

Predicción no Lineal de Estados para un Robot Móvil Omnidireccional

J. A. Báez-Hernández, M. Velasco-Villa

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av.
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail:
{julio.baez, velasco}@cinvestav.mx).*

Resumen: En este trabajo, se analiza el problema de predicción y control de un robot móvil omnidireccional el cual es afectado por un retardo de tiempo constante τ en las entradas. La solución propuesta está basada en un predictor no lineal secuencial que divide en fracciones más pequeñas el retardo de tiempo y predice gradualmente y de manera escalonada los estados del sistema, de manera que sea posible manejar retardos mayores únicamente aumentando el número de etapas en el predictor. Se demuestran formalmente las condiciones de convergencia de las señales de error de predicción. Se comprueba la eficacia del predictor utilizando un control por retroalimentación basado en estados predichos y efectuando simulaciones numéricas para diferentes valores de τ y diferente número de etapas de predicción.

Palabras clave: Retardo de tiempo, robótica móvil, predicción no lineal, control por retroalimentación.

1. INTRODUCCIÓN

Los retardos de tiempo son tema de estudio importante en el área de control, ya que éste se encuentra presente en múltiple cantidad de sistemas como en procesos químicos y de telecomunicaciones, Niculescu (2001). También puede presentarse de distintas maneras, ya sea puntuales, distribuidos o incluso variantes en el tiempo, cada uno de estos con distintas aproximaciones y métodos de estudio, Kharitonov (2013).

Uno de los primeros trabajos en buscarle solución al caso lineal con retardo a la entrada fue el predictor de Smith (1957), sin embargo, presentaba ciertas restricciones ya que era necesario que el sistema en lazo abierto fuera estable. Por otro lado, a partir de dicha idea surgieron múltiples trabajos e ideas para controlar una mayor cantidad de sistemas, tales como los descritos en Palmor (1996).

Para el caso no lineal han surgido enfoques distintos parcialmente basados en el predictor de Smith y en los trabajos de observación de Thau (1973), tales como Germani et al. (2002), Hou et al. (2002), entre otros. Otro enfoque que soluciona este problema no lineal utilizando retroalimentación de estados, surgen ideas y aproximaciones de Mazenc y Bliman (2006) y Krstic (2009), por mencionar algunos.

El análisis de sistemas no lineales como los robots móviles con retardo de tiempo a la entrada ha sido tratado mas recientemente tanto en tiempo discreto Velasco-Villa et al. (2007), como en tiempo continuo Sira-Ramírez et al. (2010). Otra solución al problema de un robot móvil omnidireccional con retardo de tiempo a la entrada, es el tratado en los trabajos de Fragoso Rubio et al. (2018) y Velasco-Villa et al. (2014) donde se presenta un esquema

* Proyecto realizado con el apoyo de CONACYT.

predictor-observador no lineal inspirado en el observador de Luenberger (1971) para estimar los valores futuros del estado del robot y así poder utilizarlos en un control por retroalimentación; se demuestra en ambos casos que los errores de predicción convergen de manera adecuada. En este trabajo, se utiliza un esquema similar a los anteriores y basado en el caso lineal de Fragoso-Rubio et al. (2019), con la diferencia que en este caso se fragmentará el retardo de tiempo τ en segmentos más pequeños $\bar{\tau}$ y así de manera secuencial se estimarán los estados futuros, permitiendo manejar retardos mayores que dependan de la cantidad de fracciones en que se divida τ .

El trabajo se presenta detalladamente de la siguiente manera. En la Sección 2 se desarrolla el modelo cinemático del sistema robótico móvil a analizar con un marco de referencia fijo. En la Sección 3 se presenta el predictor de los estados futuros junto con el análisis de su dinámica. En la Sección 4 se muestra un control por retroalimentación utilizado junto con el uso del predictor. Por último, en la Sección 5 se encuentran resultados experimentales por medio de simulaciones numéricas y en la Sección 6 se presentan las conclusiones finales de este trabajo.

2. MODELO CINEMÁTICO

El análisis y desarrollo del predictor propuesto se llevará a cabo tomando en cuenta el modelo cinemático del robot móvil omnidireccional obtenido mediante la metodología presentada en Canudas de Wit et al. (1996).

Considerando la configuración mostrada en la Figura 1, x , y representan la posición del robot en el plano $X - Y$ y ϕ representa el ángulo de orientación del robot con respecto al eje X del marco fijo, obteniendo así el vector de estados $\xi(t) = [x(t) \ y(t) \ \phi(t)]$.

Por otro lado, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$ representan los ángulos de rotación de las ruedas 1, 2 y 3 respectivamente y L

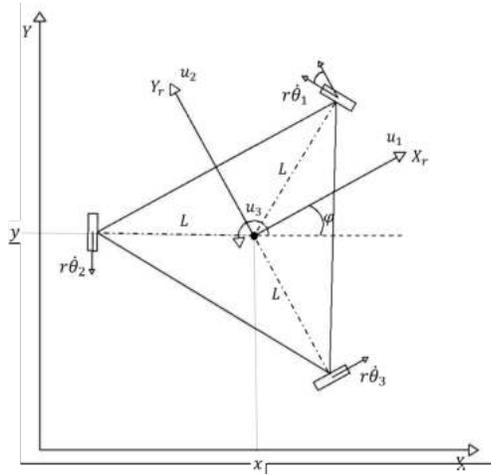


Figura 1. Diagrama sencillo robot omnidireccional representa la distancia del punto P (denotado por (x, y)) a cada una de las ruedas.

Las señales de control están dadas por las velocidades lineales ortogonales u_1, u_2 (ubicadas a lo largo de los ejes móviles X_r, Y_r respectivamente) y la velocidad angular u_3 .

La relación entre los ejes inerciales $X-Y$ y los ejes móviles $X_r - Y_r$ está dada por la matriz de rotación $R(\phi(t))$,

$$R(\phi(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con dichos parámetros, se obtiene la siguiente ecuación representativa del sistema,

$$J_1 R(\phi(t)) \dot{\xi}(t) + r\dot{\theta} = 0$$

con r denotando el radio de las ruedas y donde,

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el modelo del sistema resulta de la siguiente manera:

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (1)$$

2.1 Inducción del tiempo de retardo

Considerando una estrategia de control a distancia donde el robot y la computadora de control se encuentran en diferentes localizaciones, para simular el retardo ocasionado por el tiempo τ_1 que tarda en enviarse la señal de control a la posición remota y en recibirse las señales medidas τ_2 en el vehículo, como se ejemplifica en la Figura 2, se induce un tiempo $\tau = \tau_1 + \tau_2$ en las entradas de control $\dot{\theta}$ que expresa el retardo total, dando un sistema de la forma:

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t - \tau). \quad (2)$$

Observación 1. Nótese que dado que τ_1 se localiza en la señal de entrada del vehículo y τ_2 puede asumirse en la señal de salida, es posible considerar un retardo τ afectando a la entrada del robot.

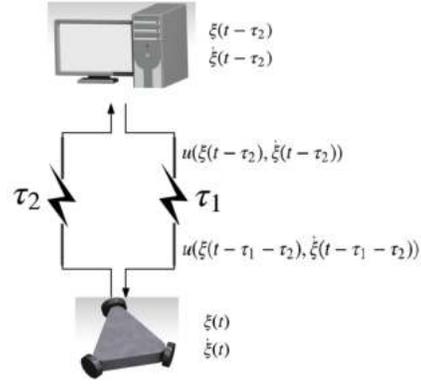


Figura 2. Ejemplo de retardo en comunicaciones

3. PREDICTOR SECUENCIAL

La solución presentada en este trabajo para el problema de predicción propuesta consiste en dividir el retardo τ en pequeñas fracciones de tiempo y así utilizar predictores encadenados. Esta idea ha sido tomada del caso lineal resuelto en Fragoso-Rubio et al. (2019) y extendida al caso no lineal del robot móvil omnidireccional.

Para llevar a cabo el desarrollo del predictor particionado se requiere que las siguientes suposiciones sean satisfechas.

Suposición 1. Considerando el retardo total τ , suponga que existe $n \in N^+$ tal que $\bar{\tau} = \frac{\tau}{n}$, donde n es la cantidad de fracciones en que se dividirá el retardo.

Suposición 2. Los estados x, y, ϕ del robot móvil son medibles.

3.1 Sistema en adelante

Inicialmente se propone encontrar la representación del sistema (2), τ unidades de tiempo en el futuro. Para tal efecto, considere el siguiente cambio de coordenadas,

$$\rho_i(t) = \xi(t + i\bar{\tau}) = \rho_{i-1}(t + \bar{\tau}).$$

con $i = 1, 2, \dots, n$. Obteniendo así la representación en tiempo futuro,

$$\dot{\rho}_i(t) = -r(J_1 R(\rho_{i3}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n - i)\bar{\tau}). \quad (3)$$

3.2 Esquema de predicción

Para estimar los valores futuros definidos en la Ecuación (3) se propone un predictor basado en el observador tipo Luenberger (1971), en la forma,

$$\dot{\hat{\rho}}_i(t) = -r(J_1 R(\hat{\rho}_{i3}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n - i)\bar{\tau}) + \lambda_i e_{\rho_i}(t - \bar{\tau}). \quad (4)$$

Donde $i = 1, 2, \dots, n$, λ_i son ganancias reales positivas y los errores de inyección $e_{\rho_i} = [e_{\rho_{i1}} \ e_{\rho_{i2}} \ e_{\rho_{i3}}]^T$ se definen como,

$$e_{\rho_i}(t - \bar{\tau}) = \hat{\rho}_{i-1}(t) - \hat{\rho}_i(t - \bar{\tau}) \quad (5)$$

En las ecuaciones anteriores se puede apreciar que la inyección de los errores $e_{\rho_i}(t - \bar{\tau})$ está retrasada $\bar{\tau}$ unidades de tiempo con el fin de utilizar únicamente estados medibles, dado que de esta forma,

$$e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}) = \rho_1(t - \bar{\tau}) - \hat{\rho}_1(t - \bar{\tau}) = \xi(t) - \hat{\xi}(t) \quad (6)$$

depende solo de entradas en el tiempo t .

3.3 Dinámica de los errores de inyección

La evolución de los errores de inyección (5) y (6), se obtiene al considerar su derivada con respecto al tiempo, esto es,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_1}(t) &= \dot{\rho}_1(t) - \dot{\hat{\rho}}_1(t) \\ \dot{e}_{\rho_1}(t) &= -r(J_1 R(\rho_{13}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n-1)\bar{\tau}) \\ &\quad + r(J_1 R(\hat{\rho}_{13}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n-1)\bar{\tau}) - \lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{\rho_1}(t) &= -r[R^T(\rho_{13}) - R^T(\hat{\rho}_{13})]J_1^{-1} \dot{\theta}(t - (n-1)\bar{\tau}) \\ &\quad - \lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}).\end{aligned}\quad (7a)$$

De la misma forma se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_i}(t) &= -r[R^T(\hat{\rho}_{(i-1)3}(t + \bar{\tau})) - R^T(\hat{\rho}_{i3})]J_1^{-1} \dot{\theta}(t - (n-i)\bar{\tau}) \\ &\quad + \lambda_{i-1} e_{\rho_{i-1}}(t) - \lambda_i e_{\rho_i}(t - \bar{\tau})\end{aligned}\quad (7b)$$

Nótese en particular para (7a) que,

$$\begin{aligned}R^T(\rho_{13}) - R^T(\hat{\rho}_{13}) &= \\ \begin{bmatrix} \cos(\rho_{13}) - \cos(\hat{\rho}_{13}) & -\sin(\rho_{13}) + \sin(\hat{\rho}_{13}) & 0 \\ \sin(\rho_{13}) - \sin(\hat{\rho}_{13}) & \cos(\rho_{13}) - \cos(\hat{\rho}_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -2 \sin \frac{e_{\rho_{13}}}{2} \\ &\quad \begin{bmatrix} 2 \sin(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 2 \cos(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 0 \\ -2 \cos(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 2 \sin(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -2 \sin \frac{e_{\rho_{13}}}{2} F(e_{\rho_{13}}, \hat{\rho}_{13})\end{aligned}\quad (8)$$

con:

$$F(e_{\rho_{13}}, \hat{\rho}_{13}) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & \cos(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 0 \\ -\cos(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & \sin(\frac{e_{\rho_{13}}}{2} + \hat{\rho}_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad (9)$$

Obteniéndose entonces que (7a) puede reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_1}(t) &= 2r \sin \frac{e_{\rho_{13}}}{2} F(e_{\rho_{13}}, \hat{\rho}_{13}) J_1^{-1} \dot{\theta}(t - 2\bar{\tau}) \\ &\quad - \lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}).\end{aligned}\quad (10)$$

Procediendo de igual forma, se obtiene de manera equivalente,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_i}(t) &= 2r \sin \frac{e_{\rho_{i3}}}{2} F(e_{\rho_{i3}}, \hat{\rho}_{i3}) J_1^{-1} \dot{\theta}(t - (n-i)\bar{\tau}) \\ &\quad + \lambda_{i-1} e_{\rho_{i-1}}(t) - \lambda_i e_{\rho_i}(t - \bar{\tau})\end{aligned}\quad (11)$$

donde $F(e_{\rho_{i3}}, \hat{\rho}_{i3})$ está dada por (9).

Las condiciones de convergencia de los errores de inyección e_{ρ_i} se establecen en el siguiente lema,

Lema 1. Suponga que las suposiciones 1 y 2 se satisfacen y que las señales de entrada $\dot{\theta}(t)$ son acotadas para todo t , esto es,

$$\sup_{t \geq t_0} \{\dot{\theta}(t)\} = \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} \in \mathfrak{R}^+.$$

Entonces, los errores de inyección: $e_{\rho_i}(t)$, $i = 1, \dots, n$ convergen a cero, si y solo si

$$\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_{min}}\quad (12)$$

donde $\lambda_{min} = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Demostración. Note primero que los errores de inyección $e_{\rho_i}(t)$ del i -ésimo predictor pueden expandirse en la forma

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_{\rho_{i1}}(t) \\ \dot{e}_{\rho_{i2}}(t) \end{bmatrix} &= 2r \sin \frac{e_{\rho_{i3}}}{2} \bar{F}(e_{\rho_{i3}}, \hat{\rho}_{i3}) J_1^{-1} \dot{\theta}(t - (n-i)\bar{\tau}) \\ &\quad + \lambda_{i-1} \begin{bmatrix} e_{\rho_{(i-1)1}}(t) \\ e_{\rho_{(i-1)2}}(t) \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} e_{\rho_{i1}}(t - \bar{\tau}) \\ e_{\rho_{i2}}(t - \bar{\tau}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\dot{e}_{\rho_{i3}}(t) = \lambda_{i-1} e_{\rho_{(i-1)3}}(t) - \lambda_i e_{\rho_{i3}}(t - \bar{\tau})\quad (14)$$

donde,

$$\bar{F}(e_{\rho_{i3}}, \hat{\rho}_{i3}) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{e_{\rho_{i3}}}{2} + \hat{\rho}_{i3}) & \cos(\frac{e_{\rho_{i3}}}{2} + \hat{\rho}_{i3}) & 0 \\ -\cos(\frac{e_{\rho_{i3}}}{2} + \hat{\rho}_{i3}) & \sin(\frac{e_{\rho_{i3}}}{2} + \hat{\rho}_{i3}) & 0 \end{bmatrix}.\quad (15)$$

Para el caso $i = 1$ se tiene de la ecuación (14) que $\lambda_{i-1} = 0$, por lo tanto, se obtiene que

$$\dot{e}_{\rho_{13}}(t) = -\lambda_1 e_{\rho_{13}}(t - \bar{\tau})\quad (16)$$

la cual converge exponencialmente a cero tal como se demuestra en Niculescu (2001) si y solo si,

$$\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_1}.\quad (17)$$

Acto seguido, para $i = 2$ se tiene que

$$\dot{e}_{\rho_{23}}(t) = \lambda_1 e_{\rho_{13}}(t) - \lambda_2 e_{\rho_{23}}(t - \bar{\tau}).\quad (18)$$

Considerando que cuando $t \rightarrow \infty$ el error angular $e_{\rho_{13}}(t) \rightarrow 0$ la estabilidad del sistema (18) puede establecerse a partir de,

$$\dot{e}_{\rho_{23}}(t) = -\lambda_2 e_{\rho_{23}}(t - \bar{\tau})\quad (19)$$

que tiene la misma forma que (16), y por lo tanto tiene una condición de convergencia similar a (17), esto es $\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_2}$.

Siguiendo el mismo planteamiento, en las $n - 2$ ecuaciones siguientes se deben cumplir condiciones similares de convergencia para que siempre que se satisfaga $\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_i}$ ($i = 3, \dots, n$), de esta manera, se obtendrá la estabilidad asintótica de los errores de inyección angular $e_{\rho_{i3}}$.

Como consecuencia de la convergencia de $e_{\rho_{i3}}$ y dado que $\dot{\theta} < \bar{\theta}$ para todo t , los términos de entrada de la ecuación (11),

$$2r \sin \frac{e_{\rho_{i3}}}{2} F(e_{\rho_{i3}}, \hat{\rho}_{i3}) J_1^{-1} \dot{\theta}(t - (n-i)\bar{\tau})$$

tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$ independientemente de la dinámica de los errores $e_{\rho_{i1}}$ y $e_{\rho_{i2}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

De esta manera, la estabilidad del sistema comprendido por las ecuaciones (10) y (11) puede ser analizado por medio del sistema simplificado,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_1}(t) &= -\lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{\rho_i}(t) &= \lambda_{i-1} e_{\rho_{i-1}}(t) - \lambda_i e_{\rho_i}(t - \bar{\tau})\end{aligned}\quad (20)$$

con $i = 2, \dots, n$, el cual tiene una forma idéntica a la parte angular del sistema, por lo que siempre puede estabilizarse bajo una correcta selección de los parámetros λ_i y de las divisiones n del retardo τ (para obtener un valor mas pequeño de $\bar{\tau}$).

Q.E.D.

Basado en la convergencia de los errores de inyección $e_{\rho_i}(t)$ es posible ahora establecer la convergencia de los errores de predicción $\tilde{\rho}_i(t) = \rho_i(t) - \hat{\rho}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Corolario 1. El error de predicción, $\tilde{\rho}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, converge asintóticamente a cero si y solo si la dinámica de los errores de inyección es convergente.

Demostración. A partir de la definición de los errores de inyección (5), (6) es posible obtener,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_i(t) &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) - \hat{\rho}_{i-1}(t + \bar{\tau}) \\ \tilde{\rho}_i(t) &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{\tau}) - \hat{\rho}_{i-2}(t + 2\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \tilde{\rho}_i(t) &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) - \hat{\rho}_1(t + (i-1)\bar{\tau}) \\ \tilde{\rho}_i(t) &= \rho_1(t + (i-1)\bar{\tau}) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) - \hat{\rho}_1(t + (i-1)\bar{\tau}) \\ \tilde{\rho}_i(t) &= e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) + e_{\rho_1}(t + (i-1)\bar{\tau})\end{aligned}$$

esto es,

$$\tilde{\rho}_i(t) = \sum_{k=1}^i e_{\rho_k}(t + (i-k)\bar{\tau}). \quad (21)$$

De la ecuación (21) es fácil notar que la convergencia de los errores de inyección $e_{\rho_k}(t)$ provocan la convergencia de los errores de predicción.

Q.E.D.

4. RETROALIMENTACIÓN BASADA EN ESTADOS PREDICHOS

La utilidad del predictor secuencial (4) se mostrara ahora utilizando los estados predichos en el diseño de una retroalimentación que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria para el robot omnidireccional dado por la ecuación (2). En el desarrollo de esta estrategia de control se omite el análisis de la convergencia de los errores de seguimiento.

Considerando una solución basada en linealización por retroalimentación que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria resulta,

$$\dot{\theta}(t - \tau) = -\frac{1}{r} J_1 R(\phi(t)) \{ \dot{\xi}_d(t) - k[\xi(t) - \xi_d(t)] \} \quad (22)$$

Sin embargo, es evidente que (22) no puede utilizarse ya que se necesitarían valores futuros del sistema. Debido a esto, se implementa el uso del predictor (4), dando como resultado la siguiente retroalimentación,

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r} J_1 R(\hat{\rho}_{n3}(t)) \{ \dot{\rho}_{nd}(t) - k[\hat{\rho}_n(t) - \rho_{nd}(t)] \} \quad (23)$$

Definiendo el error de seguimiento como $e_s = \rho_n - \rho_{nd}$ es posible mostrar que,

$$\begin{aligned}\dot{e}_s(t) &= k\tilde{\rho}_n(t) - ke_s(t) + \gamma_1 \\ \dot{e}_{\rho_1}(t) &= -\lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}) + \gamma_2 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\rho_i}(t) &= \lambda_{i-1} e_{\rho_{i-1}}(t) - \lambda_i e_{\rho_i}(t - \bar{\tau}) + \gamma_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\rho_n}(t) &= \lambda_{n-1} e_{\rho_{n-1}}(t) - \lambda_n e_{\rho_n}(t - \bar{\tau}) + \gamma_{n+1}\end{aligned}\quad (24)$$

donde,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E_s [\dot{\rho}_{nd}(t) + k\tilde{\rho}_n(t) - ke_s(t)] \\ \gamma_2 &= [E_1 - E_2] [\dot{\rho}_{nd}(t - (n-1)\bar{\tau}) + k\tilde{\rho}_n(t - (n-1)\bar{\tau}) \\ &\quad - ke_s(t - (n-1)\bar{\tau})] \\ \gamma_{i+1} &= [E_i(t + \bar{\tau}) - E_{i+1}] [\dot{\rho}_{nd}(t - (n-i)\bar{\tau}) \\ &\quad + k\tilde{\rho}_n(t - (n-i)\bar{\tau}) - ke_s(t - (n-i)\bar{\tau})] \\ \gamma_{n+1} &= [E_n(t + \bar{\tau})] [\dot{\rho}_{nd}(t) + k\tilde{\rho}_n(t) - ke_s(t)]\end{aligned}$$

$$E_i = E(\alpha_i) = \begin{bmatrix} -2\sin^2\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) & -\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & -2\sin^2\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\alpha_i = \tilde{\rho}_{n3}(t - [n-i+1]\bar{\tau}) - \tilde{\rho}_{(i-1)3}(t)$, $i = 2, \dots, n$. Exceptuando los siguientes casos,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \tilde{\rho}_{n3}(t - [n-1]\bar{\tau}) \\ \alpha_s &= \tilde{\rho}_{n3}.\end{aligned}$$

La convergencia de los errores de seguimiento (24) se realiza de manera similar al caso de los errores de inyección (10), (11) mostrando primero la convergencia de los errores de orientación para mostrar posteriormente que esta convergencia implica que los términos γ_i resultan desvanecientes.

La demostración detallada se omite por cuestiones de espacio.

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Para realizar la evaluación experimental se considerará el seguimiento de una trayectoria tipo lemniscata generada a partir de, $x = A \cos(pt)$, $y = B \sin(2pt)$, con los parámetros $A = 1$, $B = 0.4$, $p = \frac{\pi}{20}$.

Se considera el modelo cinemático de un robot omnidireccional con $L = 0.1877m$ y $r = 0.0381m$. El diseño del predictor (4) se lleva a cabo considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5$, las cuales cumplen con lo establecido en (12), y para la retroalimentación (23) se considera $k = 0.3$.

Se llevan a cabo dos casos considerando $n = 1, 3$ y $\tau = 0.3 \text{ seg}$ y $\tau = 0.5 \text{ seg}$.

5.1 Simulación numérica con $\tau = 0.3 \text{ seg}$.

Primero se presentan los resultados con un retardo $\tau = 0.3 \text{ seg}$. Se puede apreciar en la Figura 3 la evolución en el plano $X - Y$ para los casos $n = 1$ y $n = 3$. Se aprecia que con $n = 1$ le es más complicado al sistema en converger que cuando se tiene $n = 3$.

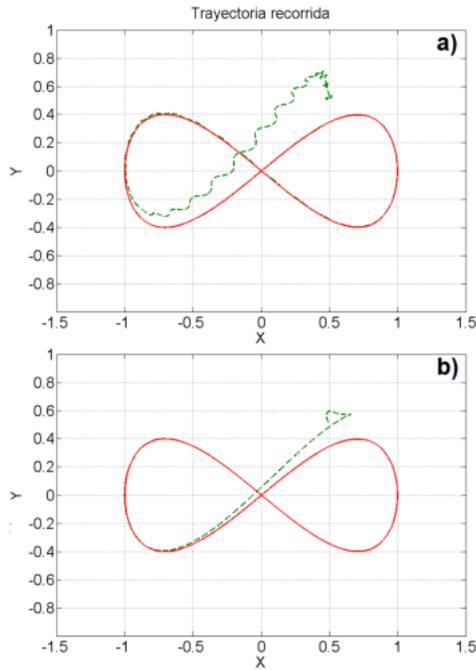


Figura 3. Trayectoria deseada (rojo) y trayectoria recorrida (verde). a) $n = 1$ b) $n = 3$.

La comparación entre $n = 1$ y $n = 3$ se vuelve más evidente observando las gráficas de las Figuras 4 y 5 en la cual se nota una convergencia más rápida y limpia en el caso $n = 3$. De igual manera, en la Figura 6 se presentan las señales de control, donde se aprecia que estas se encuentran acotadas y que cuando ambos errores de predicción convergen las señales de control de ambos casos se comportan de manera similar.

5.2 Simulación numérica con $\tau = 0.5 \text{ seg}$.

En este segundo caso, no se presentan los resultados del predictor con $n = 1$ ya que no se satisface el *Lema 1*, el cual es satisfecho con $n = 3$. En la Figura 7 se puede verificar que el sistema converge de manera adecuada a la trayectoria deseada.

Por otro lado, en las gráficas de la Figura 8 se ve que nuevamente los errores de predicción tienden a 0 de manera rápida y satisfactoria. Finalmente en la Figura 9 es posible notar un comportamiento similar al presentado en la Figura 6.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el diseño de un predictor no lineal para estimar los valores futuros de los estados

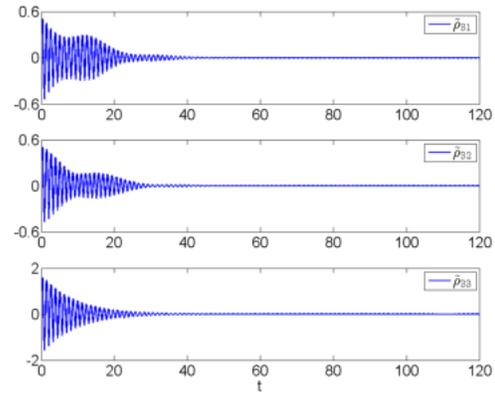


Figura 4. Gráficas del error de predicción en x , y y θ respectivamente con $n = 1$ y $\tau = 0.3 \text{ seg}$.

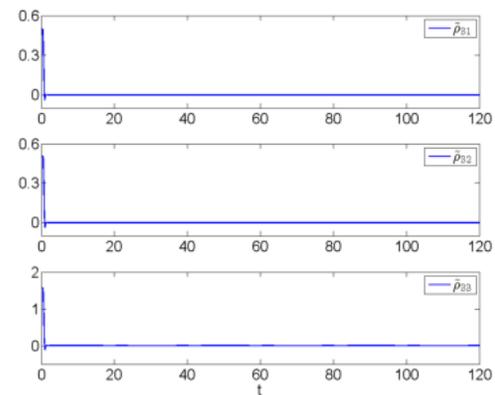


Figura 5. Gráficas del error de predicción en x , y y θ respectivamente con $n = 3$ y $\tau = 0.3 \text{ seg}$.

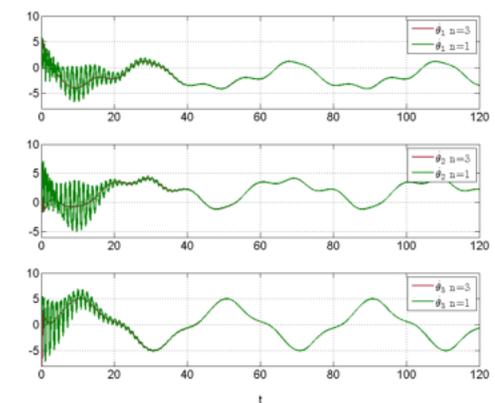


Figura 6. Señales de control $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ (rad/seg) respectivamente con $\tau = 0.3 \text{ seg}$.

de un robot móvil omnidireccional. Se muestra que la estrategia de predicción puede utilizarse para cualquier valor de retardo τ a la entrada del vehículo aumentando la dimensión del predictor. La convergencia de los errores de predicción se muestra formalmente analizando la dinámi-

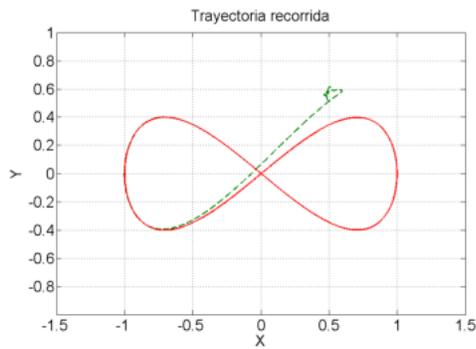


Figura 7. Trayectoria deseada (rojo) y trayectoria recorrida (verde) con $n = 3$.

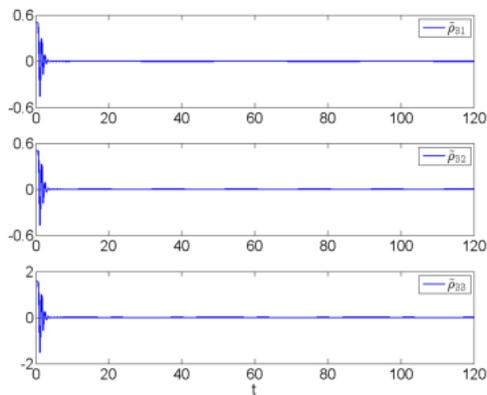


Figura 8. Gráficas del error de predicción en x , y y θ respectivamente con $n = 3$ y $\tau = 0.5$ seg.

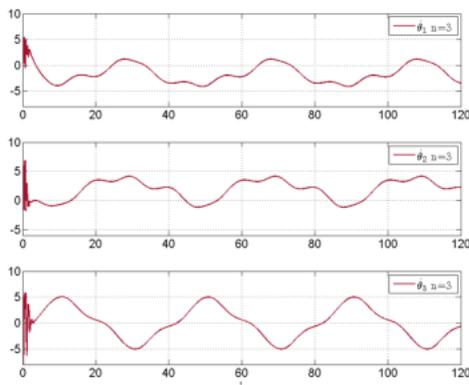


Figura 9. Señales de control $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ (rad/seg) respectivamente con $\tau = 0.5$ seg.

ca de los errores de inyección del predictor. Se muestra la utilización de los estados estimados futuros en la solución del problema de seguimiento de trayectorias para el robot omnidireccional.

REFERENCIAS

Canudas de Wit, C., Siciliano, B., y Bastin, G. (1996). *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag.

- Fragoso Rubio, V., Vallejo Alarcón, M.A., y Velasco Villa, M. (2018). Control basado en predicción no lineal para un robot móvil omnidireccional con retardo a la entrada. En *Congreso Nacional de Control Automático*.
- Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuellar, B., y Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time delay. *International Journal of Control, Automation and System*, 17.
- Germani, A., Manes, C., y Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 96-101.
- Hou, M., Ztek, P., y Patton, R.J. (2002). An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 121-125.
- Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices*. Birkhäuser.
- Krstic, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16, 596-602.
- Mazenc, F. y Bliman, P.A. (2006). Backstepping design for time delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 149-154.
- Niculescu, S.I. (2001). *Delay Effects on Stability, A Robust Control Approach*. Springer.
- Palmer, Z.J. (1996). Time-delay compensation smith predictor and its modifications. *The Control Handbook*, 1, 224-229.
- Sira-Ramírez, H., López-Urbe, C., y Velasco-Villa, M. (2010). Trajectory-tracking control of an input delayed omnidirectional mobile robot. En *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*.
- Smith, O.J.M. (1957). Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5), 217-219.
- Thau, F.E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3), 471-479.
- Velasco-Villa, M., del Muro-Cuellar, B., y Alvarez-Aguirre, A. (2007). Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot. En *Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Velasco-Villa, M., Mandujano-García, E., Estrada-Sánchez, I., Rodríguez-Cortés, H., y Sira-Ramírez, H. (2014). Esquema predictor-observador para el control de un robot móvil omnidireccional con retardos de tiempo. En *Congreso Latinoamericano de Control Automático*.