

Nuevas familias de controladores de tiempo finito para sistemas de segundo orden SISO y MIMO^{*}

Emmanuel Cruz-Zavala^{*}, Tonametl Sanchez^{**}
 Emmanuel Nuño^{*}, Jaime A. Moreno^{***}

^{*} Departamento de Ciencias Computacionales, CUCEI, Universidad de Guadalajara. Guadalajara, Jalisco, México.

^{**} División de Matemáticas Aplicadas del IPICYT, 78216 San Luis Potosí, México.

^{***} Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Ciudad de México, México.

Resumen: En este trabajo se modifican los controladores saturados y no saturados publicados por Bhat y Bernstein en 1998. La finalidad es obtener controladores más adecuados para las tareas de control. Adicionalmente, estos nuevos controladores se generalizan para obtener reguladores de tiempo finito para robots manipuladores. Las principales propiedades del sistema retroalimentado son verificadas por medio de funciones de Lyapunov.

Palabras clave: Sistemas no lineales; control de tiempo finito; funciones de Lyapunov; robots manipuladores.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas continuos cuyo origen es estable en tiempo finito (TF) presentan interesantes características de desempeño, e.g. robustez, breve periodo de asentamiento y nulo error en estado estacionario (Venkataraman and Gulati, 1993; Bhat and Bernstein, 2000). Esto ha motivado a muchos autores a estudiar esta clase de sistemas con el fin de solucionar diversos problemas en los sistemas de control automático (Bhat and Bernstein, 1997, 1998; Moulay and Perruquetti, 2006; Hong et al., 2010; Menard et al., 2010; Lopez-Ramirez et al., 2018). Por otra parte, el diseño de sistemas de control enfrenta importantes problemas en la implementación, e.g. la saturación en los actuadores que impone un gran reto en el diseño incluso para sistemas lineales (Tarbouriech et al., 2011).

El doble integrador es una pieza fundamental para el modelado de muchos sistemas físicos, es por ello que se considera ampliamente para verificar nuevas técnicas de control (Haimo, 1986; Bhat and Bernstein, 1998; Hong et al., 2002; Bernuau et al., 2012). En particular, en (Bhat and Bernstein, 1998) se reportaron dos familias de controladores continuos que proporcionan convergencia en TF a un doble integrador, i.e. para el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = \psi(x, y), \quad (1)$$

el controlador ψ es continuo y puede ser diseñado con términos saturados o no saturados y el origen de (1) es estable en TF. La clase de controladores no saturados está dada por¹

^{*} Este trabajo se recibió el apoyo financiero de los proyectos SEP-PRODEP Apoyo a la Incorporación de NPTC 511-6/18-9169 UDG-PTC-1400 y CONACyT CB-282807.

¹ Para cualquier $z \in \mathbb{R}$ y cualquier real $p \geq 0$, $[z]^p \triangleq |z|^p \text{sign}(z)$, donde $\text{sign}(z)$ denota la función signo.

$$\psi(x, y) = -[\bar{s}(x, y)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - [y]^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (2)$$

donde $\bar{s}(x, y) \triangleq \frac{1}{2-\alpha}[y]^{2-\alpha} + x$. En (Bhat and Bernstein, 1998) se prueba la estabilidad en TF del origen de (1) en lazo cerrado con (2) usando una función de Lyapunov (FL) continuamente diferenciable dada por

$$V(x, y) = \frac{2-\alpha}{3-\alpha} |\bar{s}(x, y)|^{\frac{3-\alpha}{2-\alpha}} + ay\bar{s}(x, y) + \frac{b}{3-\alpha} |y|^{3-\alpha}, \quad (3)$$

donde a y b son constantes reales tales que $b > 1 > a > 0$. En (Bhat and Bernstein, 1998) también se propone el siguiente controlador saturado²

$$\psi(x, y) = -\text{sat}_\delta\{[\bar{s}(x, y)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\} - \text{sat}_\delta\{[y]^\alpha\}. \quad (4)$$

En este caso, la prueba de estabilidad global en TF se lleva a cabo verificando que las trayectorias del sistema controlado entran en una vecindad del origen en la cual el controlador se puede considerar no saturado y entonces se usa la FL (3) para probar estabilidad en TF del origen.

La principal desventaja de los controladores (2) y (4) es que suelen ser inapropiados para muchas aplicaciones de control en las que se requieren parámetros de ajuste en la ley de control.

Los objetivos primordiales de este trabajo son:

O1 Generalizar (2) y (4) como sigue: para el caso no saturado,

$$\psi(x, y) = -k_1 [s(x, y)]^{\frac{m_c}{r_1}} - k_2 [y]^{\frac{m_c}{r_2}}, \quad (5)$$

donde $s(x, y) \triangleq \bar{k}_2^{\frac{r_1}{r_2}} [y]^{\frac{r_1}{r_2}} + x$; para el caso saturado,

² Para $x \in \mathbb{R}$, $p, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, la función saturación se define como $x \mapsto \text{sat}_\delta([x]^p)$, donde

$$\text{sat}_\delta([x]^p) := \begin{cases} [x]^p, & |x| < \delta, \\ \delta^p \text{sign}(x), & |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Note que esta función es impar y creciente.

$\psi(x, y) = -k_1 \text{sat}_{\delta_1}(\lceil s(x, y) \rceil^{\frac{m_c}{r_1}}) - k_2 \text{sat}_{\delta_2}(\lceil y \rceil^{\frac{m_c}{r_2}})$, (6)
donde las constantes k_1, k_2, \bar{k}_2 son las ganancias de control. En (5) y (6), m_c, r_1 y r_2 deben satisfacer que

$$m_c \triangleq 2r_2 - r_1, \quad 2r_2 > r_1 > r_2 > 0. \quad (7)$$

Esto garantiza que los exponentes en (5) y (6) pertenecen al intervalo³ $(0, 1)$. Note que, los términos en (6) pueden ser saturados en diferentes niveles $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, esto representa una ventaja en la flexibilidad del controlador y puede ser útil en cuestiones de desempeño. En el caso $k_2 = 0$, (5) se reduce a (Bhat and Bernstein, 1997)

$$\psi(x, y) = -k_1 \lceil x \rceil^{\frac{m_c}{r_1}} - k_2 \lceil y \rceil^{\frac{m_c}{r_2}}. \quad (8)$$

Este controlador ha sido estudiado o usado en diversos trabajos (Bhat and Bernstein, 1997; Orlov, 2008; Bernuau et al., 2015; Polyakov et al., 2015). La versión saturada de (8) está dada por

$$\psi(x, y) = -k_1 \text{sat}_{\delta_1}(\lceil x \rceil^{\frac{m_c}{r_1}}) - k_2 \text{sat}_{\delta_2}(\lceil y \rceil^{\frac{m_c}{r_2}}). \quad (9)$$

Cabe notar que para el lazo cerrado (1), (8), se han diseñado FL estrictas y no estrictas, vea por ejemplo (Bhat and Bernstein, 1997; Orlov, 2008), y (Polyakov et al., 2015), respectivamente.

O2 Construir FL para probar estabilidad asintótica del origen de (1) en lazo cerrado con los controladores propuestos. Una vez verificada la estabilidad asintótica, la estabilidad en TF puede ser concluida por medio de las propiedades de los sistemas homogéneos.

Organización del contenido: En la Sección 2 se presentan algunos conceptos y resultados preliminares. En la Sección 3 se enuncian los resultados principales de este artículo. En la Sección 4 se extienden los resultados principales al caso multivariable para aplicarlos al control de robots manipuladores. En la Sección 5 se desarrolla un ejemplo académico para mostrar el desempeño de los controladores propuestos. Las conclusiones finales se enuncian en la Sección 6.

Notación: \mathbb{R} denota al conjunto de números reales; $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\bar{n} := \{1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$; $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota a la matriz identidad de tamaño $n \times n$; para $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ denota el valor absoluto; para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ y $m \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}\|$ denota a la norma Euclídeana; para $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ se denota $B_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ y $S_\delta^{m-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| = \delta\}$; una función $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}^m$ es de clase \mathcal{C}^k , con $k \in \mathbb{N}$, si sus derivadas $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$ existen y son continuas; dada una función diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se denota $\nabla V(\mathbf{x}) \triangleq [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$ donde $\partial_{x_i} V(\mathbf{x}) \triangleq \partial V(\mathbf{x}) / \partial x_i$.

2. PRELIMINARES

2.1 Propiedades de las funciones potencia signadas

Para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda $p \in \mathbb{R}_{>0}$, la función $x \mapsto \lceil x \rceil^p := |x|^p \text{sign}(x)$ es estrictamente creciente, impar, continua y posee las siguientes propiedades.

P1 Para cada $p \in [0, 1)$, $\lceil x \rceil^p$ es diferenciable para toda $x \neq 0$, $\lceil x \rceil^p \in \mathcal{C}^1$ si $p \in [1, 2]$ y $\lceil x \rceil^p \in \mathcal{C}^2$ si $p \in (2, \infty)$. \triangleleft

³ En el caso límite $r_1 = r_2$, el controlador (5) es lineal. Para recuperar los exponentes de (2), basta fijar $r_2 = 1$ y $r_1 = 2 - \alpha$.

P2 $\partial_x \lceil x \rceil^p = p|x|^{p-1}$ y $\partial_x |x|^p = p\lceil x \rceil^{p-1}$, $\forall x \neq 0$; $\int_0^x |z|^p dz = \frac{1}{p+1} \lceil x \rceil^{p+1}$ y $\int_0^x \lceil z \rceil^p dz = \frac{1}{p+1} |x|^{p+1}$. \triangleleft

La función saturación satisface las siguientes propiedades.

P3 Para toda $x \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $k, p, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $[\text{sat}_\delta(x)]^p = \text{sat}_\delta(\lceil x \rceil^p)$ y $\int_0^x k \text{sat}_\delta(\lceil z \rceil^p) dz = \sigma(x; p, k, \delta) \in \mathcal{C}^1$, donde

$$\sigma(x; p, k, \delta) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{p+1} k |x|^{p+1}, & |x| < \delta, \\ k(\delta^p |x| - \frac{p}{p+1} \delta^{p+1}), & |x| \geq \delta. \end{cases} \quad (10)$$

Note que si $|x| \geq \delta$, entonces $\delta^p |x| - \frac{p}{p+1} \delta^{p+1} \geq \frac{1}{p+1} \delta^p |x|$. \triangleleft

Cuando las funciones valor absoluto, potencia signada y saturación son de variable vectorial, se consideran como aplicadas a cada elemento del vector, i.e., para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $|\mathbf{x}|^p := [|x_1|^p, \dots, |x_m|^p]^\top$, $\lceil \mathbf{x} \rceil^p := [\lceil x_1 \rceil^p, \dots, \lceil x_m \rceil^p]^\top$ y $\text{sat}_\delta(\lceil \mathbf{x} \rceil^p) := [\text{sat}_{\delta_1}(\lceil x_1 \rceil^p), \dots, \text{sat}_{\delta_m}(\lceil x_m \rceil^p)]^\top$.

Ahora, defina la función $\bar{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}; p, \mathbf{K}, \boldsymbol{\delta}) := \sum_{i=1}^n \sigma(x_i; p, K_i, \delta_i), \quad (11)$$

donde $\delta_i > 0$, $p \in (0, 1]$, $K_i > 0$, $\mathbf{K} := \text{diag}\{K_i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y σ dada por (10). Note que $\bar{\sigma}$ satisface las siguientes propiedades.

P4 $\nabla_{\mathbf{x}} \bar{\sigma}(\mathbf{x}; p, \mathbf{K}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{K} \text{sat}_\delta(\lceil \mathbf{x} \rceil^p)$ y $\dot{\bar{\sigma}}(\mathbf{x}; p, \mathbf{K}, \boldsymbol{\delta}) = \dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{K} \text{sat}_\delta(\lceil \mathbf{x} \rceil^p)$. \triangleleft

P5 $\bar{\sigma}$ es positiva definida, radialmente no acotada con respecto a \mathbf{x} , y tiene un mínimo global en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. \triangleleft

Lema 1. (Mercado-Urbe and Moreno (2017)). Para toda $x, z \in \mathbb{R}$, y cualquiera $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, $\text{sign}(\lceil x+z \rceil^\mu - \lceil x \rceil^\mu) = \text{sign}(z)$. \triangleleft

Lema 2. Considere la función $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(x, z) = \text{sign}(\text{sat}_\delta(\lceil x+z \rceil^\mu) - \text{sat}_\delta(\lceil x \rceil^\mu))$. Para cualesquiera $\mu, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$S(x, z) = \begin{cases} \text{sign}(z), & [x, z]^\top \in \Gamma_\delta(x, z), \\ 0, & [x, z]^\top \in \bar{\Gamma}_\delta(x, z), \end{cases}$$

donde $\bar{\Gamma}_\delta(x, z) = \{[x, z]^\top \in \mathbb{R}^2 : x \leq -\delta, x+z \leq -\delta\} \cup \{[x, z]^\top \in \mathbb{R}^2 : x \geq \delta, x+z \geq \delta\}$, y $\Gamma_\delta(x, z) = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}_\delta(x, z)$. \triangleleft

2.2 Estabilidad en TF y homogeneidad

Para $m \in \mathbb{N}$, considere el sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (12)$$

con el campo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ continuo y el origen un punto de equilibrio, i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definición 1. (Bhat and Bernstein, 2000, 2005). El origen de (12) es estable en TF si es estable en el sentido de Lyapunov y existe una función $T : B_\delta \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ (llamada función de asentamiento) localmente acotada y tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in B_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$, toda solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ de (12) está definida para todo $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$ y $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq T(\mathbf{x}_0)$. Si $B_\delta = \mathbb{R}^m$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es globalmente estable en TF. \diamond

La estabilidad en TF puede verificarse por medio de propiedades locales de homogeneidad. A continuación recordamos la definición de homogeneidad.

Definición 2. (Bacciotti and Rosier, 2005). Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ se define el vector de pesos $\mathbf{r} := [r_1, \dots, r_m]^\top \in \mathbb{R}^m$. Cada $r_i > 0$, $i \in \bar{m}$, se llama peso del elemento x_i . Se define $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}}$ como el operador de dilatación tal que $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x} := [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_m} x_m]^\top$. Una función $V : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ (un campo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$) es \mathbf{r} -homogénea de grado $l \in \mathbb{R}$, o (\mathbf{r}, l) -homogénea, si para toda $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ se satisface que $V(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l V(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$). El sistema (12) se dice (\mathbf{r}, l) -homogéneo si \mathbf{f} es (\mathbf{r}, l) -homogéneo. \diamond

Aunque no todos los sistemas no lineales son homogéneos, estos pueden serlo localmente. De esta manera, las aproximaciones homogéneas se utilizan para estudiar las propiedades locales (Orlov, 2009; Bacciotti and Rosier, 2005; Andrieu et al., 2008; Zavala-Rio and Fantoni, 2014).

Lema 3. (Vea, e.g.(Bacciotti and Rosier, 2005)). Considere (12) con $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_H(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$. Suponga que $\mathbf{f}_H(\mathbf{x})$ es (\mathbf{r}, l) -homogéneo y tal que $\mathbf{f}_H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable (AE) de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$. Asuma que $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x})$ es continuo y tal que $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y además se satisface que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-(l+r_i)} \mathbf{f}_{NH_i}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = 0$ uniformemente con respecto a $\mathbf{x} \in S_\delta^{m-1}$ para $\delta > 0$ y todo $i \in \bar{m}$. Entonces, el origen de (12) es localmente AS.

El campo vectorial $\mathbf{f}_H(\mathbf{x})$ se conoce como la aproximación homogénea de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Análogamente, una función \mathbf{r} -homogénea $V_H : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ es una aproximación homogénea de $V : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ si existe $V_{NH} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ tal que $V = V_H + V_{NH}$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-l} V_{NH}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = 0$ uniformemente con respecto a $\mathbf{x} \in S_\delta^{m-1}$, para $\delta > 0$ (Andrieu et al., 2008; Sepulchre and Aeyels, 1996).

El siguiente lema es un resultado directo del Lema 3, vea (Hong et al., 2002; Zavala-Rio and Fantoni, 2014; Orlov, 2009) para otras versiones equivalentes.

Lema 4. Suponga que (12) es globalmente AE (GAE) y $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$ es una aproximación homogénea de (12), donde \mathbf{f}_H es (\mathbf{r}, l) -homogéneo y su origen es AE. Entonces el origen de (12) es: localmente exponencialmente estable si $l = 0$ y cada $r_i = 1$; globalmente estable en TF si $l < 0$. \diamond

3. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección se enuncian las propiedades principales de (1) en lazo cerrado con los controladores propuestos.

Considerando que $\mathbf{x} = [x, y]^\top \in \mathbb{R}^2$, la dinámica de (1) en retroalimentación con (5) está descrita por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1 [s(\mathbf{x})]^{m_c/r_1} - k_2 [y]^{m_c/r_2}. \quad (13)$$

La condición (7) garantiza que (13) es (\mathbf{r}, l) -homogéneo con pesos $\mathbf{r} \triangleq [r_1, r_2]^\top$ y grado $l \triangleq r_2 - r_1 < 0$. Observe que, m_c y l se relacionan por medio de la ecuación $m_c = r_2 + l$.

Considere la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |y|^2 + \frac{r_1}{2r_2} k_1 |x|^{2r_2/r_1}. \quad (14)$$

Los resultados dados en (Bhat and Bernstein, 1997) y (Cruz-Zavala et al., 2018) se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 1. Si (7) se satisface, entonces para toda $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ (resp. para toda $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$): a) el

origen de (13) (resp. el origen del lazo cerrado (1), (8)) es globalmente estable en TF; b) la función (14) es una FL no estricta para (13) (resp. para el lazo cerrado (1), (8)).

Ahora, considere (1) en retroalimentación con (6), i.e.,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1 \text{sat}_{\delta_1}([s(\mathbf{x})]^{m_c/r_1}) - k_2 \text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2}), \quad (15)$$

y la función $V_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |y|^2 + \sigma(x; m_c/r_1, k_1, \delta_1), \quad (16)$$

con σ dada por (10).

Proposición 2. Si (7) se satisface, entonces para toda $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ (resp. para toda $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$): a) el origen de (15) (resp. el origen del lazo cerrado (1), (9)) es globalmente estable en TF; b) la función (16) es una FL no estricta para (15) (resp. para el lazo cerrado (1), (9)).

Demostración. La derivada de V_s a lo largo de (15) satisface (usando el Lema 2 con $z = \bar{k}_2^{r_1/r_2} [y]^{r_1/r_2}$) que

$$\dot{V}_s = \begin{cases} -[k_2 |\text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2})| + k_1 |\chi(\mathbf{x})|] |y|, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\delta_1}, \\ -k_2 |y| |\text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2})|, & \mathbf{x} \in \bar{\Gamma}_{\delta_1}, \end{cases} \quad (17)$$

donde (vea **P3**) $\chi(\mathbf{x}) = \text{sat}_{\delta_1}([s(\mathbf{x})]^{m_c/r_1}) - \text{sat}_{\delta_1}([x]^{m_c/r_1}) = [\text{sat}_{\delta_1}(s(\mathbf{x}))]^{m_c/r_1} - [\text{sat}_{\delta_1}(x)]^{m_c/r_1}$. De aquí que, $\dot{V}_s \leq 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Note que (17) sólo se hace cero para $y = 0$, si k_2 no es cero. Ahora, (15) es un sistema invariante en el tiempo y (16) es una FL. Así que con (17) y el principio de invarianza Krasovskii-LaSalle se puede concluir la estabilidad asintótica de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vea, e.g. Teorema 7.2.1 en (Michel et al., 2008). Aunque (13) no es homogéneo, éste admite una aproximación homogénea de grado negativo si (7) se cumple. De hecho, (15) puede ser reescrito como en el Lema 3 con $\mathbf{f}_H(\mathbf{x}) := [y, -k_1 [s(\mathbf{x})]^{m_c/r_1} - k_2 [y]^{m_c/r_2}]^\top$ y $\mathbf{f}_{NH}(\mathbf{x}) := [0, k_1 ([s]^{m_c/r_1} - \text{sat}_{\delta_1}([s]^{m_c/r_1})) + k_2 ([y]^{m_c/r_2} - \text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2}))]^\top$. Así, la Proposición 1 garantiza que el origen de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_H(\mathbf{x})$, es GAE. También, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-(l+r_i)} \mathbf{f}_{NH_i}(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2$, se satisface para toda $\mathbf{x} \in S_\delta$, $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Además, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en (15) es GAE. Por lo tanto, la estabilidad global en TF se sigue del Lema 4. \square

Ahora considere la modificación de (6) dada por

$$\psi(\mathbf{x}) = -k_1 [\tilde{s}(\mathbf{x})]^{m_c/r_1} - k_2 \text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2}). \quad (18)$$

donde $\tilde{s}(\mathbf{x}) \triangleq \bar{k}_2^{r_1/r_2} [\text{sat}_{\delta_3}(y)]^{r_1/r_2} + \text{sat}_{\delta_1}(x)$. Note que el controlador (6) satisface $|\psi| \leq k_1 \delta_1^{m_c/r_1} + k_2 \delta_2^{m_c/r_2}$, mientras que (18) satisface $|\psi| \leq k_1 [(k_2 \delta_3)^{r_1/r_2} + \delta_1]^{m_c/r_1} + k_2 \delta_2^{m_c/r_2}$.

Corolario 1. Si (7) se satisface, entonces para toda $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$: a) el origen de (1) en lazo cerrado con (18) es globalmente estable en TF; b) la función (16) es una FL no estricta para el lazo cerrado (1), (18).

Demostración. Considere a (16) como candidata a FL para el lazo cerrado (1), (18). Para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\dot{V}_s(\mathbf{x}) = -k_2 |y| |\text{sat}_{\delta_2}([y]^{m_c/r_2})| - k_1 |y| |\chi(\mathbf{x})| \leq 0, \quad (19)$$

donde $\chi(\mathbf{x}) = [\bar{k}_2^{r_1/r_2} [\text{sat}_{\delta_3}(y)]^{r_1/r_2} + \text{sat}_{\delta_1}(x)]^{m_c/r_1} - [\text{sat}_{\delta_1}(x)]^{m_c/r_1}$. Note que (19) sólo se hace cero para $y = 0$, independientemente de si k_2 es cero o no. Así, (19) y el principio de invarianza Krasovskii-Lalle garantizan

estabilidad asintótica de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, (Michel et al., 2008). Siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 2 se obtiene que bajo la condición (7), $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es globalmente estable en TF. \square

Observe que con los mismos argumentos dados en (Bhat and Bernstein, 1998), se puede asegurar que el conjunto $\mathcal{S} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : s(\mathbf{x}) = 0\}$ es invariante positivo de (13) si $\bar{k}_2 = [(r_2/(r_1 k_2))^{r_2/r_1}]$. Así, cada solución $\mathbf{x}(t)$ de (13) satisface que $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$ para toda $t \geq t_1$ si para algún t_1 , $\mathbf{x}(t_1) \in \mathcal{S}$. Esto se verifica con el hecho de que a lo largo de las soluciones de (13),

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{r_1}{r_2} \bar{k}_2^{\frac{r_1}{r_2}} |y|^{\frac{r_1-r_2}{r_2}} \dot{y} + y = -\frac{r_1}{r_2} \bar{k}_2^{\frac{r_2}{r_1}} k_1 |y|^{\frac{r_1-r_2}{r_2}} [s(\mathbf{x})]^{\frac{m_c}{r_1}},$$

por lo tanto, $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq 0$, para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. En \mathcal{S} , la dinámica de (13) queda descrita por

$$\dot{x} = -(1/\bar{k}_2)[x]^{\frac{m_c}{r_1}}, \quad \dot{y} = -k_2[y]^{\frac{m_c}{r_2}}.$$

Como todas las trayectorias de (13) convergen a \mathcal{S} en TF, \mathcal{S} puede ser interpretado como un modo deslizante terminal (Venkataraman and Gulati, 1993) sin el uso de control discontinuo.

Ahora, con las mismas condiciones de ganancia $\bar{k}_2 = [(r_2/(r_1 k_2))^{r_2/r_1}]$ para el caso saturado (6), la condición $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq 0$ sólo se satisface para $|y| < \delta_2$. Además, en el caso de (18), la condición $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq 0$ sólo se satisface si para $|y| < \delta_3$, las restricciones $|y| < \delta_2$ y $|x| < \delta_1$ se satisfacen. Note que se puede escoger $\delta_1 = \delta_2$.

Esta característica de modo deslizante terminal, impuesta por los controladores, permite la convergencia al origen sin oscilaciones en la respuesta transitoria, vea (a) y (b) en la Fig. 1.

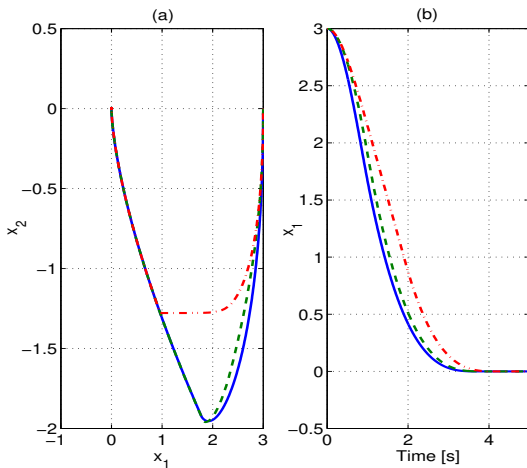


Fig. 1. Retrato fase (columna izquierda) y estado $x_1(t)$ (columna derecha) del lazo cerrado con los controladores: (5) en línea sólida; (6) en línea segmentada; (18) en línea punteada. Se observa el modo deslizante terminal.

4. CASO MULTIVARIABLE CON APLICACIÓN A ROBOTS MANIPULADORES

En esta sección se extienden los resultados previos al caso multivariable con el fin de resolver el problema de

regulación global para robots manipuladores con articulaciones cilíndricas y completamente actuados. Así, considere el modelo

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (20)$$

y defina la posición deseada \mathbf{q}_d . Los vectores de error de posición y error de velocidad se definen como $\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, respectivamente. De modo que el objetivo es lograr que $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ se hagan cero en TF.

Recuerde que $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia y $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está determinada (univocamente por $\mathbf{M}(\mathbf{q})$) por medio de los símbolos de Christoffel del primer tipo, y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de gravedad. Algunas de las propiedades estándar de (20) son (Kelly et al., 2005):

F1. Existen constantes $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que $m_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq m_2 \mathbf{I}$. Consecuentemente, $m_2^{-1} \mathbf{I} \leq \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \leq m_1^{-1} \mathbf{I}$. \triangleleft

F2. La matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica. \triangleleft

Cuando se toma en cuenta el fenómeno de saturación en los actuadores, se asume que el actuador de cada articulación es capaz de suministrar un par máximo (conocido) $\bar{\tau}_i > k_{gi}$ (para algún $k_{gi} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i \in \bar{n}$) tal que $|\tau_i| \leq \bar{\tau}_i$, donde los τ_i denotan los elementos del vector $\boldsymbol{\tau}$ y las k_{gi} son las cotas superiores de cada elemento $g_i(\mathbf{q})$ del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tales que $\sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \{|g_i(\mathbf{q})|\} \leq k_{gi}$.

A continuación mostraremos que el origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d)], \end{aligned} \quad (21)$$

es globalmente estable en TF con una ley de control $\boldsymbol{\tau}$ que cancela los efectos gravitacionales en (20). Para este fin defina las $n \times n$ -matrices diagonales $\mathbf{K}_p \triangleq \text{diag}(K_{pi})$, $\mathbf{K}_d \triangleq \text{diag}(K_{di})$, $\bar{\mathbf{K}}_d \triangleq \text{diag}(\bar{K}_{di})$, with $K_{pi}, K_{di}, \bar{K}_{di} \in \mathbb{R}_{>0}$, para toda $i \in \bar{n}$.

Proposición 3. Considere el sistema (21) en retroalimentación con alguno de los siguientes controladores

$$\begin{aligned} \text{C1: } \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p [s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} - \mathbf{K}_d [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}, \\ \text{C2: } \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \text{sat}_{\delta_1}([s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}}) - \mathbf{K}_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}), \\ \text{C3: } \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p [\bar{\mathbf{K}}_d^{\frac{r_1}{r_2}} \text{sat}_{\delta_3}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{r_1}{r_2}}) + \text{sat}_{\delta_1}(\tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} - \\ &\quad \mathbf{K}_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}), \end{aligned}$$

donde $s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) \triangleq \bar{\mathbf{K}}_d^{\frac{r_1}{r_2}} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{r_1}{r_2}} + \tilde{\mathbf{q}}$, y la condición (7) se satisface. Entonces, $(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es globalmente estable en TF. \triangleleft

Demostración. Considere la función

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{r_1}{2r_2} \tilde{\mathbf{q}}^\top \mathbf{K}_p [\tilde{\mathbf{q}}]^{\frac{m_c}{r_1}},$$

que es diferenciable, positiva definida y radialmente no acotada. Usando **F2**, la derivada de \mathcal{H} a lo largo de (21) con C1 es $\dot{\mathcal{H}} = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{K}_d [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}} - |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}|^\top \mathbf{K}_p |\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})| \leq 0$, donde $\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) \triangleq [s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} - [\tilde{\mathbf{q}}]^{\frac{m_c}{r_1}}$. Note que $\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) \triangleq [s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} - [\tilde{\mathbf{q}}]^{\frac{m_c}{r_1}} = \mathbf{0}$ sólo si $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, y de acuerdo al Lema 1, $\text{sign}(\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})) = \text{sign}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ (por elementos). Así, $\dot{\mathcal{H}}$ sólo se anula en $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, el principio de invarianza de Krasovskii-LaSalle asegura que $(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) =$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es GAE (Michel et al., 2008). Observe que la dinámica del lazo cerrado se puede reescribir como

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}; \quad \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}_H(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{f}_{NH}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}), \quad (22)$$

$$\mathbf{f}_H(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \triangleq -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_d)(\mathbf{K}_p[s(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} + \mathbf{K}_d[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}),$$

$$\mathbf{f}_{NH}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \triangleq -\mathbf{M}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d)\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d)\mathbf{f}_H(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}),$$

donde $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d) = \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d)\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{I}$. Siguiendo el procedimiento propuesto en (Cruz-Zavala et al., 2018) se puede concluir que el sistema $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}_H(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es una aproximación homogénea de grado $r_2 - r_1$ para (22). Además, el origen de esta aproximación homogénea es AE. Finalmente, usando el Lema 3 se concluye la estabilidad global en TF del origen siempre que $r_1 > r_2$.

Ahora, considere la función

$$\mathcal{H}_s(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_d)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \bar{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}}; m_c/r_1, \mathbf{K}_p, \delta_1)$$

donde $\bar{\sigma}$ está dada por (11). Note que \mathcal{H}_s es diferenciable, positiva definida y radialmente no acotada. Defina $\mathbf{x}^\top \triangleq [\tilde{\mathbf{q}}^\top, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top]$. Así, la derivada de \mathcal{H}_s a lo largo de (21) con el controlador C2 está dada por

$$\dot{\mathcal{H}}_s = \begin{cases} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{K}_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}) - |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}|^\top \mathbf{K}_p |\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})|, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\delta_1}, \\ -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{K}_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}), & \mathbf{x} \in \bar{\Gamma}_{\delta_1}, \end{cases}$$

donde $\bar{\Gamma}_{\delta_1} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Gamma}_{\delta_1}(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i)$, $\Gamma_{\delta_1} = \mathbb{R}^{2n} \setminus \bar{\Gamma}_{\delta_1}$, y (usando las propiedades de la función saturación) $\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \text{sat}_{\delta_1}([s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}}) - \text{sat}_{\delta_1}([\tilde{\mathbf{q}}]^{\frac{m_c}{r_1}}) = [\text{sat}_{\delta_1}(s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}))]^{\frac{m_c}{r_1}} - [\text{sat}_{\delta_1}(\tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}}$. Así, $\dot{\mathcal{H}}_s \leq 0$ para toda $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$. Note que, para toda $K_{di} \neq 0$, \mathcal{H}_s se anula sólo si $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$.

Para el caso del controlador C3, la derivada de \mathcal{H}_s a lo largo de (21) es

$$\dot{\mathcal{H}}_s = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{K}_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}) - |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}|^\top \mathbf{K}_p |\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})| \leq 0,$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $\chi(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = [\bar{\mathbf{K}}_d^{\frac{r_1}{r_2}} [\text{sat}_{\delta_3}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})]^{\frac{r_1}{r_2}} + \text{sat}_{\delta_1}(\tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}} - [\text{sat}_{\delta_1}(\tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}}$ y $\dot{\mathcal{H}}_s$ sólo se anula si $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, independientemente de si \mathbf{K}_d es cero o no.

En ambos casos el principio de invarianza de Krasovskii-LaSalle asegura que $(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es GAE (Michel et al., 2008). La estabilidad en TF se deduce nuevamente con argumentos locales de homogeneidad. \square

De la Proposición 3, se recobran los controladores propuestos en (Hong et al., 2002) y un caso particular de (Zavala-Río and Fantoni, 2014) como casos particulares cuando $\bar{\mathbf{K}}_d = \mathbf{0}$. Sin embargo, los esquemas con $\bar{\mathbf{K}}_d \neq \mathbf{0}$ son una propuesta completamente nueva y no reportada anteriormente. Cuando el efecto de saturación de los actuadores es tomado en cuenta, los pares generados por los controladores C2 y C3 en cada articulación del robot manipulador deben diseñarse para satisfacer las restricciones $k_{gi} + K_{pi}\delta_1^{\frac{m_c}{r_1}} + K_{di}\delta_2^{\frac{m_c}{r_2}} \leq \bar{\tau}_i$ y $k_{gi} + K_{pi}((\bar{K}_{di}\delta_3)^{\frac{r_1}{r_2}} + \delta_1)^{\frac{m_c}{r_1}} + K_{di}\delta_2^{\frac{m_c}{r_2}} \leq \bar{\tau}_i$, respectivamente.

5. EJEMPLO ACADÉMICO

En esta sección se ejemplifican los resultados con el modelo de un robot manipulador de dos grados de libertad

con articulaciones cilíndricas. El modelo está descrito por (20) con la matriz de inercia, la matriz de Coriolis y el vector de gravedad dados por

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 c_2 & * \\ \beta_3 + \beta_2 c_2 & \beta_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\beta_2 s_2 \dot{q}_2 & -\beta_2 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \beta_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_2} g \beta_3 c_{12} + \frac{g}{l_1} (\beta_1 - \beta_3) c_1 \\ \frac{1}{l_2} g \beta_3 c_{12} \end{bmatrix},$$

respectivamente, donde $\beta_1 := l_2^2 m_2 + l_1^2 (m_1 + m_2)$, $\beta_2 := l_1 l_2 m_2$ y $\beta_3 := l_2^2 m_2$. Note que se ha usado la notación c_2, s_2 y c_{12} para $\cos(q_2)$, $\sin(q_2)$ y $\cos(q_1 + q_2)$, respectivamente. q_1 y \dot{q}_2 son la posición y la velocidad del manipulador. l_i y m_i son las respectivas longitudes y masas de cada eslabón $i \in [1, 2]$. Los valores de dichos parámetros son: $m_1 = 4\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $l_1 = 0.4\text{m}$ y $l_2 = 0.2\text{m}$. La posición deseada y las condiciones iniciales están dadas por $\mathbf{q}_d = [-2, 3]^\top$ y $\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = [0, 0]^\top$.

Para la simulación se consideran las dos siguientes versiones del control saturado:

$$\mathbf{sc1} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) - K_p \text{sat}_{\delta_1}([\tilde{\mathbf{q}}]^{\frac{m_c}{r_1}}) - K_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}});$$

$$\mathbf{sc2} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) - K_p \text{sat}_{\delta_1}([s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{m_c}{r_1}}) - K_d \text{sat}_{\delta_2}([\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{m_c}{r_2}}),$$

donde $s(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) \triangleq \bar{K}_d^{\frac{r_1}{r_2}} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^{\frac{r_1}{r_2}} + \tilde{\mathbf{q}}$, y los parámetros $r_2 = 1$, $r_1 = 1.5$. La intención de la simulación es mostrar que en ciertos casos hay una mejora en el desempeño del transitorio con el controlador **sc2** comparado con el controlador **sc1** cuando $\bar{K}_d = (r_2/(r_1 K_d))^{r_2/r_1}$. Con este fin, se han empleado las siguientes sintonizaciones:

$$\mathbf{T1}: K_p = K_d = 3, \delta_1 = 0.4 \text{ y } \delta_2 = 1.2,$$

$$\mathbf{T2}: K_p = K_d = 3, \delta_1 = 1.2 \text{ y } \delta_2 = 0.4,$$

$$\mathbf{T3}: K_p = 4, K_d = 3, \delta_1 = 1.2 \text{ y } \delta_2 = 0.4,$$

$$\mathbf{T4}: K_p = 4, K_d = 3, \delta_1 = 0.4 \text{ y } \delta_2 = 1.2.$$

Las simulaciones se realizan con el método explícito de Euler y un paso de integración de $t_s = 0.005$ [s]. La Fig. 2 muestra las señales de posición y de error con ambos controladores y las diferentes sintonizaciones. Se puede apreciar que el transitorio con el esquema **sc2** mejora respecto al esquema **sc1** para los casos **T2** y **T3**, vea la Fig. b.1-c.3. En tales casos se alcanza un rápido asentamiento. En los casos **T1** y **T4** ambos controladores tienen un desempeño similar. Sin embargo, cuando la ganancia K_p es reemplazada por $K_p = 6$ en el caso **T4**, el transitorio presenta más oscilaciones (esta simulación no se muestra por falta de espacio). Lo anterior muestra que el controlador **sc2** puede mejorar el transitorio en el sentido de que no presenta oscilaciones cuando la ganancia $\bar{K}_d = (r_2/(r_1 K_d))^{r_2/r_1}$ cuando se eligen constantes arbitrarias K_p, K_d, δ_1 y δ_2 .

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha introducido una clase general de controladores saturados y no saturados para sistemas SISO y MIMO. Estos controladores generalizan los propuestos en (Bhat and Bernstein, 1998) y son más apropiados para control. Hace falta hacer un estudio detallado sobre la robustez, sin embargo, la propiedad local de homogeneidad garantiza cierto grado intrínseco de robustez.

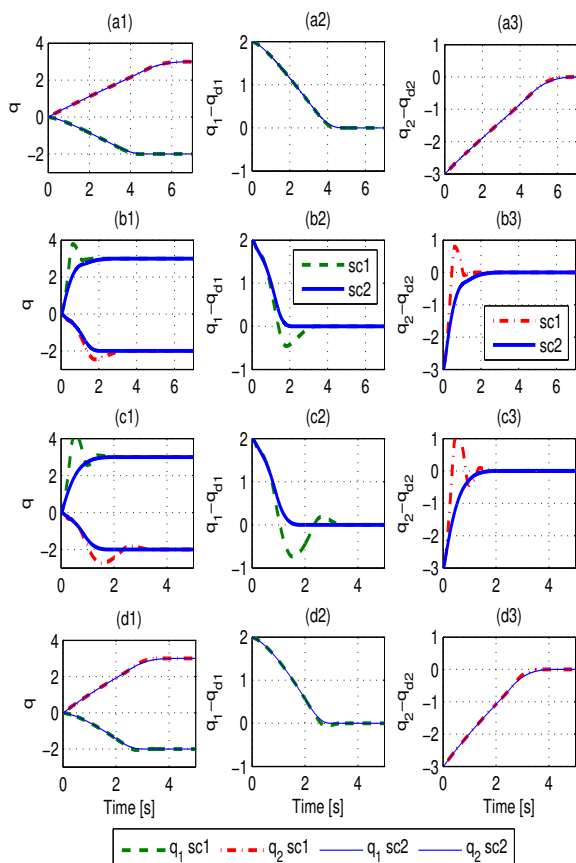


Fig. 2. Posición (primera columna), \dot{q}_1 (segunda columna), \dot{q}_2 (tercera columna). El primer renglón es el resultado con **T1**, el segundo con **T2**, el tercero con **T3** y el cuarto con **T4**.

BIBLIOGRAFÍA

- Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4), 1814–1850.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Bernuau, E., Perruquetti, W., Efimov, D., and Moulay, E. (2012). Finite-time output stabilization of the double integrator. In *Proceedings of the IEEE Conf. Decision and Control*, 5906–5911.
- Bernuau, E., Perruquetti, W., Efimov, D., and Moulay, E. (2015). Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *Int. J. Control*, 88, 451–460.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2513–2514. Albuquerque, NM.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (1998). Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43, 678–682.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM J. Control Optim.*, 38, 751–766.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17(2), 101–127.
- Cruz-Zavala, E., Sanchez, T., Moreno, J.A., and Nuño, E. (2018). Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 56th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 1530–1535. doi: 10.1109/CDC.2018.8619664.
- Haimo, V.T. (1986). Finite time controllers. *SIAM J. Contr. Optim.*, 24, 760–77.
- Hong, Y., Jiang, Z.P., and Feng, G. (2010). Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design. *SIAM J. Control Optim.*, 48(7), 4395–4418. doi:10.1137/070712043.
- Hong, Y., Xu, Y., and Huang, J. (2002). Finite-time control for robot manipulators. *Syst. Control Lett.*, 46, 243–253.
- Kelly, R., Santibanez, V., and Loria, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, London, U.K.
- Lopez-Ramirez, F., Polyakov, A., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2018). Finite-time and fixed-time observer design: Implicit Lyapunov function approach. *Automatica*, 87, 52 – 60. doi: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.007.
- Menard, T., Moulay, E., and Perruquetti, W. (2010). A Global High-Gain Finite-Time Observer. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(6), 1500–1506. doi: 10.1109/TAC.2010.2045698.
- Mercado-Uribe, A. and Moreno, J.A. (2017). Discontinuous integral control for systems in controller form. In *Congreso Nacional de Control Automático 2017*, 630–635.
- Michel, A., Hou, L., and Liu, D. (2008). *Stability of Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser, Boston.
- Moulay, E. and Perruquetti, W. (2006). *Finite-Time Stability and Stabilization: State of the Art*, 23–41. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Orlov, Y. (2008). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 43(4), 1253–1271.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer.
- Polyakov, A., Orlov, Y., Oza, H., and Spurgeon, S. (2015). Robust finite-time stabilization and observation of a planar system revisited. In *2015 54th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 5689–5694. doi: 10.1109/CDC.2015.7403112.
- Sepulchre, R. and Aeyels, D. (1996). Homogeneous Lyapunov functions and necessary conditions for stabilization. *Math. Control. Signals Syst.*, 9, 34–58.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr., J.M.G., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer-Verlag, London. doi:10.1007/978-0-85729-941-3.
- Venkataraman, S. and Gulati, S. (1993). Terminal slider control of robot systems. *J. of Intelligent and Robotic Systems*, 5, 31–55.
- Zavala-Rio, A. and Fantoni, I. (2014). Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(2), 471–477.