

# Sistemas Lineales Estocásticos con Soporte Zonotópico

Mario E. Villanueva\*

\* School of Information Science and Technology, ShanghaiTech University, China (meduardov@shanghaitech.edu.cn).

**Resumen:** Este artículo analiza una clase de sistemas lineales estocásticos discretos, cuya secuencia de ruido consiste en variables aleatorias independientes e idénticamente uniformemente distribuidas en zonotopos. Se propone un método basado en cumulantes para aproximar tanto las distribuciones transitorias como la distribución límite de la secuencia de estados. El método está basado en una nueva clase de ecuaciones  $k$ -simétricas de Lyapunov que se utilizan para construir los cumulantes de manera explícita. Las distribuciones transitorias y límite de la secuencia de estado son reconstruidas por medio de una expansión generalizada de Gram-Charlier con utilizando polinomios multivariados de Chebyshev. Esta construcción converge de manera uniforme a las distribuciones exactas bajo suposiciones no-restrictivas.

**Keywords:** Ecuaciones de Lyapunov, control robusto, procesos estocásticos, sistemas lineales

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los procesos lineales estocásticos en tiempo discreto ha sido un tema importante la teoría de control desde sus inicios (Bertsekas and Shreve, 1978; Caines, 1988; Kalman, 1960). En su forma mas básica, los elementos del proceso aditivo de ruido son modelados como variables aleatorias con distribuciones Gaussianas. Este modelo tiene la ventaja de que los elementos de la secuencia de estados son variables aleatorias con distribuciones Gaussianas cuya varianza puede ser calculada usando recurrencias de Lyapunov (Bittanti et al., 1991).

Si se consideran secuencias de ruido cuyas distribuciones tienen un soporte compacto, las distribuciones de estado también deben tener un soporte compacto—al menos si el sistema es asintóticamente estable. Esto es una consecuencia del Lema de entradas-acotadas-salidas-acotadas. Este Lema establece que bajo ciertas suposiciones el conjunto alcanzable de un sistema con entradas acotadas se mantiene acotado (Blanchini and Miani, 2008). Por lo tanto, las distribuciones Gaussianas no son adecuadas para aproximar la distribución de los elementos de la secuencia de estados de estos sistemas. En particular, no es posible generalizar el teorema del límite central (Klartag, 2007) para estos sistemas.

Los métodos numéricos para calcular (o aproximar) la distribución probabilística del estado de un sistema estocástico con entradas acotadas, proceden—en general—en dos etapas. En la primera etapa, el con-

junto alcanzable del sistema—que corresponde al soporte de la distribución—se calcula (o sobre aproxima). Algunos métodos que pueden ser usados en esta etapa incluyen el cálculo elipsoidal (Kurzhanskiy and Varaiya, 2007), técnicas basadas en politopos y zonotopos (Bittoris, 1988), así como la propagación de conjuntos (no-)convexos mas generales (Aubin, 1991; Villanueva et al., 2015).

En la segunda etapa, se calcula una aproximación de la distribución de probabilidad sobre su soporte. Los métodos que pueden ser utilizados en esta etapa son diversos. Estos pueden ser clasificados como *métodos basados en muestreo*—que incluyen a los métodos de Montecarlo (Cafisch, 1998), filtros de tipo ‘unscented’ (Julier and Uhlmann, 2004) e hipercubo latino (Loh, 1996)—*métodos basados en polinomios de expansión de caos* (Xiu and Karniadakis, 2002), y *métodos basados en momentos y/o cumulantes* (Zhang, 2002) en combinación. Desafortunadamente, estos métodos no son prácticos para sistemas de gran dimension, ya que están basados—de alguna manera u otra—en discretizaciones exhaustivas del espacio de probabilidad.

El objetivo de este artículo es el desarrollo de métodos numéricos para calcular tanto las distribuciones transitorias como la distribución límite de los elementos de la secuencia de estados de sistemas estocásticos lineales cuyo ruido tiene una distribución uniforme con soporte zonotópico. El método está basado en el cálculo de cumulantes. Pero, a diferencia de otros métodos de este tipo, los cumulantes son calculados de manera explícita usando una nueva clase de ecuaciones  $k$ -simétricas de Lyapunov. A su vez, los cumulantes son utilizados para construir

\* This work was supported by the National Natural Science Foundation China (NSFC), Nr. 61473185, as well as ShanghaiTech University, Grant-Nr. F-0203-14-012.

una nueva expansión generalizada de Gram-Charlier. A diferencia de otras series de Gram-Charlier que divergen en casos simples (Berkowitz and Garner, 1970; Withers and Nadarajah, 2014), la expansión que se propone en este trabajo converge de manera uniforme a las distribuciones deseadas.

## Notación y Preliminares

El símbolo  $A \otimes B$  denota el producto de Kronecker de dos matrices  $A$  y  $B$ . Además,

$$A^{(k)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k \text{ times}} \quad (1)$$

denota la potenciación de  $A$  (con respecto al producto de Kronecker) para  $k \geq 1$  con  $A^{(0)} = 1$ . La función

$$\text{Sym}_k(A) = \frac{1}{(2k)!} (\nabla \nabla^\top)^{(k)} \left( (x^\top)^{(k)} A x^{(k)} \right).$$

denota el simetrizador de orden  $k$  Holmquist (1985). Esta función esta definida para todas las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n^k \times n^k}$ . La matriz  $A$  se denomina  $k$ -simétrica si  $\text{Sym}_k(A) = A$ . La traza de una matriz cuadrada  $A$  se denota como  $\text{Tr}(A)$ . El producto de Hadamard (elemento a elemento) de dos matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se denota como  $A \odot B$ . El símbolo  $\mathbb{1}$  se usa para matrices unitarias de dimensiones apropiadas.

A lo largo de este artículo,  $\mathbb{I}^n = [-1, 1]^n$  denota el hipercubo unitario cerrado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{int}(\mathbb{I}^n)$  su interior y  $G\mathbb{I}^n + c = \{Gz + c \mid z \in \mathbb{I}^{n_G}\}$  un zonotopo en  $\mathbb{R}^n$  con centro  $c \in \mathbb{R}^n$  y matriz generadora  $G \in \mathbb{R}^{n \times n_G}$ .

Sea  $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Su variación total es

$$\|f\|_{\text{TV}} = \max_{Y' \subseteq \mathbb{I}^n} \left| \int_{Y'} f(y) dy \right|.$$

La probabilidad de un evento se denota como  $\Pr(\cdot)$ .

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se consideran sistemas estocásticos lineales de tipo

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k \quad \text{with} \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Aquí,  $x_k$  y  $w_k$  denotan, respectivamente, el estado y el ruido del proceso en el instante de tiempo  $k$ . Las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , y  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$  son conocidas.

*Supuesto 1.* Los elementos,  $w_k$ , de la secuencia de ruido del proceso son, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , variables aleatorias independientes e idénticamente uniformemente distribuidas (i.i.d.) sobre  $\mathbb{I}^{n_w}$ .

Nótese que el Supuesto 1 puede hacerse sin pérdida de generalidad, ya que todo zonotopo es una transformación lineal de un hipercubo unitario.

El conjunto alcanzable del sistema en el instante  $n \geq 1$ ,

$$X_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A^k B w_{n-k-1} \mid \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, w_k \in \mathbb{I}^{n_w} \right\},$$

es un a zonotopo (Kolmanovsky and Gilbert, 1998). Este conjunto puede ser interpretado como el soporte de la

distribución  $\rho_n$ , del estado  $x_n$  en el instante  $n$ . Si todos los valores propios de  $A$  se localizan en el disco unitario abierto, el conjunto límite

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$$

existe<sup>1</sup> y está acotado Bittanti et al. (1991), aunque en general no es un zonotopo. Por lo tanto, ni las distribuciones transitorias  $\rho_n$  ni la distribución límite cuando  $n \rightarrow \infty$  (si este límite existe), son Gaussianas. Nótese que en general, una caracterización explícita de estas funciones es imposible. El objetivo de este artículo es construir aproximaciones computacionalmente manejables de estas distribuciones.

## 3. FUNCIÓN GENERADORA DE CUMULANTES

Esta sección presenta un análisis de las funciones generadoras de cumulantes

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad C_n(y) = \log \left( \mathbb{E} \left( e^{y^\top x_n} \right) \right) \quad (3)$$

asociadas a las distribuciones  $\rho_n$  (Kendall and Stuart, 1969). Estas funciones son analizadas en los conjuntos polares

$$X_n^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \max_{x \in X_n} y^\top x \leq 1 \right\}$$

de los conjuntos alcanzables  $X_n$ .

Sea  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  la función- $\zeta$  de Riemann y  $B_j$  la  $j$ -ava columna de  $B$ .

*Lema 1.* Considere que el Supuesto 1 se satisface. La función generadora de cumulantes  $C_n$  satisface

$$C_n(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{(-1)^{r+1} \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} (B_j^\top (A^\top)^k y)^{2r} \quad (4)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La suma infinita en miembro derecho de  $C_n(y)$  converge de manera uniforme para todo  $y \in X_n^*$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{M}_n$  la función generadora de momentos,

$$\mathcal{M}_n(y) = \mathbb{E} \left( e^{y^\top x_n} \right) = \int_{X_n} e^{y^\top x} \rho_n(x) dx,$$

que satisface  $C_n(y) = \log(\mathcal{M}_n(y))$ . Sustituyendo la solución de (2) en la integral anterior y utilizando el Supuesto 1 se obtiene

$$\mathcal{M}_n(y) = \prod_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{I}^{n_w}} \frac{\exp(y^\top A^k B w_{n-k-1})}{2^{n_w}} dw_{n-k-1}.$$

La aplicación del Teorema de Fubini y la definición de la función de seno hiperbólico da como resultado

$$\mathcal{M}_n(y) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=1}^{n_w} \frac{1}{y^\top A^k B_j} \sinh(y^\top A^k B_j).$$

Ya que  $\xi \mapsto \frac{\sinh(\xi)}{\xi}$  es una función entera con raíces en  $\xi_\ell = \sqrt{-1} \pi \ell$  para todo  $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , se puede aplicar

<sup>1</sup> El conjunto  $X_\infty$  es el límite de la secuencia  $(X_n)$ , si la distancia de Hausdorff entre  $X_\infty$  y  $X_n$  converge a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

el Teorema de Weierstrass (Busam and Freitag, 2009) obteniendo

$$\frac{\sinh(\xi)}{\xi} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi^2}{\pi^2 \ell^2}\right).$$

Esta representación converge de manera absoluta para todo  $\xi \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto, se obtiene la representación convergente del producto

$$\mathcal{M}_n(y) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=1}^{n_w} \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(y^\top A^k B_j)^2}{\pi^2 \ell^2}\right). \quad (5)$$

Aplicando logaritmos en cada lado de la ecuación

$$C_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{\ell=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(y^\top A^k B_j)^2}{\pi^2 \ell^2}\right).$$

Ya que la expresión

$$\log(1 + \xi) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \xi^r$$

es válida para todo  $\xi \in (-1, 1)$ , la ecuación

$$C_n(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{(-1)^{r+1} \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} [B_j^\top (A^\top)^k y]^{2r}$$

es válida para todo  $y$  que satisfaga  $|B_j^\top (A^\top)^k y| < \pi$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n_w\}$ , y todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . La demostración se concluye observando que la desigualdad es válida para todo  $y \in X_n^*$ .  $\square$

El Lema 1 puede ser utilizado para construir expresiones explícitas de los cumulantes de  $\rho_n$ . Considere la matriz

$$Q_r = \sum_{j=1}^{n_w} B_j^{(r)} \left(B_j^{(r)}\right)^\top \quad (6)$$

y la recurrencia generalizada de Lyapunov

$$P_{r,k+1} = \text{Sym}_r \left( A^{(r)} P_{r,k} \left( A^{(r)} \right)^\top + Q_r \right) \quad (7)$$

con  $P_{r,0} = 0$  para todo  $k, r \in \mathbb{N}$ . La recurrencia (7) con  $r = 1$ , corresponde a la recurrencia estándar de Lyapunov en tiempo discreto.

**Teorema 1.** Considere que el Supuesto 1 se satisface y sea  $P_{r,n}$  la solución de (7). Si

$$K_{2r,n} = \frac{(-1)^{r+1} (2r)! \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} P_{r,n},$$

la función generadora de cumulantes  $C_n$  satisface

$$C_n(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \left( y^{(r)} \right)^\top K_{2r,n} y^{(r)} \quad (8)$$

para todo  $y \in X_n^*$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** La aplicación de la regla del producto mixto para los productos de Kronecker da como resultado

$$S_{j,k,r} = (B_j^\top (A^\top)^k y)^{2r} = (y^\top A^k B_j B_j^\top (A^\top)^k y)^{(r)}.$$

Sumando sobre  $k$  y  $j$  en ambos lados y substituyendo

$$Q_r = \sum_{j=1}^{n_w} B_j^{(r)} \left( B_j^{(r)} \right)^\top \quad (9)$$

$$P_{r,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Sym}_r \left( \left( A^{(r)} \right)^k Q_r \left( \left( A^{(r)} \right)^\top \right)^k \right), \quad (10)$$

se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n_w} S_{j,k,r} = \left( y^{(r)} \right)^\top P_{r,n} y^{(r)}. \quad (11)$$

La relación para  $P_{r,n}$  en (10) es la solución única de (7). Ahora, el Lema 1 implica que

$$C_n(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} \left( y^{(r)} \right)^\top P_{r,n} y^{(r)}. \quad (12)$$

La declaración en el teorema se concluye después de re-escalar los coeficientes usando la expresión

$$K_{2r,n} = \frac{(-1)^{r+1} (2r)! \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} P_{r,n},$$

para los cumulantes pares de  $\rho_n$ .  $\square$

Note que los cumulantes impares,  $K_{2r-1,n} = 0$ , se anulan por la simetría de la distribución de probabilidad  $\rho_n$ .

**Observación 1.** La ecuación generalizada de Lyapunov (7) autónoma (en tiempo). Por lo tanto, puede ser iniciada con los valores iniciales  $P_{r,0} \neq 0$  que corresponden a los cumulantes re-escalados de una variable aleatoria  $x_0$  definida de manera apropiada para representar valores iniciales aleatorios del Sistema (2).

### 3.1 Comportamiento Límite

Para analizar el comportamiento límite de la distribución del estado de (2), utilizamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Los siguientes enunciados son equivalentes

- (1) El conjunto límite  $X_\infty$  existe y está acotado.
- (2) La ecuación simétrica de Lyapunov

$$P_{1,\infty} = A P_{1,\infty} A^\top + B B^\top \quad (13)$$

admite una solución semidefinida positiva  $P_{1,\infty} \succeq 0$ .

- (3) La ecuación generalizada de Lyapunov

$$P_{r,\infty} = \text{Sym}_r \left( A^{(r)} P_{r,\infty} A^{(r)} + Q_r \right) \quad (14)$$

admite una solución semidefinida positiva  $P_{r,\infty} \succeq 0$  para todo  $r \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** La equivalencia de los primeros enunciados es conocida (Bittanti et al., 1991). Para la siguiente equivalencia, suponga por un momento que la matriz

$$Y = \sum_{k=0}^{n_x} A^k B B^\top (A^k)^\top$$

tiene rango máximo de tal manera que (13) admita una solución semidefinida positiva si y solo si todos los valores propios (eigenvalores) de  $A$  se encuentran en el disco

unitario abierto. Ya que el espectro de  $A^{(k)}$ , está dado por

$$\text{spec} \left( A^{(k)} \right) = \left\{ \prod_{j=1}^k \lambda_j \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \text{spec}(A) \right\},$$

La Ecuación (14) admite una solución semidefinida positiva si y solo si (13) admite una solución semidefinida positiva. La suposición sobre el rango de  $Y$  puede eliminarse mediante un argumento basado en proyección.  $\square$

**Corolario 1.** Si las Ecuaciones (14) admiten soluciones semidefinidas positivas  $P_{r,\infty}$ , la distribución límite  $\rho_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$  existe. Además, sus cumulantes pares satisfacen

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad K_{2r,\infty} = \frac{(-1)^{r+1} (2r)! \zeta(2r)}{r \pi^{2r}} P_{r,\infty}.$$

**Observación 2.** Los momentos pares  $M_{2k,n}$  de  $\rho_n$  pueden ser calculados usando los cumulantes  $K_{2k,n}$  junto con la recurrencia (Noschese and Ricci, 2003)

$$M_{2r+2,n}$$

$$= \text{Sym}_{r+1} \left( \sum_{i=0}^r \binom{2r+1}{2i+1} M_{2(r-i),n} \otimes K_{2(i+1),n} \right)$$

con índice  $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . La recurrencia comienza con  $M_{0,n} = 1$  y genera polinomios multivariados de Bell (Withers and Nadarajah, 2014).

#### 4. EXPANSIÓN GENERALIZADA DE GRAM-CHARLIER

Sea  $\omega$  la distribución semicircular multivariada de Wigner,

$$\forall x \in \mathbb{I}^{n_x}, \quad \omega(x) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{n_x} \prod_{j=1}^{n_x} \sqrt{1 - x_j^2}$$

y sea  $\mathcal{U}$  la función generadora de los polinomios multivariados de Chebyshev del segundo tipo,

$$\mathcal{U}(x, y) =$$

$$e^{y^\top x} \prod_{j=1}^{n_x} \left( \cosh \left( y_j \sqrt{x_j^2 - 1} \right) + \frac{x_j \sinh \left( y_j \sqrt{x_j^2 - 1} \right)}{\sqrt{x_j^2 - 1}} \right).$$

El objetivo de esta sección es construir una expansión generalizada de Gram-Charlier (EGGC) de la función  $\rho_n$  con respecto a  $\omega$ . Sean

$$\forall x \in \mathbb{I}^{n_x}, \forall r \in \mathbb{N}, \quad \Psi_{2r}(x) = (\nabla_y \nabla_y^\top)^{(r)} \mathcal{U}(x, 0)$$

los polinomios multivariados pares de Chebyshev (del segundo tipo) en forma matricial.

**Teorema 2.** Suponga (sin pérdida de generalidad) que  $X_n \subseteq \text{int}(\mathbb{I}^{n_x})$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Además, suponga que el par  $(A, B)$  es alcanzable. Entonces, existen coeficientes  $r$ -simétricos únicos  $\Lambda_{r,n} \in \mathbb{R}^{n_x^r \times n_x^r}$  de una EGGC de tal manera que existe para cada  $\nu \geq 1$  una constante  $V < \infty$  tal que

$$\phi_{N,n}(x) = \left( \sum_{r=0}^N \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \right) \omega(x)$$

satisface

$$\|\phi_{N,n} - \rho_n\|_{\text{TV}} \leq \frac{V}{\nu(N - \nu)^\nu}$$

para todo  $n \geq \nu n_x + 1$  y todo  $N > \nu$ . En particular, si  $n \geq n_x + 1$ , la aproximación EGGC  $\phi_{N,n}$  converge de manera uniforme hacia  $\rho_n$  sobre  $\mathbb{I}^{n_x}$  mientras  $N \rightarrow \infty$ .

**Demostración.** La demostración utiliza las propiedades suavizantes del operador de convolución. Ya que (2) es alcanzable, el teorema de Cayley Hamilton junto con el Principio del palomar implican que  $x_n$  es, para cada  $n \geq n_x + 1$ , la superposición de al menos 2 variables aleatorias con distribuciones acotadas y unimodales. Por lo tanto,  $\rho_n$ , es para cada  $n \geq n_x + 1$  una función Lipschitz continua. De igual manera, si  $n \geq \nu n_x + 1$ , la  $(\nu - 1)$ -ava derivada de  $\rho_n$  existe y es Lipschitz continua.

Además,  $X_n \subseteq \text{int}(\mathbb{I}^{n_x})$  implica que las funciones

$$\chi_n(x) = \rho_n(x) \frac{1}{\omega(x)} = \rho_n(x) \left( \frac{\pi}{2} \right)^{n_x} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_x} \sqrt{1 - x_j^2}}$$

tienen derivadas de orden  $(\nu - 1)$  que son globalmente Lipschitz continuas en  $\mathbb{I}^{n_x}$  para todo  $n \geq \nu n_x + 1$ . Las singularidades de las derivadas de  $\omega$  en la frontera de  $\mathbb{I}^{n_x}$  se cancelan mutuamente, ya que  $\rho_n(x) = 0$  para todo  $x \notin X_n$ . Por lo tanto, la serie de Chebyshev de

$$\chi_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \quad (15)$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo  $x \in \mathbb{I}^{n_x}$  y todo  $n \geq \nu n_x + 1$ . La demostración de este resultado puede encontrarse en (Trefethen, 2013)<sup>2</sup>, junto con el estimado

$$\left\| \chi_n - \sum_{r=0}^N \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}) \right\|_{\text{TV}} \leq \mathcal{O} \left( \frac{1}{\nu(N - \nu)^\nu} \right),$$

El resultado se concluye multiplicando ambos miembros de la Ecuación (15) por  $\omega(x)$ .  $\square$

##### 4.1 Aspectos Algorítmicos

Los coeficientes  $\Lambda_{r,n}$  de la EGGC en el Teorema 2 pueden obtenerse por medio de una comparación de de coeficientes. Note que

$$M_{2k,n} = \sum_{r=0}^k \left( \int_{\mathbb{I}^{n_x}} (xx^\top)^{(k)} \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \omega(x) dx \right) \quad (16)$$

da un sistema triangular (lineal) de bloque para  $\Lambda_{r,n}$ , con respecto a los momentos pares  $M_{2r,n}$  de  $\rho_n$ —cuyas formas explícitas son conocidas. Sean  $\Theta_{k,r} \in \mathbb{R}^{n_x^k \times n_x^k}$  los coeficientes de los monomios  $(xx^\top)^{(k)}$  en la base de Chebyshev,

$$(xx^\top)^{(k)} = \sum_{r=0}^k \text{Sym}_k \left( \Theta_{k,r} \odot \left( \Psi_{2r}(x) \otimes \mathbb{1}^{(k-r)} \right) \right) \quad (17)$$

<sup>2</sup> El resultado es válido para polinomios de Chebyshev del primer tipo. Sin embargo, puede transferirse a polinomios del segundo tipo, utilizando la Ecuación (5.109) en (Mason and Handscomb, 2002).

que pueden ser calculados comparando coeficientes. Además, considere las matrices

$$\Omega_r = \int_{\mathbb{I}^{n_x}} \Psi_{2r}(x) \text{Tr}(\mathbf{I}_r \Psi_{2r}(x)) \omega(x) dx.$$

El símbolo  $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{n^r \times n^r}$  denota una matriz cuyos componentes son 1. La matriz  $\Xi_r$  denota la inversa (elemento a elemento) de la matriz  $\Theta_{r,r} \odot \Omega_r$ . Para ser preciso,

$$\Xi_r \odot [\Theta_{r,r} \odot \Omega_r] = \mathbf{I}_r.$$

**Teorema 3.** Los coeficientes  $\Lambda_{k,n}$  de  $\rho_n$  (definidos en el Teorema 2) satisfacen la recurrencia

$$\begin{aligned} \Lambda_{k,n} &= \Xi_k \odot M_{2k} \\ &- \Xi_k \odot \sum_{r=0}^{k-1} \text{Sym}_k \left( \Theta_{k,r} \odot \left( (\Omega_r \odot \Lambda_{r,n}) \otimes \mathbb{1}^{(k-r)} \right) \right) \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Debido a la ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev, (16) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} M_{2k,n} &= \sum_{r=0}^k \left[ \int_{\mathbb{I}^{n_x}} \Theta_{k,r} \odot \text{Sym}_k \left( \Psi_{2r}(x) \otimes \mathbb{1}^{k-r} \right) \right. \\ &\quad \left. \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \omega(x) dx \right], \end{aligned}$$

Y por ortonormalidad con respecto a las funciones  $\omega$ ,

$$\int_{\mathbb{I}^{n_x}} \Psi_{2r}(x) \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \omega(x) dx = \Omega_r \odot \Lambda_{r,n}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$M_{2k,n} = \sum_{r=0}^k \text{Sym}_k \left( \Theta_{k,r} \odot (\Omega_r \odot \Lambda_{r,n}) \otimes \mathbb{1}^{(k-r)} \right).$$

Se concluye resolviendo el sistema con respecto a  $\Lambda_{k,n}$ .  $\square$

Usando este teorema, puede construirse la función  $\phi_{N,n}$ ,

$$\rho_n(x) \approx \phi_{N,n}(x) = \left( \sum_{r=0}^N \text{Tr}(\Lambda_{r,n} \Psi_{2r}(x)) \right) \omega(x),$$

que aproxima  $\rho_n$ . Esta aproximación está construida de tal manera que el error en la distribución acumulada

$$\left| \Pr(x_n \in \mathbb{X}) - \int_{\mathbb{X}} \phi_{N,n}(x) dx \right| \leq \|\phi_{N,n} - \rho_n\|_{\text{TV}},$$

está acotado por  $\|\phi_{N,n} - \rho_n\|_{\text{TV}}$ . El Teorema 2 establece una cota para este error de la aproximación numérica.

## 5. CONTROL DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS CON RESTRICCIONES

En esta sección ilustramos la teoría en este artículo mediante el diseño de controladores con ganancia,  $\mathcal{K}$ , para

$$x_{k+1} = (A_x + A_u \mathcal{K}) x + B w_k \quad \text{with} \quad x_0 = 0 \quad (18)$$

con respecto a la función objetivo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\|x_n\|_2^2 + \|\mathcal{K}x_n\|_2^2) \\ = \int_{\mathbb{I}^{n_x}} (\|x\|_2^2 + \|\mathcal{K}x\|_2^2) \rho_\infty(x, \mathcal{K}) dx. \end{aligned}$$

El sistema está sujeto a restricciones probabilísticas (chance constraints)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(x_n \notin \mathbb{X} \vee \mathcal{K}x_n \notin \mathbb{U}) \leq \epsilon$$

en donde,  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  y  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$  son conjuntos compactos. El parámetro  $\epsilon > 0$  es una cota para la probabilidad de violar la restricción. Sea  $X_\infty(\mathcal{K})$  el conjunto alcanzable de (18) para alguna ganancia  $\mathcal{K}$  y

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}) = \mathbb{X} \cap \{x \in X_\infty(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K}x \in \mathbb{U}\}.$$

El problema de diseño puede expresarse como

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{I}^{n_x}} (\|x\|_2^2 + \|\mathcal{K}x\|_2^2) \rho_\infty(x, \mathcal{K}) dx \\ \text{s.t.} \int_{\mathbb{S}(\mathcal{K})} \rho_\infty(x, \mathcal{K}) dx \geq 1 - \epsilon. \end{aligned} \quad (19)$$

Aquí, se optimiza sobre ganancias estabilizantes, de tal manera que  $\rho_\infty(\cdot, \mathcal{K})$  esté bien definida.

Considere el Sistema (18) con

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix},$$

y  $w_k \in [-1, 1]^2$  para cada  $k \in \mathbb{N}_+$ . Se usa  $\epsilon = 0.15$  y las restricciones son

$$\mathbb{X} = [-0.4, 0.4]^2 \quad \text{and} \quad \mathbb{U} = [-0.3, 0.3].$$

La ganancia  $\mathcal{K}^* \approx (-0.42, -0.81)$  fue calculada mediante una discretización de (19), utilizando la aproximación  $\phi_{5,\infty}(x, \mathcal{K}^*)$ . La Figura 1 muestra gráficos de densidad para  $N = 2$  (izquierda),  $N = 4$  (centro), and  $N = 5$  (derecha). El soporte  $\overline{X}_\infty(\mathcal{K}^*)$  de  $\rho_{N,\infty}$  fue calculado de tal manera que satisface

$$X_\infty(\mathcal{K}^*) \subseteq \overline{X}_\infty(\mathcal{K}^*) \subseteq X_\infty(\mathcal{K}^*) \oplus \bar{\epsilon} \mathbb{I}^{n_x}$$

con  $\bar{\epsilon} = 10^{-4}$  (Rakovic et al., 2005).

Para verificar la precisión de la aproximación

$$\phi_{5,\infty}(x, \mathcal{K}^*) \approx \rho_\infty(x, \mathcal{K}^*),$$

se utilizó el método de Monte-Carlo con  $2.5 \times 10^6$  muestras, resultando en una probabilidad de violar las restricciones de  $\Pr(x_\infty \notin \mathbb{S}(\mathcal{K}^*)) \approx 0.14$ . Utilizando la aproximación propuesta, se obtiene

$$= 1 - \int_{\mathbb{S}(\mathcal{K}^*)} \phi_{5,\infty}(x, \mathcal{K}^*) = 0.15.$$

Para este ejemplo, el error de una aproximación usando EGGC de orden 10 es de aproximadamente 1%. Por el contrario, para una aproximación de segundo orden  $\phi_{1,\infty}$  el error es de  $\Pr(x_\infty \notin \mathbb{S}(\mathcal{K}^*)) \approx 0.58$  (aproximadamente 44%). El supuesto de una distribución Gaussiana resultaría en un error similar a este.

## 6. CONCLUSIÓN

Se propuso un método basado en cumulantes para calcular las distribuciones transitorias y límite del estado de un sistema estocástico con soporte zonotópico. Expresiones explícitas para los cumulantes de estas distribuciones

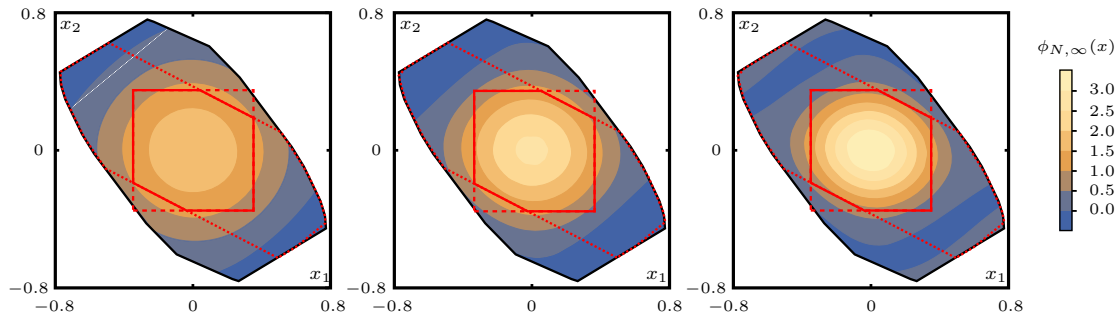


Fig. 1. Gráfico de densidad de la función  $\phi_{N,\infty}$  usando aproximaciones de 4to ( $N = 2$ , izquierda), 8avo ( $N = 4$ , centro), y 10mo ( $N = 5$ , derecha) orden, respectivamente. La línea discontinua (roja), denota la frontera del conjunto  $\mathbb{X}$ . La línea punteada (roja) denota la frontera de  $\{x \in \bar{X}_\infty(K^*) \mid K^*x \in U\}$ . La línea sólida (roja) ilustra la frontera de  $\mathbb{S}(K^*)$ .

fueron construidas (cf. Teorema 1) mediante una nueva clase de recursiones  $k$ -simétricas de Lyapunov. Además, se introdujo una expansión generalizada de Gram-Charlier basada en polinomios de Chebyshev, que puede ser utilizada para reconstruir las distribuciones a partir de sus cumulantes. El Teorema 2 establece la convergencia uniforme de esta expansión. La aplicabilidad del método ha sido ilustrada por medio de un problema de diseño de un controlador lineal.

## REFERENCIAS

- Aubin, J.P. (1991). *Viability theory*. Birkhäuser Boston.
- Berkowitz, S. and Garner, F. (1970). The calculation of multidimensional hermite polynomials and gram-charlier coefficients. *Mathematics of Computation*, 24(11), 537–545.
- Bertsekas, D.P. and Shreve, S. (1978). *Stochastic optimal control: the discrete-time case*. Academic Press.
- Bitsoris, G. (1988). On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems. *Systems & control letters*, 11(3), 243–248.
- Bittanti, S., Colaneri, P., and De Nicolao, G. (1991). The periodic riccati equation. In S. Bittani, A.J. Laub, and J.C. Willems (eds.), *The Riccati Equation*, 127–162. Springer Verlag.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2008). *Set-theoretic methods in control*. Springer, Birkhäuser.
- Busam, R. and Freitag, E. (2009). *Complex analysis*. Springer.
- Cafisch, R.E. (1998). Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta numerica*, 7, 1–49.
- Caines, P.E. (1988). *Linear stochastic systems*, volume 77. John Wiley NYC.
- Holmquist, B. (1985). The direct product permuting matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 17(2), 117–141.
- Julier, S.J. and Uhlmann, J.K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3), 401–422.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45.
- Kendall, M.G. and Stuart, A. (1969). *The advanced theory of statistics*, volume 3. Charles Griffin.
- Klartag, B. (2007). A central limit theorem for convex sets. *Inventiones mathematicae*, 168(1), 91–131.
- Kolmanovsky, I. and Gilbert, E.G. (1998). Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical problems in engineering: Theory, Method and Applications*, 4(4), 317–367.
- Kurzanskiy, A.A. and Varaiya, P. (2007). Ellipsoidal techniques for reachability analysis of discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1), 26–38.
- Loh, W.L. (1996). On latin hypercube sampling. *The annals of statistics*, 24(5), 2058–2080.
- Mason, J.C. and Handscomb, D.C. (2002). *Chebyshev polynomials*. Chapman & Hall/CRC.
- Noschese, S. and Ricci, P.E. (2003). Differentiation of multivariable composite functions and bell polynomials. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5(3), 333–340.
- Rakovic, S.V., Kerrigan, E.C., Kouramas, K.I., and Mayne, D.Q. (2005). Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3), 406–410.
- Trefethen, L.N. (2013). *Approximation theory and approximation practice*, volume 128. SIAM.
- Villanueva, M.E., Houska, B., and Chachuat, B. (2015). Unified framework for the propagation of continuous-time enclosures for parametric nonlinear odes. *Journal of Global Optimization*, 62(3), 575–613.
- Withers, C.S. and Nadarajah, S. (2014). The dual multivariate charlier and edgeworth expansions. *Statistics & Probability Letters*, 87, 76–85.
- Xiu, D. and Karniadakis, G.E. (2002). The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM journal on scientific computing*, 24(2), 619–644.
- Zhang, D. (2002). *Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties*. Academic Press.