra el error de desplazamiento $x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ donde se corrobora el resultado teórico de las secciones anteriores.

En la figura 5 se muestra el resultado experimental del error de desplazamiento $x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ donde se establece que el sistema lineal debe estabilizarse en $t_s = 4$ s. Después de aplicar el Teorema 4, el nivel de atenuación obtenido fue $\gamma = 1.3438$ y las condiciones iniciales fueron $x(t_r) = x(0) = -0.0053$ m y $\dot{x}(t_r) = \dot{x}(0) = 0.0067$ m/s.

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se obtuvo el tiempo de establecimiento de un sistema lineal de primer orden con controlador \mathcal{H}_∞ . Se obtuvo la fórmula explícita para encontrar la constante de nivel de atenuación γ así como la solución exacta de la ecuación algebraica de Riccati. Los resultados muestran que existe una fuerte influencia de la planta a controlar y no del controlador. Resultados experimentales, realizados en el control de un motor de corriente directa, corroboran los resultados teóricos. Queda pendiente como trabajo futuro encontrar fórmulas explícitas para sintonizar ganancias de un sistema de segundo orden lineal para el ajuste del amortiguamiento, sobretiro y/o el tiempo de asentamiento.

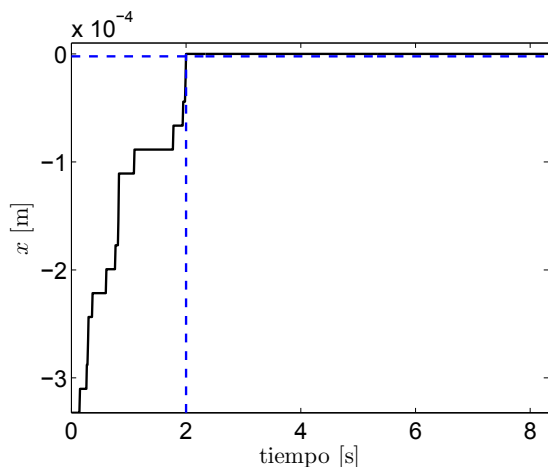


Fig. 5. Resultados experimentales del desplazamiento vertical de la carga con un tiempo de establecimiento $t_s = 4$ s.

REFERENCIAS

- Acho, L., Orlov, Y., and Solis, V. (2001). Nonlinear measurement feedback \mathcal{H}_∞ control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulator. *International Journal of Control*, 74(2), 190–198.
- Anderson, B. and Vreugdenhil, R. (1973). *Network analysis and synthesis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bai, H., Huang, C., and Zeng, J. (2019). Robust nonlinear \mathcal{H}_∞ output-feedback control for flexible spacecraft attitude manoeuvring. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(7), 2026–2038.
- Basar, T. and Bernhard, P. (1995). *\mathcal{H}_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Birkhauser, Boston, second edition.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., and Francis, B. (1989). State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 831–847.
- Francis, B. and Doyle, J. (1987). Linear control theory with an \mathcal{H}_∞ optimality criterion. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25, 815–844.
- Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ error bounds. *International Journal of Control*, 39, 1115–1193.
- Isidori, A. and Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1283–1293.
- Mseddi, A., Ballois, S.L., Aloui, H., and Vido, L. (2019). Robust control of a HESG for a wind energy application. *Electric Power Systems Research*, 168, 250–260.
- Orlov, Y., Acho, L., and Solis, V. (1999). Nonlinear \mathcal{H}_∞ -control of time varying systems. In *Proc. 38th Conference on Decision and Control*, 3764–3769. Phoenix, USA.
- Orlov, Y. and Aguilar, L. (2014). *Advanced \mathcal{H}_∞ Control: Towards Nonsmooth Theory and Applications*. Birkhäuser, London.
- Ravi, R., Nagpal, K., and Khargonekar, P. (1991). \mathcal{H}_∞ control of linear time-varying systems: a state-space approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29, 1394–1413.
- Van Der Shaft, A. (1992). \mathcal{L}_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 770–784.
- Wu, H.N., Wang, Z.P., and Li, H.X. (2019). Improved \mathcal{H}_∞ sampled-data control for semilinear parabolic PDE systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(6), 1872–1892.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26(2), 301–320.