

# Diseño de un Oscilador via Doble Inferencia Difusa: Un Enfoque Basado en Poincaré-Bendixson \*

Lisdan Herrera-García \* J. A. Lopez-Rentería \*\*,\*\*\*  
Selene L. Cardenas-Maciel \* Luis T. Aguilar \*\*\*  
Nohe R. Cazarez-Castro \*

\* *Tecnológico Nacional de México—Instituto Tecnológico de Tijuana,  
Av. ITR Tijuana y Blvd. Alberto Limón Padilla, S/N, 22510, Tijuana,  
Baja California, México. (e-mail: lisdan.herrera17@tectijuana.edu.mx,  
{lilettecardenas,nohe}@ieee.org).*

\*\* *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. (e-mail:  
jorge.lopez@tectijuana.edu.mx).*

\*\*\* *Instituto Politécnico Nacional, Ave. Instituto Politécnico Nacional  
No. 1310 Colonia Nueva Tijuana, Tijuana 22435 México (e-mail:  
laquilarb@ipn.mx)*

---

**Resumen:** El presente trabajo examina el problema del movimiento periódico auto excitado (ciclo límite estable) en sistemas dinámicos. El problema es relevante para una clase de sistemas mecánicos destinados a operar bajo movimiento periódico (órbitas). Con este fin, se propone el diseño de un doble sistema de inferencia difusa (2-FIS) tipo Mamdani, el cual se comporta como un elemento interno del oscilador. Con el objetivo de garantizar la existencia de una órbita periódica atractora sin necesidad de una señal de referencia externa, se establecen las condiciones suficientes para la estabilidad orbital a través del teorema Poincaré-Bendixson (P-B). El enfoque propuesto es validado vía simulaciones numéricas en un sistema pendular simple.

Palabras clave: Sistema de inferencia difuso, teorema de Poincaré-Bendixson, ciclo límite, auto-oscilaciones.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Las oscilaciones periódicas pueden surgir como consecuencia de la excitación periódica de la entrada (oscilaciones forzadas) o cuando se establecen oscilaciones sin excitación externa (auto oscilaciones). Estos tópicos de investigación han ganado relevancia en la comunidad científica debido a que es un comportamiento deseado en diversas aplicaciones de la ingeniería tales como guía de objetos en movimiento como aviones, cohetes, barcos y otras aplicaciones en robots bípedos [Solomon et al., 2010], [Dai y Tedrake, 2012], sistemas pendulares [Hakimi y Binazadeh, 2012], sistemas mecánicos [Shiriaev et al., 2005], entre otros. Se han presentado algunos trabajos relacionados con oscilaciones auto excitadas en sistemas mecánicos sub-actuados. Por ejemplo, en Aguilar

et al. (2015) se generan auto oscilaciones en sistemas mecánicos sub-actuados con doble relevador, donde se determinaron ecuaciones para calcular amplitud y frecuencia. En [Jenkins, 2013, Chatterjee, 2011, Aracil et al., 2002] se abordan sistemas auto excitados que exhiben la propiedad para generar oscilaciones de estado estacionario sin una señal de conducción externa. Además, [Canudas-de-Wit et al., 2002, Shiriaev et al., 2005] presentan una herramienta constructiva para la generación y estabilización orbital de soluciones periódicas para sistemas no lineales sub-actuados mediante el enfoque de restricciones virtuales. En [Castillo et al., 2017] se analiza la aparición o destrucción de un ciclo límite en sistemas lineales discontinuos a través del cambio de segmentos deslizantes que modifica la estabilidad, logrando que el sistema presente una bifurcación. Los autores denominan a esta bifurcación como bifurcación pseudo-Hopf.

En [Kim et al., 2000] se estudia la detección de ciclos límite mediante el diseño de un sistema de control difuso a través de técnicas de control clásicas utilizadas para analizar sistemas no lineales en el dominio de la

---

\* Investigación parcialmente apoyada por CONACYT con los proyectos CONACYT AL-S-32341, 285279 y la beca de doctorado número CONACYT 467505, y por el Tecnológico Nacional de México con los proyectos 6827.18-P, 5564.19-P. López-Rentería es apoyado por CONACYT como profesor catedrático (proyecto No. 366).

frecuencia. Utilizando esta técnica [Prieto et al., 2016, 2017] diseña y ajusta un sistema de control difuso basado en el método de la función descriptiva destinado a evitar el fenómeno *chattering* debido a la existencia de ciclos límite en un sistema mecánico. Se han desarrollado diferentes métodos para la detección o generación de ciclos límite, entre los más conocidos se encuentran el teorema de Bendixson-Dulac (BD) (ausencia) y el teorema de Poincaré-Bendixson (P-B) (existencia), [Perko, 2013, Hirsch et al., 2012]). En Melin (2005) se utiliza la teoría de las distribuciones para extender el teorema de Poincaré-Bendixson y el criterio de Bendixson aplicado a un sistema Lipschitz continuo por partes que posee soluciones únicas y continuas, para probar la existencia de ciclos límite en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que poseen discontinuidades.

En el presente trabajo se diseña un doble sistema de inferencia difusa (2-FIS, por sus siglas en inglés), el cual se comporta como componente interno de un sistema oscilante sin presencia de una señal de referencia externa con el objetivo de producir una órbita periódica estable, siguiendo las condiciones del teorema de P-B.

El resto del artículo está organizado como sigue: La Sección 2 describe el planteamiento del problema y la descripción del sistema. En la Sección 3 se presenta la estructura del componente difuso que se propone para añadir al sistema y su representación como un modelo matemático por piezas. Las bases y condiciones para la existencia de un ciclo límite estable utilizando el teorema Poincaré-Bendixson es presentado en la Sección 4. El oscilador y la verificación teórica son presentados en la Sección 5 mediante resultados numéricos y experimentales. En la Sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese el sistema de control

$$\ddot{\theta} + \phi\dot{\theta} + \gamma\theta = 0, \quad (1)$$

donde  $\phi, \gamma \in \mathbb{R}$  son constantes fijas y  $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  es la variable de salida. Supóngase que el sistema en lazo abierto tiene al origen como punto de equilibrio estable tipo foco, es decir, los parámetros  $\phi$  y  $\gamma$  son positivos (estabilidad Hurwitz) y su discriminante satisface

$$D = \phi^2 - 4\gamma < 0, \quad (2)$$

para garantizar las oscilaciones. Se considera que no se contará con señal de referencia externa y se trabajará con el sistema lineal homogéneo.

El *objetivo* entonces es construir una componente no lineal  $\varepsilon(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}$  que se añadirá internamente al sistema (1) para transformarlo a la forma

$$\ddot{\theta} + \phi\dot{\theta} + \gamma\theta - \varepsilon(\theta, \dot{\theta}) = 0, \quad (3)$$

tal que éste sea capaz de mantener las oscilaciones de forma periódica alrededor del origen. La función  $\varepsilon(\theta, \dot{\theta})$

estará basada en lógica difusa a través de dos sistemas de inferencia difusa que formarán parte de los componentes internos del sistema. La estrategia de diseño consiste en satisfacer el teorema de P-B que garantiza la existencia de ciclos límites. Con este fin, se realiza el cambio de coordenadas  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  para representar el sistema dado en (3) en el modelo en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon(x_1, x_2). \quad (4)$$

En la siguiente sección se describe el proceso para construir la función  $\varepsilon$ .

## 3. DISEÑO DEL DOBLE SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSA (2-FIS)

Los sistemas de inferencia difusa que se construyen, se definen en la función  $\varepsilon$  como

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x_1) + \varepsilon_2(x_2), \quad (5)$$

cada uno de ellos tiene una base de reglas difusas Si - Entonces de la forma:

$$R_i : \text{Si } x_l \text{ es } M_i^l, \text{ Entonces } \varepsilon_s \text{ es } U_i^l,$$

siendo  $R_i$  el identificador de cada regla;  $M_i^l$  es la función de pertenencia correspondiente a la variable difusa de entrada  $x_l$ ; por otra parte, la función de pertenencia asociada a la variable de salida  $\varepsilon_s$  es de tipo singleton, por ello  $U_i^l$  refiere al valor de salida que tendrá la regla; el índice  $l = 1, 2$  diferencia entre elementos de cada FIS, e  $i = -1, 0, 1$ .

El sistema de inferencia propuesto es de tipo Mamdani, utiliza en la etapa de fusificación funciones de pertenencia definidas como:

$$M_0^l(x_l) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi_1^l} x_l + 1 & \text{si } -\Phi_1^l \leq x_l < 0 \\ -\frac{1}{\Phi_1^l} x_l + 1 & \text{si } 0 \leq x_l \leq \Phi_1^l \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (6)$$

$$M_{-1}^l(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_l < -\Phi_1^l \\ -\frac{1}{\Phi_1^l} x_l & \text{si } -\Phi_1^l \leq x_l \leq 0 \\ 0 & \text{si } x_l > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$M_1^l(x_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_l < 0 \\ \frac{1}{\Phi_1^l} x_l & \text{si } 0 \leq x_l \leq \Phi_1^l \\ 1 & \text{si } x_l > \Phi_1^l, \end{cases} \quad (8)$$

siendo éstas distribuidas completa, consistente y simétricamente con respecto al origen como se muestra en la Figura 1(a) [Kim et al., 2000]. Aquí,  $\Phi_1^l$  representa el parámetro de diseño de las funciones de pertenencia relacionado con la variable de entrada. El motor de inferencia difusa es por producto algebraico. La etapa de defusificación utiliza el método promedio de centros, teniendo funciones tipo *singleton* como función de pertenencia a la salida como se muestra en la Figura 1(b).

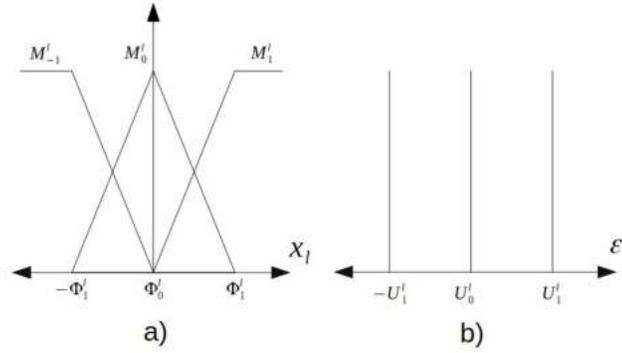


Fig. 1. funciones de pertenencia: (a) para la variable de entrada  $x_l$  y (b) de tipo *singleton* para la variable de salida  $\varepsilon_s$ .

Considerando esta estructura del FIS para  $\varepsilon_1(x_1)$  y  $\varepsilon_2(x_2)$ , que incluye el método de inferencia y defusificación, la expresión analítica del sistema difuso que se obtiene es:

$$\varepsilon_l(x_l) = \sum_{i=-1}^1 \left\{ \frac{M_i^l(x_l)}{\sum_{r=-1}^1 M_r^l(x_l)} \right\} U_i^l = \sum_{i=-1}^1 \Psi_i^l(x_l) U_i^l, \quad (9)$$

donde los valores  $U_{-i}^l = -U_i^l$  refiere al valor real de disparo a la salida relacionada con el estado  $x_1$  y el estado  $x_2$ , respectivamente; donde  $U_0^l = 0$ . Considerando que el objetivo del FIS es obtener a la salida del sistema una señal periódica por ello la función  $\Psi_i^l(x_l)$  debe satisfacer:

- $\Psi_i^l(x_l)$  sea localmente continua Lipschitz y acotada.
- $\Psi_i^l(0) = 0$ .
- Condición de simetría impar  $\Psi_i^l(x_l) = -\Psi_i^l(-x_l)$ .

Entonces, el FIS propuesto, para todo el universo discurso de  $x_l$  de  $[-2\pi, 2\pi]$ , solo son necesarios tres subconjuntos difusos que apuntan a los valores que toma  $\varepsilon(x_1, x_2)$  en correspondencia al estado de entrada. Las reglas relacionan a las variables de entrada  $x_l$  y salida  $\varepsilon_s$  tal que:

$$\begin{aligned} R_{-1} &: \text{Si } x_l \text{ es } M_{-1}^l, \text{ Entonces } \varepsilon_s \text{ es } U_{-1}^l \\ R_0 &: \text{Si } x_l \text{ es } M_0^l, \text{ Entonces } \varepsilon_s \text{ es } U_0^l \\ R_1 &: \text{Si } x_l \text{ es } M_1^l, \text{ Entonces } \varepsilon_s \text{ es } U_1^l. \end{aligned}$$

Nótese que en cada sistema difuso  $\varepsilon_l(x_l)$  definido por (9), se tiene que:

- (1)  $\sum_{r=-1}^1 M_r^l(x_l) = 1$ , para cualquier valor de  $x_l$ .
- (2)  $\varepsilon_l(x_l) = \frac{U_i^l}{\Phi_i^l} x_l$ , para  $\Phi_{i-1}^l \leq x \leq \Phi_{i+1}^l$ .
- (3) Si  $x_l < -\Phi_1^l$  o  $x_l > \Phi_1^l$ ,  $\Psi_i^l(x_l) = 1$ , en consecuencia  $\varepsilon_l(x_l) = U_i^l$ .

Entonces para cada  $l = 1, 2$ , el componente difuso puede ser reescrito como:

$$\varepsilon_l(x_l) = \begin{cases} \frac{U_1^l}{\Phi_1^l} x_l & \text{si } |x_l| \leq \Phi_1^l \\ U_1^l & \text{si } |x_l| > \Phi_1^l \end{cases}. \quad (10)$$

Así, el sistema difuso (5) se puede expresar tal que:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} U_1^1 \text{ si } x_1 > \Phi_1^1 \\ \frac{U_1^1}{\Phi_1^1} x_1 \text{ si } |x_1| \leq \Phi_1^1 \\ -U_1^1 \text{ si } x_1 < -\Phi_1^1 \end{cases} + \begin{cases} U_1^2 \text{ si } x_2 > \Phi_1^2 \\ \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} x_2 \text{ si } |x_2| \leq \Phi_1^2 \\ -U_1^2 \text{ si } x_2 < -\Phi_1^2 \end{cases}, \quad (11)$$

la cual es una función no lineal consistente en la suma de dos saturaciones.

#### 4. EXISTENCIA DE UN CICLO LÍMITE ESTABLE

En esta sección se realiza un análisis de la ecuación dinámica (4) mediante el teorema de P-B, que brinda dos posibles escenarios para la existencia de ciclos límites, los cuales se describen a continuación (ver [Zill et al., 2011]).

Considérese un sistema no lineal tal que:

$$\dot{x} = f(x), \quad (12)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  y  $f(x) \in \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial lo suficientemente suave.

*Teorema 1.* Considérese el sistema (12), entonces:

- Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  la región simplemente conexa comprendida entre dos curvas cerradas anidadas simples  $\Gamma$  y  $\gamma$  (ver Figura 2(a)). Suponga que  $\mathcal{R}$  no contiene equilibrios de (12) y en cada punto de  $\Gamma$  y  $\gamma$  el campo vectorial apunta hacia el interior de  $\mathcal{R}$ . Entonces, el sistema tiene una órbita periódica atractora contenida en  $\mathcal{R}$ .
- Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  la región simplemente conexa contenida dentro de la curva  $\Gamma$ . (ver Figura 2(b)). Suponga que  $\mathcal{R}$  contiene un equilibrio repulsor (fuente) en (12) y en cada punto de  $\Gamma$  el campo vectorial apunta el interior de  $\mathcal{R}$ . Entonces, el sistema tiene un ciclo límite estable contenida en  $\mathcal{R}$ .

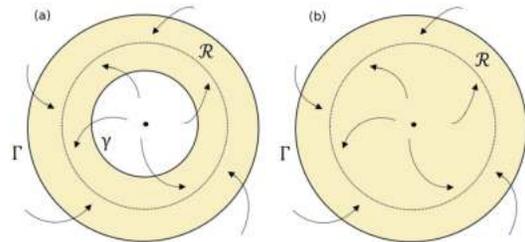


Fig. 2. (a) Ciclo límite sin equilibrio en  $\mathcal{R}$  y (b) ciclo límite con equilibrio repulsor en  $\mathcal{R}$ .

Para aplicar esta metodología se determina primero las regiones en las cuales el sistema (4) presentará la dinámica deseada. Defínanse los intervalos

$$\begin{aligned} I_{-1}^l &= \{x_l \in \mathbb{R} : x_l < -\Phi_1^l\} \\ I_0^l &= \{x_l \in \mathbb{R} : |x_l| < \Phi_1^l\} \\ I_1^l &= \{x_l \in \mathbb{R} : x_l > \Phi_1^l\}, \end{aligned} \quad (13)$$

para  $l = 1, 2$ . Estos intervalos definen las regiones disjuntas en el plano  $R_{(m,n)} = I_m^1 \times I_n^2$ ,  $m, n = -1, 0, 1$ , en las cuales actuará (11). Luego, (4) puede ser expresado como:

$$\dot{x} = Ax + B \begin{cases} -U_1^1 + U_1^2 & \text{if } x \in R_{(-1,1)} \\ \frac{U_1^1}{\Phi_1^1} x_1 + U_1^2 & \text{if } x \in R_{(0,1)} \\ U_1^1 + U_1^2 & \text{if } x \in R_{(1,1)} \\ -U_1^1 + \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} x_2 & \text{if } x \in R_{(-1,0)} \\ \frac{U_1^1}{\Phi_1^1} x_1 + \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} x_2 & \text{if } x \in R_{(0,0)} \\ U_1^1 + \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} x_2 & \text{if } x \in R_{(1,0)} \\ -U_1^1 - U_1^2 & \text{if } x \in R_{(-1,-1)} \\ \frac{U_1^1}{\Phi_1^1} x_1 - U_1^2 & \text{if } x \in R_{(0,-1)} \\ U_1^1 - U_1^2 & \text{if } x \in R_{(1,-1)} \end{cases} \quad (14)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

*Observación 1.* Nótese que la amplitud de las regiones  $R_{(\cdot, \cdot)}$  dependen de los parámetros  $\Phi_1^l$ , los cuales también ajustan a las funciones de pertenencia en el 2-FIS con valores de salida  $U_1^l$  fijos. Por tanto, la modificación de la dinámica en el sistema (14) se hace a través de los valores de los  $\Phi_1^l$ 's.

Se emulará el inciso (b) del Teorema 1, siendo este el caso de estudio correspondiente al problema planteado. Nótese que para cualquier matriz  $M$  en la forma

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\delta & -\kappa \end{bmatrix},$$

su inversa está dada por

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\kappa}{\delta} & -\frac{1}{\delta} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y el producto de  $M$  con un vector de la forma  $v = (0, \eta)^T$  es

$$M^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} -\frac{\eta}{\delta} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, los puntos de equilibrio estarían situados en el eje  $x_1$ . Sin embargo, las regiones  $R_{(m,1)}$  y  $R_{(m,-1)}$  no contienen a sus puntos de equilibrio para  $m = -1, 0, 1$  y los mismos se consideran puntos de equilibrio virtuales. Por otro lado, al analizar el sistema en la región  $R_{(0,0)}$  se obtiene como único punto de equilibrio al origen  $[x_1 \ x_2]^* = [0 \ 0]$  y la dinámica en esta región está a cargo de la matriz

$$A + BU_{(0,0)}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma + \frac{U_1^1}{\Phi_1^1} & -\phi + \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

donde  $U_{(0,0)} = [U_1^1/\Phi_1^1 \ U_1^2/\Phi_1^2]^T$ .

El polinomio característico de la matriz (16) está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(\phi - \frac{U_1^2}{\Phi_1^2}\right) \lambda + \left(\gamma - \frac{U_1^1}{\Phi_1^1}\right),$$

realizando el análisis de estabilidad sobre  $p(\lambda)$  se obtiene el siguiente resultado.

*Lema 1.* El sistema (14) tiene el origen como único punto de equilibrio y el mismo es repulsor si:

$$\Phi_1^1 > \frac{U_1^1}{\gamma} \quad \text{y} \quad \Phi_1^2 < \frac{U_1^2}{\phi}, \quad (17)$$

donde  $\gamma, \phi, U_1^k, \Phi_1^k > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

La dinámica fuera de  $R_{(0,0)}$  está regida por los equilibrios virtuales del sistema (14) en  $R_{(\pm 1,0)}$  y  $R_{(m,\pm 1)}$ ,  $m = -1, 0, 1$ . Del Lema 1 y bajo las características del sistema (1) se desprende el siguiente Lema.

*Lema 2.* Los equilibrios virtuales del sistema (14) presentan comportamiento tipo foco estable en las regiones  $R_{(m,\pm 1)}$ ,  $m = -1, 0, 1$ , si  $\Phi_1^1$  y  $\Phi_1^2$  satisfacen:

$$\frac{U_1^1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1^1 \quad \text{y} \quad \frac{U_1^2}{\phi + 2\sqrt{\gamma}} < \Phi_1^2. \quad (18)$$

*Observación 2.* Al analizar el sistema en las regiones  $R_{(\pm 1,0)}$  se puede observar que su dinámica proviene de la matriz

$$A + BU_{(\pm 1,0)}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma - \phi + \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde  $U_{(\pm 1,0)} = [0 \ U_1^2/\Phi_1^2]^T$ , por lo que las condiciones (17) nos llevan a determinar que los equilibrios virtuales en las regiones  $R_{(\pm 1,0)}$  presentan comportamiento tipo foco inestable.

Sin embargo, pese a la Observación 2, se puede evitar que las soluciones escapen por la inestabilidad en  $R_{(\pm 1,0)}$ . Para ello, es necesario considerar que la parte real de los valores propios del sistema regido en las regiones  $R_{(m,\pm 1)}$ ,  $m = -1, 0, 1$ , sea modularmente mayor que en la región  $R_{(\pm 1,0)}$ , es decir,

$$\left| \phi - \frac{U_1^2}{\Phi_1^2} \right| < |-\phi| \Leftrightarrow \Phi_1^2 > \frac{U_1^2}{2\phi}. \quad (20)$$

Unificando las condiciones de los Lemas 1 y 2, y las de (20), se obtienen las condiciones para que las soluciones se establezcan en una órbita periódica (ver Figura 3).

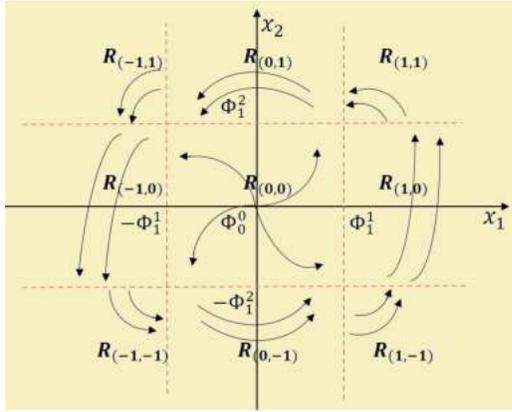


Fig. 3. Comportamiento de las soluciones vía PB.

**Teorema 2.** El sistema (14) posee un ciclo límite estable alrededor del origen si

$$\frac{U_1^1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1^1 \text{ y } \max \left\{ \frac{U_1^2}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{U_1^2}{2\phi} \right\} < \Phi_1^2 < \frac{U_1^2}{\phi}. \quad (21)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

Para las simulaciones, se considera el modelo dinámico (1) con  $\gamma = 50.829$  y  $\phi = 4.55$ . El 2-FIS definido a través de la función  $\varepsilon(x)$  se comportará como un componente interno del oscilador. La representación en espacio de estados del oscilador está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -50.829x_1(t) - 4.55x_2(t) + \varepsilon(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Tomando  $U_1^1 = 0.2$  y  $U_1^2 = 0.6$ , los intervalos de los parámetros de diseño de los FIS para que el sistema exhiba un ciclo límite de acuerdo con lo establecido en (21) son

$$\begin{aligned} 0.0044 &= \frac{U_1^1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1^1, \\ 0.0660 &= \max \left\{ \frac{U_1^2}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{U_1^2}{2\phi} \right\} < \Phi_1^2 < \frac{U_1^2}{\phi} = 0.1319. \end{aligned} \quad (23)$$

Con base en (23), se eligen valores admitidos  $\Phi_1^1 = 0.006$ ,  $\Phi_1^2 = 0.1$ . La configuración de las simulaciones consiste en mantener los mismos parámetros de diseño y utilizar condición inicial:  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0.04 \ 0]^T$ ,  $[x_1(0) \ x_2(0)] = [0.015 \ 0]^T$  y  $[x_1(0) \ x_2(0)] = [0.4 \ 0]^T$ . En la Figura 4 (parte superior) se puede observar como durante la evolución de las trayectorias de  $x_1$  disminuye en amplitud hasta mantenerse y las trayectorias en plano fase (mostrada en la imagen central) muestran convergencia a una órbita. Otras trayectorias en plano fase que son convergente hacia la misma órbita se puede observar en la Figura 4 (parte inferior) al tomar como condición inicial  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [\pm 0.4 \ 0]^T$ ,  $[x_1(0) \ x_2(0)] = [0 \ 4]^T$  y  $[x_1(0) \ x_2(0)] = [0 \ -4]^T$ , mostrando la existencia de una

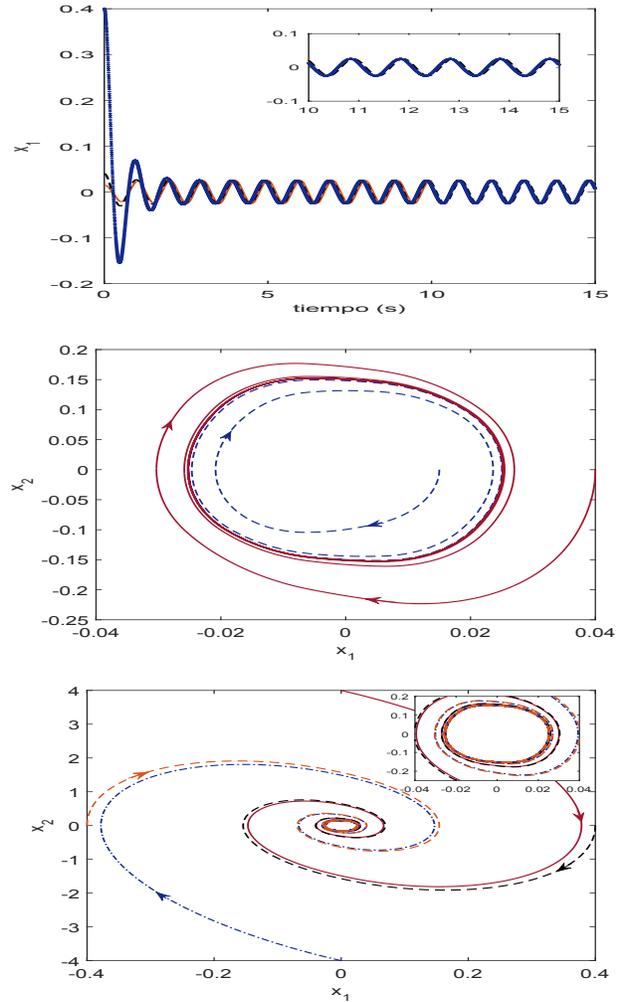


Fig. 4. Trayectorias de  $x_1$  en función del tiempo; trayectorias del sistema en plano fase.

órbita periódica estable tal como lo establece el Teorema 2. Es decir, solo al satisfacerse la condición dada en (21) para la estructura y características definidas de los FIS, se garantiza la existencia de trayectorias oscilatorias que conforme  $t \rightarrow \infty$  mantienen una amplitud y frecuencia, en otro caso, el comportamiento límite de las trayectorias no presenta oscilaciones auto-sostenidas, en casos particulares con parámetro  $\Phi_1^2 = 0.1319$  la trayectoria es de tipo centro y cuando  $0.1319 < \Phi_1^2$  las trayectorias son del tipo foco estable.

Con el fin de verificar de manera experimental los resultados obtenidos de manera analítica y numérica, se implementó el sistema (22) en *Simulink*<sup>®</sup>, se ejecuta a través de la plataforma de adquisición de datos *dSPACE* mientras que las señales de salida  $x_1$  y  $x_2$  se registran mediante un osciloscopio del fabricante *Tektronix*.

Para el experimento se utilizan  $U_1^1 = 0.2$ ,  $U_1^2 = 0.6$ ,  $\Phi_1^1 = 0.006$  y  $\Phi_1^2 = 0.1$ , se toma como condición inicial  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0.4 \ 0]^T$ . Los resultados donde

se muestra la señal oscilatoria correspondiente a  $x_1$  se pueden apreciar en la Figura 5 en la parte superior, y en la parte inferior se ilustra el comportamiento de la trayectoria en plano fase, verificando que se obtiene una órbita periódica estable.

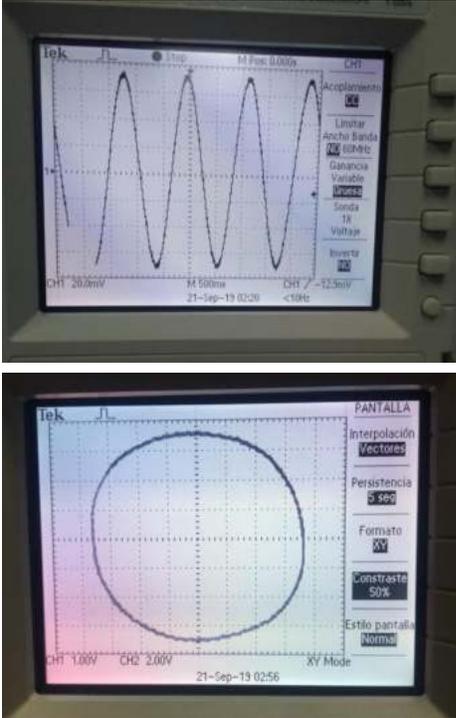


Fig. 5. Captura de pantalla de osciloscopio donde se muestra la señal de  $x_1$  (foto superior) y trayectoria en plano de fase (foto inferior)

## 6. CONCLUSIONES

Es posible diseñar una componente difusa para ser añadida a un sistema oscilatorio con la finalidad de generar ciclos límite. La componente difusa se diseña para que con el ajuste de sus parámetros pueda satisfacer el teorema de Poincaré-Bendixson. Más aún, se provee de intervalos de los parámetros en los cuales se garantiza la robustez de la estabilidad estructural orbital.

Se prevé como trabajo futuro aplicar esta metodología a sistemas de mayor dimensión y/o de orden superior, así como determinar las condiciones para garantizar oscilaciones con amplitud y frecuencia deseada.

## REFERENCIAS

Luis T Aguilar, Igor Boiko, Leonid Fridman, and Rafael Iriarte. Self-oscillations in dynamic systems, a new methodology via two-relay controllers. *Birkhauser*, 2015.

J Aracil, F Gordillo, and JA Acosta. Stabilization of oscillations in the inverted pendulum. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):79–84, 2002.

Carlos Canudas-de-Wit, Bernard Espiau, and Claudio Urrea. Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):527–532, 2002.

Juan Castillo, Jaume Llibre, and Fernando Verduzco. The pseudo-hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems. *Nonlinear Dynamics*, 90(3):1829–1840, 2017.

S Chatterjee. Self-excited oscillation under nonlinear feedback with time-delay. *Journal of Sound and Vibration*, 330(9):1860–1876, 2011.

Hongkai Dai and Russ Tedrake. Optimizing robust limit cycles for legged locomotion on unknown terrain. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1207–1213. IEEE, 2012.

Ali Reza Hakimi and Tahereh Binazadeh. Stable limit cycles generating in a class of uncertain nonlinear systems: Application in inertia pendulum. *The Modares Journal of Electrical Engineering*, 12(3):1–6, 2012.

Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.

Alejandro Jenkins. Self-oscillation. *Physics Reports*, 525(2):167–222, 2013.

Euntai Kim, Heejin Lee, and Mignon Park. Limit-cycle prediction of a fuzzy control system based on describing function method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(1):11–22, 2000.

Jan Melin. Does distribution theory contain means for extending poincaré-bendixson theory? *Journal of mathematical analysis and applications*, 303(1):81–89, 2005.

Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.

Pablo J. Prieto, Nohe R Cázarez-Castro, Luis T Aguilar, and Selene L Cardenas-Maciel. Función descriptiva para predicción de chattering en el control por modos deslizantes basado en lógica difusa. In *Congreso Nacional de Control Automático 2016, At Querétaro*, 2016.

Pablo J. Prieto, Nohe R Cázarez-Castro, Luis T Aguilar, and Selene L Cardenas-Maciel. Chattering existence and attenuation in fuzzy-based sliding mode control. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 61:152–160, 2017.

Anton Shiriaev, John W Perram, and Carlos Canudas-de-Wit. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(8):1164–1176, 2005.

Joseph H Solomon, Martijn Wisse, and Mitra JZ Hartmann. Fully interconnected, linear control for limit cycle walking. *Adaptive Behavior*, 18(6):492–506, 2010.

Dennis Zill, Warren S Wright, and Michael R Cullen. *Advanced engineering mathematics*. Jones & Bartlett Learning, 2011.