# Controladores basados en observadores que preservan el orden parcial para sistemas lineales con retardo

**Jesús D. Avilés** * **Francisco Flores** * **Guillermo Becerra** ** **Jaime A. Moreno** ***

* *Facultad de Ingeniería y Negocios UABC, Tecate BC, 21460 México B.C. (e-mail: david.aviles@uabc.edu.mx).*
** *Universidad de Quintana Roo, Boulevard bahía S/N, esq. Ignacio Comonfort, Col. del Bosque, Chetumal, Quintana Roo, 77019, México*
*** *Instituto de Ingeniería-UNAM, Coyoacán DF, 04510 México D.F., (e-mail: JmorenoP@iingen.unam.mx)*

**Abstract:**
En este trabajo se estudia el diseño de controladores basados en observadores que preservan el orden parcial e intervalo para una clase de sistemas lineales con retardo constante. Se analiza el comportamiento de los controladores para sistemas en ausencia y presencia de perturbaciones. El método de diseño está enfocado en (i) la estimación preserve el orden parcial con respecto a la trayectoria del estado, y (ii) la estabilización de sistemas lineales en lazo cerrado por medio de las estimaciones superior e inferior. El diseño de controladores está basado en un par de características del sistema con retardo: el método de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii con independencia del retardo y cooperatividad. La primera asegura la estabilidad asintótica del sistema aumentado en lazo cerrado (con controlador) en unión con la convergencia de las estimaciones a sus valores reales en el caso de ausencia de perturbaciones, y la segunda establece el ordenamiento parcial entre el estado y las estimaciones.

Las ganancias de los controladores por realimentación de estados pueden ser encontradas mediante la solución de desigualdades matricial bilineal (BMI) y/o lineal (LMI).

*Keywords:* Observadores que Preservan el Orden, Observadores Intervalo, Sistemas con retardos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los *observadores que preservan el orden parcial*, representan una alternativa para la estimación robusta de variables de estados altamente inciertas. Estos observadores se han aplicado exitosamente en numerosas aplicaciones con variables inciertas y/o desconocidas en ls últimas dos décadas (Gouze et al., 2000; Alcaraz-Gonzalez et al., 2002; Bernard and Gouze, 2004; Avilés and Moreno, 2009, 2013, 2014; Mazenc et al., 2014; Raïssi et al., 2012). Estos observadores, basados en la propiedad sistémica de cooperatividad (Angeli and Sontag, 2003; Hirsch and Smith, 2004), proporcionan una estimación inferior y/o superior, las cuales pueden formar un intervalo que contiene a la trayectoria real del estado, en vez de reconstruir los valores verdaderos de las variables inciertas no medibles. El primer diseño apareció en (Gouze et al., 2000), donde se propusieron los *observadores intervalo*, los cuales están constituidos por un observador que preserva el orden parcial superior e inferior, representan una técnica para estimar parámetros y variables desconocidas de procesos biotecnológicos.

Recientemente, en (Efimov et al., 2013) se utilizaron la clase de observadores intervalo en el diseño de controladores. Se analizó la estabilización de salida para una clase de sistemas continuos con parámetros lineales variantes (LPV), utilizando las estimaciones de los observadores intervalo. Posteriormente, en (Efimov et al., 2015) se introdujo un análisis similar para la familia de sistemas LPV en tiempo discreto.

El presente trabajo consiste en diseñar controladores basados en los observadores que preservan el orden parcial para una clase de sistemas lineales con retardo constante. Particularmente, se describe el método de diseño de controladores para sistemas con retardo en presencia y ausencia de perturbaciones. El método está basado en garantizar la estabilidad asintótica con independencia del retardo en el tiempo, de acuerdo al análisis de funcionales Lyapunov-Krasovskii, y el ordenamiento parcial entre las estimaciones y la trayectoria del estado. Las ganancias de los controladores por realimentación de estados pueden ser encontradas mediante la solución de desigualdades matricial bilineal (BMI) y/o lineal (LMI).

## 2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

### 2.1 Notaciones

$M \overset{M}{\succeq} 0$ : $M$ es una matriz Metzler, sii $M_{ij} \geq 0,\ \forall i \neq j$, $\forall i \in 1,...,n,\ \forall j \in 1,...,n$.
$A \succeq 0$ : Matriz $A$ no negativa, sii $A_{ij} \geq 0, \forall i,j = 1,...,n$.
$A \geq 0$ : $A$ es una matriz semidefinida positiva.
$A > 0$ : $A$ es una matriz definida positiva.
$B \leq 0$ : $B$ representa una matriz semidefinida negativa.
$B < 0$ : $B$ representa una matriz definida negativa.
$x \succeq 0$ : Vector $x$ no negativo, sii $x_i \geq 0, \forall i = 1,...,n$.
$x \succeq z$ : Es la representación del orden parcial entre dos vectores, sii $x_i - z_i \geq 0, \forall i = 1,...,n$.
$\|\cdot\|$ : Es la norma Euclidiana de un vector o matriz.
$\dfrac{\partial F(b)}{\partial b}$ : es la matriz Jacobiana con respecto a b.

### 2.2 Sistemas que preservan el orden parcial

La *cooperatividad* es una propiedad sistemática que asegura el ordenamiento parcial entre las trayectorias del estado y salida, dependiendo de un ordenamiento parcial entre estados iniciales y entradas.

Consideramos la familia de sistemas nolineales con retardos descrita por las siguientes ecuaciones

$$\Gamma_{\mathrm{NL}} : \begin{cases} \dot{x}(t) \ = F\left(x(t),\, x(t-d),\, u(t)\right), \quad t \geq 0, \\ x(\theta_d) = \phi(\theta_d), \quad -d \ \leq \ \theta_d \ \leq \ 0, \\ y(t) \ = H\left(x(t),\, x(t-d),\, u(t)\right), \end{cases} \tag{1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. La condición inicial del sistema en (1) está representada como $\phi(\cdot) \in \mathcal{C}([-d,0],\ \mathbb{R}^n)$ para algún retardo constante $d \geq 0$. Asumimos que las funciones nolineales $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}\left([-d,\,0]\right) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $H : \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}\left([-d,\,0]\right) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ son continuas en todos sus argumentos, $F\,(0,\,0,\,0) = 0$ and $H\,(0,\,0,\,0) = 0$. Adicionalmente, $F$ es localmente Lipschitz en sus argumentos. Esto garantiza que el sistema posea una solución $x(t) \equiv 0$.

De acuerdo a Mazenc et al. (2009), se especifica el concepto de cooperatividad con retardo

*Definición 1.* El sistema $\Gamma_{\mathrm{NL}}$ es cooperativo con retardo si para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

- la matriz Jacobiana $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,c)$ es Metzler, y
- la matriz Jacobiana $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c)$ es no-negativa.

*Proposición 2.* Para la familia de sistemas LTI con retardo constante,

$$\Gamma_{\mathrm{L}} : \begin{cases} \dot{x}\,(t) = Ax(t) + A_d x(t-d), \\ y\,(t) = Cx(t) + Cx(x-d), \\ x\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0, \quad \forall\ \theta_d \in [-d,0], \end{cases} \tag{2}$$

la propiedad de cooperatividad está dada por

- $A$ es una matriz Metzler
- $A_d$ es una matriz no-negativa

### 2.3 Estabilidad de sistemas lineales con retardo

Esta sección está dedicada a las nociones de estabilidad de independencia del retardo, que utilizan el teorema de Lyapunov-Krasovskii, para sistemas lineales con retardo constante.

Se analiza la noción de estabilidad del sistema lineal con retardo constante en el tiempo en (2), usando la funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^T(s)Qx(s)ds, \tag{3}$$

donde $P = P^T > 0,\ Q = Q^T > 0$. Particularmente, en el siguiente Teorema se establece las condiciones para garantizar la estabilidad del sistema (2) usando el método de indepencia de retardo.

*Teorema 3.* (Verliest and Ivanov (1994)). El sistema (2) es asintóticamente estable para el retardo $d$ si existen las matrices $P = P^T > 0,\ Q = Q^T > 0$ tal que la siguiente desigualdad permanece

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_d \\ A_d^T P & -Q \end{bmatrix} \leq 0. \tag{4}$$

## 3. CONTROL PARA SISTEMAS NOMINALES BASADO EN OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN PARCIAL

### 3.1 Sistema Nominal

Consideramos el sistema lineal con retardo constante

$$\Gamma_{\mathrm{L}} : \begin{cases} \dot{x}\,(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t), \\ y\,(t) = Cx(t) + Cx(x-d), \\ x\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\ \theta_d \in [-d,0], \end{cases} \tag{5}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. $h \in \mathbb{N}$ es una retardo positivo. $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, son matrices constantes con dimensiones apropiadas. Consideramos la siguiente suposición para el sistema nominal con retardo constante.

*Suposición 4.* La matriz $A + A_d$ tiene todos los valores propios en el semiplano izquierdo.

### 3.2 Observador que preservan el orden parcial

Consideramos un observador tipo Luenberger para estimar las variables desconocidas del sistema (5) descrito por las ecuaciones

 

$$\Gamma_{\mathrm{O}}:\begin{cases}\dot{\widehat{x}}(t)=A\widehat{x}(t)+A_d\widehat{x}(t-d)+Bu(t)\\ \qquad +L(\widehat{y}(t)-y(t))+L_d(\widehat{y}(t-d)-y(t-d)),\\ \widehat{y}(t)=C\widehat{x}(t)+C_d\widehat{x}(t-d),\\ \widehat{x}(\theta_d)=\phi(\theta_d)\geq 0\ \ \forall\ \theta_d\in[-d,0],\end{cases}\tag{6}$$

donde $\widehat{x}(t)$ denota la estimación del estado $x(t)$. $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$ es la matriz del observador de corrección asociada a la inyección de salida.

Se define el vector del error de estimación como $e(t) = \widehat{x}(t) - x(t)$ y el error de salida como $\widetilde{y}(t) \triangleq \widehat{y}(t) - y(t)$. Por tanto, se tiene las dinámicas del error de estimación dadas por

$$\Gamma_{\mathrm{E}}:\begin{cases}\dot{e}(t)=A_Le(t)+A_{Ld}e(t-d),\\ \widetilde{y}(t)=Ce(t)+C_de(t-d),\end{cases}\tag{7}$$

donde las matrices están definidas como

$$A_L = A + LC,$$
$$A_{Ld} = A_d + L_dC_d.$$

Tomando en cuenta el observador $\Gamma_{\mathrm{O}}$, se establecen las condiciones suficientes para una clase de observadores que preservan el orden parcial.

*Definición 5.* $\Gamma_{\mathrm{O}}$ es un observador que preserva el orden parcial superior (inferior) si $\Gamma_{\mathrm{E}}$

(i). Es un sistema cooperativo.
(ii). Es asintóticamente estable.

Revisando la restricción de cooperatividad en el sistema de error de estimación (i), (ver *Proposición 2*), tenemos que $A_L$ es una matriz Metzler y $A_{Ld}$ es una matriz no-negativa.

Es importante mencionar que podemos definir un *observador intervalo* para el sistema con retardo $\Gamma_{\mathrm{L}}$, a partir de un par de observadores que preservan el orden parcial para $\Gamma_{\mathrm{O}}$; un observador que describe la trayectoria por encima de la trayectoria del estado, y otro que describe la trayectoria por debajo del estado.

### *3.3 Controlador basado en observador que preserva el orden parcial*

Ahora, se propone la ley de control por realimentación de estados para $\Gamma_{\mathrm{L}}$ basado en un observador que preserva el orden parcial dado por las siguientes ecuaciones,

$$\Gamma_{\mathrm{U}}:\begin{cases}\dot{\widehat{x}}(t)=A\widehat{x}(t)+A_d\widehat{x}(t-d)+Bu(t)\\ \qquad +L(\widehat{y}(t)-y(t))+L_d(\widehat{y}(t-d)-y(t-d)),\\ \widehat{y}(t)=C\widehat{x}(t)+C\widehat{x}(t-d),\\ u(t)=K\widehat{x}(t)+K_d\widehat{x}(t-d),\\ \widehat{x}(\theta_d)=\phi(\theta_d)\geq 0\ \ \forall\ \theta_d\in[-d,0],\end{cases}\tag{8}$$

donde $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $K_d \in \mathbb{R}^{n\times m}$ son las ganancias del controlador, las cuales tienen que ser encontradas.

La combinación del sistema en lazo cerrado y el sistema de error de estimación es expresada mediante las siguientes ecuaciones

$$\Gamma_{\mathrm{LC}}:\left\{\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_K & B_K\\ 0 & A_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}\right. +\begin{bmatrix}A_{Kd} & B_{Kd}\\ 0 & A_{Ld}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-d)\\ e(t-d)\end{bmatrix}\tag{9}$$

donde las matrices del sistema (9) están dadas por

$$B_K = BK,$$
$$B_{Kd} = BK_d,$$
$$A_K = A + BK,$$
$$A_{Kd} = A_d + BK_d.$$

Nuestra atención está enfocada desarrollar un método independiente del retardo para diseñar controladores basados en observadores que preserva el orden parcial. En el siguiente Teorema se presenta la condición suficiente para garantizar la estabilidad del sistema aumentado (9).

*Teorema 6.* El sistema nominal con un retardo constante en (9) es estabilizable por un control $\Gamma_{\mathrm{U}}$, si existen las matrices $K$, $L$, $K_d$, $L_d$, $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ y las constantes $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, tal que se satisface

$$\begin{bmatrix}\Delta_1+\epsilon_1 I & P_1A_{Kd} & P_1B_K & P_1B_{Kd}\\ A_{Kd}^TP_1 & -Q_{1d} & 0 & 0\\ A_K^TP_1 & 0 & \Delta_2+\epsilon_2 I & P_2A_{Ld}\\ B_{Kd}^TP_1 & 0 & A_{Ld}^TP_2 & -Q_{2d}\end{bmatrix}\leq 0,\tag{10}$$

donde las matrices

$$\Delta_1 = A_K^TP_1 + P_1A_K + Q_{1d}$$
$$\Delta_2 = A_{Ld}^TP_2 + P_2A_{Ld} + Q_{2d}.$$

**Prueba.** Usamos la funcional de Lyapunov-Krasovskii para el sistema con un retardo constante (9),

$$\begin{aligned}V(x,e) &= x^T(t)P_1x(t) + \int_{t-d}^{t} x(s)Q_{1d}x(s)ds\\ &\quad + e^T(t)P_2e(t) + \int_{t-d}^{t} e(s)Q_{2d}e(s)ds.\end{aligned}\tag{11}$$

Entonces, su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (9) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{V} &= p^T(t)\begin{bmatrix}\Delta_1 & P_1A_{Kd} & P_1B_K & P_1B_{Kd}\\ A_{Kd}^TP_1 & -Q_{1d} & 0 & 0\\ A_K^TP_1 & 0 & \Delta_2 & P_2A_{Ld}\\ B_{Kd}^TP_1 & 0 & A_{Ld}^TP_2 & -Q_{2d}\end{bmatrix}p(t)\\ &\leq -\epsilon_1\|x(t)\|^2 - \epsilon_2\|e(t)\|^2\end{aligned}$$

donde $p(t) = [x(t),\ x(t-d),\ e(t),\ e(t-d)]$, entonces el sistema aumentado $\Gamma_{\mathrm{LC}}$ es asintóticamente estable. ■

A continuación, se considera el diseño de un control mediante en el observador que preserva el orden parcial para una familia de sistemas lineales con un retardo constante $\Gamma_{\mathrm{L}}$.

*Teorema 7.* El sistema nominal con un retardo constante en (9) es estabilizable por un control basado en observador que preserva el orden parcial $\Gamma_{\mathrm{U}}$, si las condiciones siguientes son satisfechas

 

- Condición (10),
- $A_L$ es una matriz Metzler y $A_{Ld}$ es una matriz no-negativa.

Es importante mencionar que el diseño propuesto en el Teorema no sólo estabiliza el sistema lineal con retardo constante sino también se garantiza que la trayectoria del estado esté acotado por encima o por debajo por la estimación. Es posible obtener un observador intervalo por medio de la incorporación de dos observadores que preservan el orden parcial, uno por encima de la trayectoria del estado y otro por debajo. Estas estimaciones pueden ser combinadas para ser sumadas a la ley de control $\Gamma_{\mathrm{U}}$.

## 4. CONTROL PARA SISTEMAS PERTURBADOS/INCIERTOS BASADO EN OBSERVADORES INTERVALO

### *4.1 Sistema Perturbado*

Sea el sistema lineal con retardo constante en presencia de términos aditivos de perturbación

$$\Pi_{\mathrm{L}}: \begin{cases} \dot{x}\,(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t) + w(t), \\ y\,(t) = Cx(t) + Cx(x-d), \\ x\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\, \theta_d \in [-d, 0], \end{cases} \tag{12}$$

donde $w(t)$ representa el término exógeno de perturbación, el cual satisface la siguiente desigualdad,

$$w^+(t) \ \succeq \ w(t) \ \succeq w^-(t), \tag{13}$$

con las funciones Lipschitz conocidas para todo $t \geq -d$.

### *4.2 Observadores intervalo*

Ahora, se toman en cuenta un par de observadores con la forma de $\Gamma_{\mathrm{O}}$, que describen a un observador intervalo, para que la trayectoria del estado permanezca limitada por las estimaciones perturbadas. Estos observadores contienen los términos de la cota de la perturbación.

Sean dos observadores para el sistema perturbado con un retardo constante, dados por las siguientes ecuaciones

$$\Pi_{\mathrm{O}^+} \begin{cases} \dot{\widehat{x}}^+\,(t) = A\widehat{x}^+(t) + A_d\widehat{x}^+(t-d) + Bu(t) \\ \qquad\qquad + L^+(\widehat{y}^+(t) - y(t)) + L_d^+(\widehat{y}^+(t-d) - y(t-d)), \\ \widehat{y}^+\,(t) = C\widehat{x}^+(t) + C_d\widehat{x}^+(t-d), \\ \widehat{x}^+\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\, \theta_d \in [-d, 0], \end{cases} \tag{14}$$

$$\Pi_{\mathrm{O}^-} \begin{cases} \dot{\widehat{x}}^-\,(t) = A\widehat{x}^-(t) + A_d\widehat{x}^-(t-d) + Bu(t) \\ \qquad\qquad + L^-(\widehat{y}^-(t) - y(t)) + L_d^-(\widehat{y}^-(t-d) - y(t-d)), \\ \widehat{y}^-\,(t) = C\widehat{x}^-(t) + C_d\widehat{x}^-(t-d), \\ \widehat{x}^-\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\, \theta_d \in [-d, 0], \end{cases} \tag{15}$$

donde $\widehat{x}^+(t)$ y $\widehat{x}^-(t)$ son estimaciones para $x(t)$. Las matrices de diseño son $L^+ \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $L^- \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $L_d^+ \in \mathbb{R}^{n\times q}$ y $L_d^- \in \mathbb{R}^{n\times q}$

Se definen los errores de estimación como $e^+(t) = \widehat{x}(t) - x(t)$ y $e^-(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$. Entonces, podemos escribir las dinámicas como

$$\Pi_{\mathrm{E}^+}: \begin{cases} \dot{e}^+\,(t) = A_L^+e^+(t) + A_{Ld}^+e^+(t-d) + \pi^+(t), \\ \widetilde{y}^+(t) = Ce^+(t) + C_de^+(t-d), \\ e^+\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\, \theta_d \in [-d, 0], \end{cases} \tag{16}$$

$$\Pi_{\mathrm{E}^-}: \begin{cases} \dot{e}^-\,(t) = A_L^-e^-(t) + A_{Ld}^-e^-(t-d) + \pi^-(t), \\ \widetilde{y}^-\,(t) = Ce^-(t) + C_de^-(t-d), \\ e^-\,(\theta_d) = \phi(\theta_d) \geq 0 \ \ \forall\, \theta_d \in [-d, 0], \end{cases} \tag{17}$$

donde las matrices están dadas por $A_L^+ = A + L^+C$, $A_{Ld}^+ = A_d + L_d^+C_d$, $A_L^- = A + L^-C$ y $A_{Ld}^- = A_d + L_d^-C_d$. Además, los términos exógenos $\pi^+(t)$ y $\pi^-(t)$ en los sistemas $\Pi_{\mathrm{E}^+}$ y $\Pi_{\mathrm{E}^-}$, respectivamente representan los errores de perturbaciones,

$$\pi^+(t) = w^+(t) - w(t),$$
$$\pi^-(t) = w(t) - w^-(t),$$

En general, podemos extender fácilmente la definición 5 para clase de sistemas perturbados con retardo constante, considerando condiciones de estabilidad entrada-estado y cooperatividad.

*Definición 8.* $\Pi_{\mathrm{O}^+}$ ($\Pi_{\mathrm{O}^-}$) es un observador que preserva el orden parcial superior (inferior) para el sistema perturbado $\Pi_{\mathrm{L}}$, si satisface las condiciones:

(i). El sistema del error de estimación $\Pi_{\mathrm{E}^+}$ ($\Pi_{\mathrm{E}^-}$) es cooperativo.

(ii). El error de estimación converge asintóticamente a una bola centrada en el origen, $\lim_{t\to\infty} \|e^{\pm}(t)\| \to \beta$.

### *4.3 Controlador basado en observador intervalo*

Para estabilizar el sistema perturbado con retardo constante $\Pi_{\mathrm{L}}$, usando los observadores $\Pi_{\mathrm{E}^+}$ y $\Pi_{\mathrm{E}^-}$, se considera la siguiente realimentación de estados,

$$\Pi_{\mathrm{U}}: \begin{cases} u\,(t) = K\widehat{x}^+(t) + K_d\widehat{x}^+(t-d) \\ \qquad\quad + K\widehat{x}^-(t) + K_d\widehat{x}^-(t-d), \end{cases} \tag{18}$$

donde las matrices de diseño son $L^+ \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L_d^+ \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L^- \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L_d^- \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $K_d \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Tomando en cuenta los el sistema en lazo cerrado y las dinámicas de los errores de estimación, podemos reescribir el sistema aumentado de la siguiente forma:

$$\Pi_{\mathrm{LC}}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}^+(t) \\ \dot{e}^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2K} & B_K & -B_K \\ 0 & A_L^+ & 0 \\ 0 & 0 & A_L^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e^+(t) \\ e^-(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} A_{2Kd} & B_{Kd} & -B_{Kd} \\ 0 & A_{Ld}^+ & 0 \\ 0 & 0 & A_{Ld}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-d) \\ e^+(t-d) \\ e^-(t-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(t) \\ \pi^+(t) \\ \pi^-(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

donde las matrices del sistema aumentado están dadas por $B_K = BK$, $B_{Kd} = BK_d$, $A_{2K} = A + 2BK$, $A_{2Kd} = A_d + 2BK_d$, $A^+_{Ld} = A + L^+_d C_d$, y $A^-_{Ld} = A + L^-_d C_d$.

Ahora, desarrollamos un método de diseño de controladores independiente del retardo basado en observadores intervalo para sistemas perturbados. El siguiente Teorema muestra presenta la condición suficiente para garantizar la estabilización del sistema en lazo cerrado, así como mantener acotado el estado por las estimaciones del observador.

*Teorema 9.* El sistema perturbado aumentado en $\Pi_{\mathrm{LC}}$ es estabilizable por un control $\Pi_{\mathrm{U}}$, si existen las matrices $K$, $L^+$, $L^-$, $K_d$, $L^+_d$, $L^-$, $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$ y las constantes $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$, tal que se satisface las condiciones

- Cooperatividad: $A^+_L$, $A^+_L$ son matrices Metzler, y $A^+_{Ld}$, $A^+_{Ld}$ son matrices no-negativas
- Estabilización:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1+\epsilon_1 I & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge \\ A^T_{2Kd}P_1 & -Q_{1d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T_K P_1 & 0 & \Theta_2+\epsilon_2 I & \blacklozenge & 0 & 0 \\ B^T_{Kd}P_1 & 0 & A^{+T}_{Ld}P_2 & -Q_{2d} & 0 & 0 \\ -B^T_K P_1 & 0 & 0 & 0 & \Theta_3+\epsilon_3 I & \blacklozenge \\ -B^T_{Kd}P_1 & 0 & 0 & 0 & A^{-T}_{Ld}P_3 & -Q_{3d} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{19}$$

donde las matrices

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= A^T_{2K}P_1 + P_1 A_K + Q_{1d} \\ \Theta_2 &= A^{+T}_{Ld}P_2 + P_2 A^{+T}_{Ld} + Q_{2d}, \\ \Theta_3 &= A^{-T}_{Ld}P_3 + P_3 A^{-T}_{Ld} + Q_{3d}, \end{aligned}$$

y $\blacklozenge$ representa el bloque matricial simétrico.

**Prueba.** La primera parte de la prueba está dada por la condición de cooperatividad, la cual consiste en la aplicación de *Proposición 2* en los sistemas de error de observación ($\Pi_{\mathrm{E}^+}$, $\Pi_{\mathrm{E}^-}$). Esto implica que,

$$A^+_L \overset{M}{\succeq} 0, \; A^-_L \overset{M}{\succeq} 0,$$

$$A^+_{Ld}\succeq 0, \quad A^-_{Ld}\succeq 0$$

Para la segunda condición, consideramos la prueba del Teorema 7, tomando la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii para el sistema en lazo cerrado $\Pi_{\mathrm{LC}}$,

$$\begin{aligned} V\left(x,e^+,e^-\right) &= x^T(t)P_1x(t) + \int_{t-d}^{t} x(s)Q_{1d}x(s)ds \\ &+ e^{+T}(t)P_2e^+(t) + \int_{t-d}^{t} e^{+T}(s)Q_{2d}e^+(s)ds \\ &+ e^{-T}(t)P_3e^-(t) + \int_{t-d}^{t} e^{-T}(s)Q_{3d}e^-(s)ds. \end{aligned} \tag{20}$$

Entonces, su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (9) puede ser reescrita como

$$= q^T \begin{bmatrix} \Theta_1 & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge \\ A^T_{2Kd}P_1 & -Q_{1d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T_K P_1 & 0 & \Theta_2 & \blacklozenge & 0 & 0 \\ B^T_{Kd}P_1 & 0 & A^{+T}_{Ld}P_2 & -Q_{2d} & 0 & 0 \\ -B^T_K P_1 & 0 & 0 & 0 & \Theta_3 & \blacklozenge \\ -B^T_{Kd}P_1 & 0 & 0 & 0 & A^{-T}_{Ld}P_3 & -Q_{3d} \end{bmatrix} q$$

$$\begin{aligned} \leq &-\epsilon_1\|x(t)\|^2 - \epsilon_2\|e^+(t)\|^2 - \epsilon_3\|e^-(t)\|^2 \\ &+ 2x^T(t)P_1w(t) + 2e^{+T}(t)P_2\pi^+(t) + 2e^{-T}(t)P_3\pi^-(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq &-(1-\theta_1)\,\epsilon_1 x^T(t)x(t) - (1-\theta_2)\,\epsilon_2 e^{+T}(t)e^+(t) \\ &-(1-\theta_3)\,\epsilon_3 e^{-T}e^-(t) \\ &+\|x(t)\|\left(2\lambda_{\max}(P_1)\|w(t)\| - \theta_1\epsilon_1\|x(t)\|\right) \\ &+\left\|e^+(t)\right\|\left(2\lambda_{\max}(P_2)\left\|\pi^+(t)\right\| - \theta_2\epsilon_2\left\|e^+(t)\right\|\right) \\ &+\left\|e^-(t)\right\|\left(2\lambda_{\max}(P_3)\left\|\pi^-(t)\right\| - \theta_3\epsilon_3\left\|e^-(t)\right\|\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq &-(1-\theta_1)\,\epsilon_1 x^T x(t) - (1-\theta_2)\,\epsilon_2 e^{+T}(t)e^+(t) \\ &-(1-\theta_3)\,\epsilon_3 e^{-T}(t)e^-(t) \end{aligned}$$

donde $q(t) = [x(t),\ x(t-d),\ e^+(t),\ e^+(t-d),\ e^-(t),\ e^-(t-d)]$. Esto depende de las entradas inciertas,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\geq 2\lambda_{\max}(P_1)\|w(t)\|/\theta_1\epsilon_1, \\ \left\|e^+(t)\right\| &\geq 2\lambda_{\max}(P_2)\left\|\pi^+(t)\right\|/\theta_2\epsilon_2, \\ \left\|e^-(t)\right\| &\geq 2\lambda_{\max}(P_3)\left\|\pi^-(t)\right\|/\theta_3\epsilon_3. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema aumentado es Entrada-Estado Estable con respecto a las entradas $w(t)$, $\pi^+(t)$ y $\pi^+(t)$. ■

Cabe mencionar que las desigualdades 10 y 19 pueden ser tratada, en general, como una desigualdades matriciales no lineales. Bajo algunas condiciones, estas desigualdades pueden ser transformadas a desigualdades matriciales bilineales o lineales (BMI's or LMI's). Para estas desigualdades, existen varios programas computacionales eficientes CVX, YALMIP en combinación con Matlab, que proporcionan soluciones algunas veces con condiciones de optimización.

## 5. CONCLUSIONES

Este trabajo se estableció el diseño de controladores basados en los observadores que preservan el orden parcial e intervalo, para una clase de sistemas lineales con retardo, considerando la ausencia y presencia de perturbaciones y/o incertidumbres. El diseño confía en las propiedades de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii y cooperatividad para sistemas con retardos constantes. Las ganancias de los controladores puede ser encontradas mediante la solución de desigualdades matricial bilineal (BMI) y/o lineal (LMI).

 

ACKNOWLEDGEMENTS

J.D. Avilés y F. Flores agradecen el apoyo de la Facultad de Ingeniería y Negocios-Tecate. Jaime Moreno agradece el apoyo financiero del Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, proyecto IISGBAS-122-2014 y del PAPIIT, UNAM, con beca IN113614 y CONACyT Proyecto 241171. La responsabilidad científica recae en los autores.

REFERENCES

Alcaraz-Gonzalez, V., Harmand, J., Rapaport, A., Steyer, J., Gonzalez-Alvarez, V., and Pelayo-Ortiz, C. (2002). Software sensors for highly uncertain wwtps: a new approach based on interval observers. *Water Res*, 36(2515).

Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic*, 48(10), 1684–1698.

Avilés, J. and Moreno, J. (2009). Cooperative observers for nonlinear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China*, 6125–6130.

Avilés, J. and Moreno, J. (2013). Preserving order observers for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, doi: 10.1002/rnc.2975.

Avilés, J. and Moreno, J. (2014). Diseño de observadores que preservan el orden para sistemas no lineales usando transformación de coordenadas. *Congreso Latinoamericano de Control Automático*.

Bernard, O. and Gouze, J. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(3), 765–774.

Efimov, D., Raissi, T., Perruquetti, W., and Zolghadri, A. (2015). Design of interval observers for estimation and stabilization of discrete-time lpv systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, dnv023.

Efimov, D., Raissi, T., and Zolghadri, A. (2013). Control of nonlinear and lpv systems: interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Gouze, J.L., Rapaport, A., and Hadj-Sadok, M.Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecol Modelling*, 133(1-2), 45–56.

Hirsch, M. and Smith, H. (2004). *Monotone Dynamical Systems*. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam 239-357.

Mazenc, F., Dinh, T., and Niculescu, S. (2014). Interval observers for discrete time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (17), 2867–2890.

Mazenc, F., Niculescu, S.I., and Bernard, O. (2009). Interval observers for linear systems with delay. In *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, 1860–1865. IEEE.

Raïssi, T., Efimov, D., and Zolghadri, A. (2012). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 57(1), 260–265.

Verliest, E.I. and Ivanov, A.F. (1994). Robust stability of systems with delayed feedback. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 13(2-3), 213–222.

 