

# Estabilización de un robot autobalanceable en una rampa por moldeo de energía <sup>\*</sup>

Isaac Gandarilla <sup>\*</sup> Víctor Santibáñez <sup>\*\*</sup> Jesús Sandoval <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Tecnológico Nacional de México / I. T. La Laguna (e-mail: [d.igandarillae@correo.itlalaguna.edu.mx](mailto:d.igandarillae@correo.itlalaguna.edu.mx))

<sup>\*\*</sup> Tecnológico Nacional de México / I. T. La Laguna (e-mail: [vsantiba@correo.itlalaguna.edu.mx](mailto:vsantiba@correo.itlalaguna.edu.mx))

<sup>\*\*\*</sup> Tecnológico Nacional de México / I. T. La Paz (e-mail: [jesus.sg@lapaz.tecnm.mx](mailto:jesus.sg@lapaz.tecnm.mx))

---

**Resumen:** El robot autobalanceable es un mecanismo subactuado y no lineal, lo que lo hace atractivo para validar diferentes algoritmos de control. En este trabajo presentamos una ley de control por moldeo de energía para la estabilización de un robot autobalanceable que se desplaza sobre una rampa con un ángulo de inclinación conocido. También se presenta el análisis de estabilidad asintótica del sistema en malla cerrada junto con resultados experimentales.

*Keywords:* Sistema subactuado, Control no lineal, Moldeo de energía, Análisis de estabilidad.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas mecánicos subactuados, aquellos que tienen un menor número de entradas de control que grados de libertad, son utilizados comúnmente en laboratorios de pregrado y posgrado para el estudio de control, esto debido al reto que representa el controlar un sistema donde no todas las coordenadas son manipuladas directamente por las entradas de control. Ejemplo de un sistema subactuado es el robot autobalanceable, el cual también posee una dinámica no lineal, por lo que es un sistema atractivo para validar diferentes esquemas de control. Algunos trabajos reportados en la literatura sobre el control de este mecanismo pueden ser encontrados en Xu et al. (2014), Kwon et al. (2015), Yuan et al. (2016), Sadeghian y Masoule (2016), Gandarilla et al. (2017) y Gandarilla et al. (2019).

Entre los tipos de control que han sido propuestos para el control de sistemas subactuados se encuentran los métodos basados en el moldeo de energía. Existen dos métodos de diseño del control por moldeo de energía: el Lagrangiano Controlado, presentado en Bloch et al. (2001) e IDA-PBC, propuesto en Ortega et al. (2002). Una característica que comparten ambas metodologías es la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales para obtener una ley de control válida. Recientemente, en Donaire et al. (2016), los autores proponen un método basado en moldeo de energía y linealización parcial para

el control de sistemas mecánicos subactuados que no requiere resolver ecuaciones diferenciales parciales.

La contribución del presente trabajo es una ley de control diseñada siguiendo el método mostrado en Donaire et al. (2016) para la estabilización de un robot autobalanceable en una posición deseada sobre una rampa con un ángulo de inclinación conocido y la obtención de resultados experimentales en tiempo real.

## 2. ROBOT AUTOBALANCEABLE SOBRE UNA RAMPA

El robot autobalanceable, también conocido como péndulo invertido sobre ruedas, puede ser visto como un péndulo que se balancea sobre una plataforma móvil diferencial. Para este trabajo, se hace la suposición de que ambas llantas con las que cuenta el sistema se mueven simultáneamente, lo que restringe al sistema a desplazarse únicamente de manera perpendicular al eje de sus llantas, lo que reduce a dos el número de grados de libertad. La figura 1 muestra un esquema del robot autobalanceable sobre una rampa con un ángulo de inclinación  $\phi$ . El ángulo entre el péndulo y el eje  $y$  positivo es  $\psi$ , mientras que  $\theta$  es el ángulo de las llantas, también medido con respecto al eje  $y$  positivo y  $\tau$  es el par producido por los motores. Los parámetros de este mecanismo están listados en la Tabla 1.

La matriz de inercias  $M$  y la función de energía potencial  $V$  del robot autobalanceable sobre una rampa son

---

<sup>\*</sup> Este proyecto ha sido parcialmente financiado por los proyectos TecNM, CONACyT 134534 y CONACYT 166636.

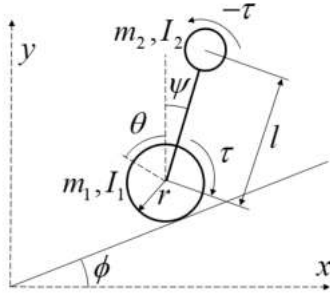


Figura 1. Robot autobalanceable sobre una rampa

Tabla 1. Parámetros del robot autobalanceable

Parámetro	Descripción	Unidades
$l$	Distancia al centro de masa	m
$r$	Radio de las ruedas	m
$m_1$	Masa de las ruedas	kg
$m_2$	Masa del péndulo	kg
$I_1$	Momento de inercia de las ruedas	kg·m <sup>2</sup>
$I_2$	Momento de inercia del péndulo	kg·m <sup>2</sup>

$$M(\psi) = \begin{bmatrix} c & b \cos(\psi + \phi) \\ b \cos(\psi + \phi) & a \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$V(\theta, \psi) = d \cos(\psi) + e\theta, \quad (2)$$

donde  $a = m_2 l^2 + I_2$ ,  $b = l m_2 r$ ,  $c = [2m_1 + m_2] r^2 + 2I_1$ ,  $d = m_2 g l$ ,  $e = (m_2 + 2m_1) g r \sin(\phi)$ , y  $g$  es la aceleración gravitacional.

La dinámica del robot autobalanceable sobre una rampa, obtenida por medio de las ecuaciones Euler-Lagrange, es

$$c\ddot{\theta} + b \cos(\psi)\ddot{\psi} - b \sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} = \tau, \quad (3)$$

$$b \cos(\psi)\ddot{\theta} + a\ddot{\psi} - d \sin(\psi) = -\tau. \quad (4)$$

El objetivo de control es el desplazamiento del robot, representado por  $s$ , sobre la rampa desde el punto de inicio hasta que alcance un punto deseado  $s_d$ , que suponiendo que no hay deslizamiento, equivale a que el ángulo de las llantas alcance un valor deseado  $\theta_d$  que está en función de  $s_d$  (ver figura 2); lo anterior mientras el péndulo del robot permanece erguido. La posición erguida del péndulo no es con  $\psi = 0$ , como sería en el caso de que el robot se desplace sobre un plano horizontal, sino que, de la dinámica en lazo abierto (3) y (4) se tiene que el valor de  $\psi$  que permite al robot permanecer sobre un punto en la rampa, denotado como  $\psi^*$ , esta dado por

$$\psi^* = \arcsen\left(\frac{e}{d}\right). \quad (5)$$

Nótese que  $\psi^*$  esta en función de  $\phi$  a través del término  $e$ , y si  $\phi = 0$ , entonces  $\psi^* = 0$ .

### 3. LEY DE CONTROL POR MOLDEO DE ENERGÍA

El método de control usado en este trabajo es el propuesto en Donaire et al. (2016). Este método es aplicable a

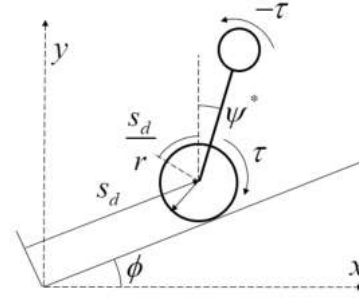


Figura 2. Objetivo de control para el robot autobalanceable.

sistemas mecánicos cuya dinámica, obtenida por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se puede escribir como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \nabla V(\mathbf{q}) = G\boldsymbol{\tau}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas del sistema,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas de control,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^\top > 0$  es la matriz de inercias,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $V(\mathbf{q})$  es la función de energía potencial, de manera que  $\nabla V(\mathbf{q})$  es el vector de fuerzas gravitacionales y  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entradas, con  $\text{rank } G = m$  y  $m < n$ . Se hace la suposición de que  $G$  tiene la forma

$$G = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{n-m \times m} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Observando (7), se puede verificar que  $\boldsymbol{\tau}$  se aplica solo a los primeros  $m$  renglones de (6), por lo que es posible separar a las coordenadas actuadas  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^m$  y las coordenadas no actuadas  $\mathbf{q}_u \in \mathbb{R}^{n-m}$  de manera que  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^\top \quad \mathbf{q}_u^\top]^\top$ . La matriz  $M$  puede ser escrita como

$$M = \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{au} \\ m_{au}^\top & m_{uu} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

con  $m_{aa} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $m_{au} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , y  $m_{uu} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ . Aún cuando en la propuesta de Donaire et al. (2016) no es necesario resolver ecuaciones diferenciales parciales para obtener una ley de control, sí es necesario que la matriz de inercias y la función de energía potencial del sistema que se desea estabilizar cumplan con ciertas condiciones, llamadas "condiciones de igualación", las cuales son

- A1.  $M$  es función sólo de  $\mathbf{q}_u$ .
- A2.  $m_{aa}$  es constante.
- A3.  $V$  puede ser escrita como:

$$V(\mathbf{q}) = V_a(\mathbf{q}_a) + V_u(\mathbf{q}_u). \quad (9)$$

- A4. Las columnas de  $m_{au}$  satisfacen:

$$\nabla_{\mathbf{q}_{u_j}} (m_{au})_k = \nabla_{\mathbf{q}_{u_k}} (m_{au})_j, \quad \forall j \neq k, \quad j, k \in \{1, 2, \dots, n-m\}. \quad (10)$$

Para comprobar si el robot autobalanceable cumple con las condiciones de igualación es necesario que sus coordenadas se puedan separar como se indicó antes, pero

es claro de (3) y (4) que para el robot autobalanceable,  $G = [1 \quad -1]^T$  no tiene la forma mostrada en (7). Para resolver este inconveniente, se usa un cambio de coordenadas dado por

$$q_1 = \theta - \psi, \quad (11)$$

$$q_2 = \psi. \quad (12)$$

El objetivo de control, expresado en las nuevas coordenadas es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d, \quad (13)$$

donde el vector de posiciones deseadas está dado por

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_d}{r} - q_2^* \\ q_2^* \end{bmatrix}, \quad (14)$$

siendo  $q_2^* = \psi^*$  con  $\psi^*$  definido en (5). La matriz de inercias y la función de energía potencial del robot autobalanceable, en función de  $q_1$  y  $q_2$ , son

$$M = \begin{bmatrix} c & c + b \cos(q_2 + \phi) \\ c + b \cos(q_2 + \phi) & a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$V = d \cos(q_2) + e [q_1 + q_2], \quad (16)$$

mientras que su dinámica en lazo abierto se expresa, usando la nomenclatura introducida en (8), como

$$m_{aa}\ddot{q}_1 + m_{au}\ddot{q}_2 + c_a\dot{q}_2 + \nabla_{q_1}V = \tau, \quad (17)$$

$$m_{au}\ddot{q}_1 + m_{uu}\ddot{q}_2 + c_u\dot{q}_2 + \nabla_{q_2}V = 0, \quad (18)$$

donde

$$m_{aa} = c \quad (19)$$

$$m_{au} = c + b \cos(q_2 + \phi) \quad (20)$$

$$m_{uu} = a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c \quad (21)$$

$$c_a = -b \operatorname{sen}(q_2 + \phi) \dot{q}_2, \quad (22)$$

$$c_u = -b \operatorname{sen}(q_2 + \phi) \dot{q}_2, \quad (23)$$

$$\nabla_{q_1}V = e \quad (24)$$

$$\nabla_{q_2}V = e - d \operatorname{sen}(q_2). \quad (25)$$

Ahora que las ecuaciones de la dinámica del robot autobalanceable tiene la forma apropiada, el siguiente paso es revisar si éste cumple con las condiciones de igualdad A1-A4. De (19)-(21) se comprueba que A1 y A2 se satisfacen; la ecuación (16) puede escribirse en la forma (9) con  $V_a = eq_1$  y  $V_u = d \cos(q_2) + eq_2$ ; y, dado que  $m_{au}$  es un escalar, la condición A4 se cumple trivialmente.

Ya que se comprobó que el sistema cumple con las condiciones de igualdad, el siguiente paso es la linealización parcial del sistema para que éste adopte la llamada forma normal de Spong (véase Spong (1994)):

$$\ddot{q}_1 = u, \quad (26)$$

$$m_{uu}\ddot{q}_2 + c_u\dot{q}_2 + \nabla_{q_2}V = -m_{au}u. \quad (27)$$

Otra condición que debe de satisfacer el sistema es  $\dot{m}_{uu} = c_u + c_u^T$ , que para nuestro caso en estudio, de (21) y (23), se observa que esta condición se satisface. Para el caso del robot autobalanceable, la forma normal de Spong se obtiene definiendo  $\tau$  como

$$\tau = \left[ m_{aa} - \frac{m_{au}^2}{m_{uu}} \right] u + c_a \dot{q}_2 + \nabla_{q_1}V - \frac{m_{au}}{m_{uu}} [c_u \dot{q}_2 + \nabla_{q_2}V]. \quad (28)$$

donde  $u$  es una entrada de control auxiliar que se usa para moldear la energía del sistema, de manera que el punto  $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{q}_d^T \quad \mathbf{0}^T]^T$  se convierta en un punto de equilibrio asintóticamente estable, al menos localmente. Con este fin, de acuerdo a la ley de control propuesta por Donaire et al. (2016)  $u$  es definido como

$$u = -\frac{S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + k_p [k_a \dot{q}_1 - k_u [c + b \cos(q_2 + \phi)] \dot{q}_2]}{K(\mathbf{q})}, \quad (29)$$

donde

$$S = k_u k_k \left[ -c_u \dot{q}_2 + \frac{[c_u \dot{q}_2 + \nabla_{q_2}V] [c + b \cos(q_2 + \phi)]}{a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c} \right] + k_I \tanh(k_s [k_a [q_1 - q_{1d}] + k_u [V_N(q_2) - V_N(q_2^*)]]), \quad (30)$$

$$K = k_e + k_a k_k + k_u k_k \frac{[c + b \cos(q_2 + \phi)]^2}{a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c}, \quad (31)$$

$$V_N = -cq_2 - b \operatorname{sen}(q_2 + \phi). \quad (32)$$

y  $k_a$ ,  $k_e$ ,  $k_k$ ,  $k_I$  y  $k_s$  son constantes arbitrarias estrictamente positivas, y  $k_u$  es una constante estrictamente negativa. Todas las constantes son las ganancias del controlador (29). La dinámica del robot autobalanceable en lazo cerrado se obtiene sustituyendo  $\tau$  en (3)-(4), con  $\tau$  establecido en (28) y la entrada auxiliar  $u$  en (29), tal que resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ -\frac{S + k_p [k_a \dot{q}_1 - k_u m_{au} \dot{q}_2]}{K} \\ -\frac{m_{au} \frac{S + k_p [k_a \dot{q}_1 - k_u m_{au} \dot{q}_2]}{K} + c_u \dot{q}_2 + \nabla_{q_2}V}{m_{uu}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde el punto  $[q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T = [q_{1d} \quad q_{2d} \quad 0 \quad 0]^T$  es un equilibrio aislado, con las posiciones deseadas  $q_{1d}$  y  $q_{2d}$  definidos en (14).

#### 4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA

Se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M_d(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V_d(\mathbf{q}), \quad (34)$$

con

$$M_d = \begin{bmatrix} k_e k_a + k_a^2 k_k & m_{d_2} \\ m_{d_2} & m_{d_3} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$V_d = k_e k_u [d [\cos(q_2) - 1] + e q_2] + \frac{k_I}{k_s} \ln(\cosh(k_s [k_a [q_1 - q_{1,d}] + k_u [V_N - V_N(q_2^*)]])), \quad (36)$$

donde

$$m_{d_2} = -k_a k_u k_k [c + b \cos(q_2 + \phi)], \quad (37)$$

$$m_{d_3} = k_e k_u [a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c] + k_u^2 k_k [c + b \cos(q_2 + \phi)]^2. \quad (38)$$

La función (34) es definida positiva con  $k_I, k_e, k_a, k_k > 0$  y

$$k_u < -\frac{[k_e + k_a k_k] [a + 2b \cos(q_2 + \phi) + c]}{k_k [c + b \cos(q_2 + \phi)]^2} < 0. \quad (39)$$

Para evitar una singularidad en (39) con valores de  $c$  y  $b$ , se define un conjunto  $D$  que a su vez establezca cotas sobre  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  para asegurar que  $V_L$  es definida positiva, tenemos que

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | q_2 \in (-\phi - \epsilon, -\phi + \epsilon) \right\}, \quad (40)$$

donde si  $c > b$ , existe un valor de  $k_u$  que hace  $\epsilon = \pi$ , mientras que si  $c \leq b$  entonces se puede encontrar un valor de  $k_u$  tal que

$$\epsilon = \arccos \left( -\frac{k_e + k_a k_k + c k_k k_u}{b k_k k_u} - \frac{\sqrt{k_e + k_a k_k}}{b k_k k_u} \times \sqrt{k_e + k_a k_k + k_k k_u [c - a]} \right) < \pi. \quad (41)$$

La derivada temporal de (34) es

$$\dot{V}_L = -k_p [k_a \dot{q}_1 - k_u [c + b \cos(q_2)] \dot{q}_2]^2, \quad (42)$$

y se observa que es semidefinida negativo, lo que permite concluir que el punto  $[\mathbf{q}^\top \ \dot{\mathbf{q}}^\top]^\top = [\mathbf{q}_d \ \mathbf{0}^\top]^\top$  es estable. Para probar estabilidad asintótica local del mismo punto invocamos el Teorema de Barbashin-Krasovskii (Corolario 4.1 Khalil (2002)). Comenzamos definiendo el conjunto  $\mathcal{S}$  como

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in D | \dot{V}_L = 0 \right\}. \quad (43)$$

De (42), las trayectorias del sistema (33) que se encuentran dentro de  $\mathcal{S}$  son las que cumplen con

$$k_a \dot{q}_1(t) - k_u [c + b \cos(q_2(t) + \phi)] \dot{q}_2(t) \equiv 0. \quad (44)$$

Integrando (44) con respecto al tiempo obtenemos

$$k_a q_1(t) - k_u [c q_2(t) + b \text{sen}(q_2(t) + \phi)] = C_1, \quad (45)$$

donde  $C_1$  es una constante de integración. Sustituyendo (44) en la dinámica de lazo cerrado (33) resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ -\frac{S(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{K(q_2(t))} \\ f_4(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

donde

$$f_4 \equiv \frac{m_{au}(q_2(t)) \frac{S(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{K(q_2(t))}}{m_{uu}(q_2(t))} - \frac{b \text{sen}(q_2(t) + \phi) \dot{q}_2^2(t) + d \text{sen}(q_2(t)) - e}{m_{uu}(q_2(t))} \quad (47)$$

Por otro lado, derivando (44) con respecto al tiempo se obtiene

$$k_a \ddot{q}_1(t) - k_u [c + b \cos(q_2(t) + \phi)] \ddot{q}_2(t) + k_u b \text{sen}(q_2(t) + \phi) \dot{q}_2(t)^2 \equiv 0. \quad (48)$$

Sustituyendo  $\ddot{q}_1$  y  $\ddot{q}_2$  de (46), y tomando en cuenta (45), en (48) se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas,

$$u(t) \equiv -\frac{k_I}{k_e} \tanh(k_s [C_1 - k_a q_{1,d} - k_u V_N(q_2^*)]) \equiv u_{const}, \quad (49)$$

donde  $u_{const}$  es una constante. Sustituyendo (49) en (26), e integrando dos veces con respecto al tiempo da

$$\dot{q}_1(t) \equiv u_{const} t + C_2, \quad (50)$$

$$q_1(t) \equiv \frac{1}{2} u_{const} t^2 + C_2 t + C_3, \quad (51)$$

con  $C_2$  y  $C_3$  siendo constantes de integración. Dado que ya se demostró la estabilidad del punto  $[\mathbf{q}_d \ \mathbf{0}^\top]^\top$ , es posible encontrar alguna  $\delta > 0$  tal que si  $\| [\mathbf{q}^\top(0) \ \mathbf{p}^\top(0)]^\top \| < \delta$  entonces  $[\mathbf{q}^\top(t) \ \mathbf{p}^\top(t)]^\top$  estará acotado (Teorema 4.1 Khalil (2002)).

Si  $[\mathbf{q}^\top(t) \ \mathbf{p}^\top(t)]^\top$  está acotado, entonces  $q_1(t)$  no puede ser proporcional al tiempo o a su valor al cuadrado, por lo de (51) se tiene que  $u_{const} = 0$ ,  $C_2 = 0$ , y

$$q_1(t) \equiv C_3 \Rightarrow \dot{q}_1(t) \equiv 0, \quad (52)$$

mientras que sustituyendo  $u_{const} = 0$  en (49) arroja

$$C_1 \equiv k_a q_{1,d} + k_u V_N(q_2^*) \quad (53)$$

Sustituyendo (52) en (44) se verifica que  $\dot{q}_2(t) \equiv 0$ , lo que implica que  $\dot{q}_2(t) \equiv 0$ , de manera que usando (27) con  $u = 0$  se obtiene

$$-d \text{sen}(q_2(t) + \phi) + e \equiv 0, \quad (54)$$

$$q_2(t) \equiv \arcsen\left(\frac{e}{d}\right), \quad (55)$$

$$q_2(t) \equiv q_2^*. \quad (56)$$

Finalmente, sustituyendo (53) y (56) en (45) resulta en

$$q_1(t) \equiv q_{1d}. \quad (57)$$

Por lo tanto,  $[\mathbf{q}^\top(t) \ \dot{\mathbf{q}}(t)^\top]^\top \equiv [\mathbf{q}_d \ \mathbf{0}^\top]^\top$  es la única solución que puede permanecer idénticamente dentro de  $\mathcal{S}$ . Entonces  $[\mathbf{q}_d^\top \ \mathbf{0}^\top]^\top$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de manera local.

Una vez demostrado que  $[\mathbf{q}_d^\top \ \mathbf{0}^\top]^\top$  es un punto de equilibrio asintótico de manera local, es posible encontrar una estimación de la región de atracción. Basándose en Kelly et al. (2011) se usó el conjunto subnivel de la función de Lyapunov (34),  $L_{V_L}(\gamma)$ , con  $\gamma > 0$ , definido como

$$L_{V_L}(c) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right] \in D | V_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < \gamma \right\}. \quad (58)$$

Para que  $L_{V_L}(\gamma)$  pueda ser una estimación de la región de atracción, es necesario que éste sea acotado y contenido en  $D$ . La matriz  $M_d$  es definida positiva en  $D$ , por lo que  $\dot{\mathbf{q}}$  esta acotado por

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| < \frac{\gamma}{\lambda_{max}(M_d)} \quad (59)$$

donde  $\lambda_{max}(M_d)$  es el máximo valor propio de  $M_d$ . Para calcular el valor de  $\gamma$ , se usa el primer término de la función  $V_d$  definida en (36). Haciendo

$$k_e k_u [d \cos(q_2) - 1] + e q_2 < \gamma. \quad (60)$$

El valor de  $\gamma$  para el cual (60) se cumple con  $q_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$  es

$$\gamma = k_e k_u [d \cos(-\phi + \epsilon) - 1] + e [-\phi + \epsilon]. \quad (61)$$

Ahora, haciendo  $V_d < \gamma$  y suponiendo que el sistema parte del reposo, se puede obtener una curva de nivel  $\partial L_{V_L}(\gamma)$  que representa el borde de la estimación de la región de atracción, definida como

$$\partial L_{V_L}(\gamma) = \{q_1 \in \mathbb{R}, q_2 \in D | V_d(\mathbf{q}) = \gamma\}, \quad (62)$$

esta curva puede ser representada sobre el plano  $\tilde{q}_1 - q_2$ , con  $\tilde{q}_1 = q_1 - q_{1d}$ , por medio de la curva parametrizada

$$\tilde{q}_1(q_2) = \frac{1}{k_s k_a} \operatorname{arccosh} \left( \exp \left( \frac{k_s}{k_I} [\gamma - k_e k_u [d \cos(q_2) - 1] + e q_2] \right) - \frac{k_u}{k_a} [V_N - V_N(q_2^*)] \right), \quad (63)$$

de la que se muestra un ejemplo en la figura 3

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se realizaron pruebas experimentales usando la plataforma Balanduino, mostrada en la figura 4. Este sistema cuenta con un microcontrolador ATMEGA1284P, que se encarga de capturar y procesar los datos provenientes de los sensores del sistema, almacenar los datos, calcular la ley de control y controlar los manejadores de los motores.

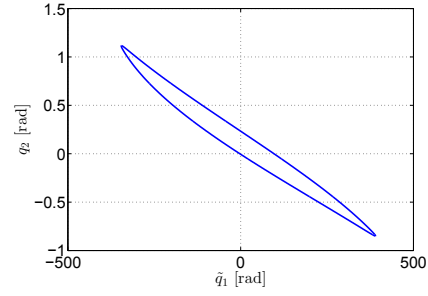


Figura 3. Ejemplo de la estimación de la región de atracción usando el conjunto subnivel  $L_{V_L}(\gamma)$ .

Los sensores que incluye el sistema son una Unidad de Medición Inercial (IMU) MPU6050 y un encoder magnético de 64 pulsos (debido a que los motore cuentan una caja de engranes la resolución práctica es de 1920 pulsos) por revolución en cada motor. La información de la central inercial es procesada por un filtro de Kalman para obtener una estimación ángulo del péndulo del robot. Las velocidades se calcularon por el método numérico de derivación hacia atrás de dos puntos. El periodo de muestreo usado en las pruebas fue de 8 milisegundos. los motores del prototipo son motores de corriente directa modelo XH-GM500-37D con un par máximo de 1.6[Nm]. Los parámetros físicos del robot son:  $a = 0,150$  [kgm<sup>2</sup>],  $b = 0,006$  [kgm<sup>2</sup>],  $c = 0,0035$  [kgm<sup>2</sup>],  $d = 1,1945$  [kgm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>] y  $e = 0,1344$  [kgm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>].

El experimento realizado consistió en mover el robot a una distancia de 40 cm por una rampa con un ángulo de inclinación  $\phi = 7,5^\circ$ , por lo que el valor deseado (en radianes) de las coordenadas  $\mathbf{q}$  puede escribirse, en radianes, como:

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 8,047 \\ 0,113 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Las ganancias usadas en el experimento son:  $k_a = 0,09$ ,  $k_e = 1,8$ ,  $k_k = 0,35$ ,  $k_u = -4000$ ,  $k_p = 5$ ,  $k_I = 900$  y  $k_s = 2,5$ . Despejando las ganancias usadas y parámetros correspondientes en (39) se tiene que  $k_u$  debe ser menor a aproximadamente -1814,8, por lo que el valor usado para los experimentos cumple con la restricción.

En los resultados, mostrados en las figuras 5, 6 y 7, se observa que el robot autobalanceable primero se inclina hasta un ángulo casi el doble de  $q_2^*$  para comenzar a desplazarse hacia la posición deseada mientras el péndulo tiende a  $q_2^*$ ; una vez que ambas coordenadas del sistema llegan cerca de sus valores deseados (marcados en rojo en las figuras 5 y 6), estas comienzan a oscilar alrededor de estos valores. Las oscilaciones observadas podrían ser debidas al método usado para calcular las velocidades, pero pruebas con otros de más puntos no mostraron mejoría, por lo que se atribuyen en mayor medida estas oscilaciones al juego presente en la caja de engranes de cada motor. De la figura 7 se puede notar que la señal de control nunca alcanza el límite de los motores, por lo que en ningún momento se saturan.

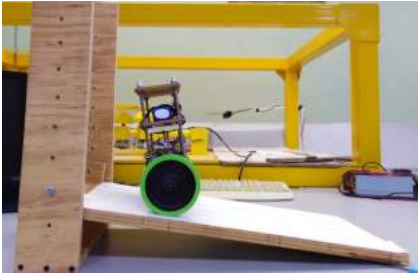


Figura 4. Robot autobalanceable Balanduino

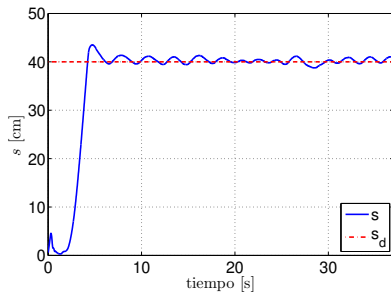


Figura 5. Posición sobre la rampa.

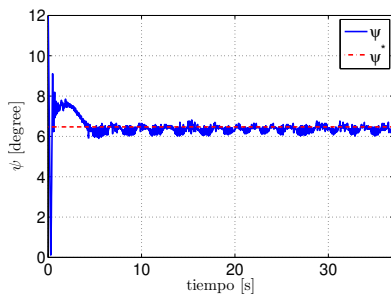


Figura 6. Ángulo del péndulo del robot.

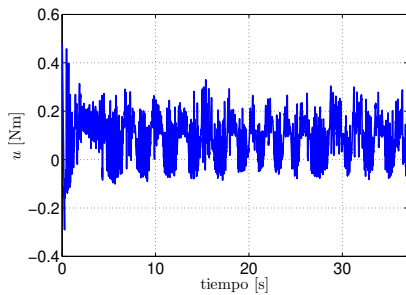


Figura 7. Señal de control.

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó una ley de control por el método de moldeo de energía presentado en Donaire et al. (2016), para la estabilización de un robot autobalanceable sobre una rampa con un ángulo de inclinación conocido. Se demostró estabilidad asintótica local del punto deseado, además, los resultados experimentales mostraron un buen desempeño del control.

## REFERENCIAS

- Bloch, A.M., Chang, D.E., Leonard, N.E., y Marsden, J.E. (2001). Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. Potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10), 1556–1571.
- Donaire, A., Mehra, R., Ortega, R., Satpute, S., Romero, J.G., Kazi, F., y Singh, N.M. (2016). Shaping the energy of mechanical systems without solving partial differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4), 1051–1056. doi: 10.1109/TAC.2015.2458091.
- Gandarilla, I., Santibáñez, V., y Sandoval, J. (2019). Control of a self-balancing robot with two degrees of freedom via ida-pbc. *ISA Transactions*, 88, 102 – 112. doi:https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.12.014.
- Gandarilla, I., Santibáñez, V., y Sandoval, J. (2017). Control of a self-balancing robot driven by dc motors via ida-pbc. En *ICCMA, October 2017, Edmonton, Canadá*.
- Kelly, R., Sandoval, J., y Santibáñez, V. (2011). A novel estimate of the domain of attraction of an ida-pbc of a ball and beam system1. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 8463 – 8467. doi: https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00717. 18th IFAC World Congress.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall.
- Kwon, S., Kim, S., y Yu, J. (2015). Tilting-Type Balancing Mobile Robot Platform for Enhancing Lateral Stability. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(3), 1470–1481.
- Ortega, R., Spong, M.W., Gomez-Estern, F., y Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), 1218–1233.
- Sadeghian, R. y Masoule, M.T. (2016). An experimental study on the PID and Fuzzy-PID controllers on a designed two-wheeled self-balancing autonomous robot. En *2016 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*, 313–318.
- Spong, M.W. (1994). Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. En *Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS '94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on*, volumen 1, 314–321 vol.1. doi:10.1109/IROS.1994.407375.
- Xu, J.X., Guo, Z.Q., y Lee, T.H. (2014). Design and Implementation of Integral Sliding-Mode Control on an Underactuated Two-Wheeled Mobile Robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(7), 3671–3681.
- Yuan, S., Lei, G., y Bin, X. (2016). Dynamic modeling and sliding mode controller design of a two-wheeled self-balancing robot. En *2016 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 2437–2442.