

# Formación Robusta Variante en el Tiempo del Esquema Líder-seguidor basado en Distancia y Ángulo

D. Flores-Montes\* M. M. Martínez-Álvarez\*  
J. González-Sierra\*\* E. G. Hernández-Martínez\*\*\*  
G. Fernández-Anaya\*\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México/I.T. de La Laguna Blvd. Revolución y Cuauhtémoc S/N C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México (e-mail:daniyfm5@gmail.com, montse\_8\_97@hotmail.com)*

\*\* *CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. de La Laguna Blvd. Revolución y Cuauhtémoc S/N C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México (e-mail:jamesgsjr@hotmail.com)*

\*\*\* *Departamento de Ingeniería, Universidad Iberoamericana, 01219, Ciudad de México, México (e-mail: eduardo.gamaliel@ibero.mx, guillermo.fernandez@ibero.mx)*

---

**Resumen:** Este artículo aborda el problema de formación variante en el tiempo de un sistema multi-agente conformado por dos robots móviles tipo omnidireccional bajo el esquema líder-seguidor utilizando un modelo matemático basado en distancia y ángulo entre agentes. La estrategia de control está basada en el enfoque por Backstepping y se demuestra que la ley de control es robusta ante perturbaciones acotadas, *i.e.* errores en la medición. Además, en el diseño de la ley de control para el seguidor, ésta no necesita la información correspondiente a las velocidades del agente líder. En este sentido, el agente seguidor se mantiene a una distancia y ángulo de formación variante en el tiempo con respecto al líder.

*Palabras clave:* Sistema multi-agente, Backstepping, Control de formación, Líder-seguidor, Robot omnidireccional.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de control de formación requiere que un grupo de agentes converjan a un patrón geométrico deseado. El esquema más básico consiste de dos robots, donde uno de ellos es el líder el cual sigue una trayectoria, mientras que el seguidor debe satisfacer una postura relativa con respecto al líder. Desde un punto de vista descentralizado, la estrategia de control debe depender de mediciones locales de la distancia y ángulo entre los agentes.

En Cao et al. (2013) se diseñan dos algoritmos para que un grupo de vehículos aéreos no tripulados (UAVs por sus siglas en inglés de Unmanned Aerial Vehicles), realicen el seguimiento circular de un objetivo desconocido el cual permanece estático, utilizando medidas de distancia y velocidad. Estos algoritmos tienen la ventaja de funcionar en ambientes donde no se cuenta con GPS. Sin embargo, el modelo dinámico utilizado corresponde al modelo cinemático del robot diferencial, además de considerar una velocidad lineal constante. En el mismo sentido, en Zheng et al. (2013), proponen un control

proporcional a partir del modelo cinemático de robots móviles tipo diferencial para rodear a un objetivo el cual se mantiene estático. En Boccia et al. (2017) los autores proponen utilizar el modelo cinemático de vehículos diferenciales para estudiar y reproducir el comportamiento de pequeños animales de mar. El controlador utilizado es un control proporcional cuyo objetivo es hacer que los agentes seguidores rodeen a un objetivo con velocidad acotada. En Shao and Tian (2017), se aborda el problema de la localización de múltiples objetivos, a partir de un grupo de agentes modelados por un simple integrador. Se considera que cada agente tiene un único objetivo y que cada agente solo conoce el ángulo que se forma entre la línea que hay del objetivo al centro geométrico del agente y el eje horizontal. Con base en lo anterior, se utiliza un estimador para conocer la posición del objetivo así como el centro geométrico de los demás objetivos. Finalmente, cada agente rodea a un objetivo estacionario. Por otra parte, en Milutinovič et al. (2014) proponen un control adaptable para que un vehículo de Dubins, rodee a un objetivo estático. La estrategia de control solo requiere de medidas de la distancia entre el agente y el objetivo. En Hashemi et al. (2014) se diseña un control

PD utilizando el modelo cinemático de un UAV, para que éste rodee un objetivo estático. En Shames et al. (2012) se propone una ley de control continua periódica no lineal para que un agente se mantenga a una distancia deseada con respecto a un objetivo mientras lo rodea. La desventaja de este enfoque es que el control no es robusto ante ruido proveniente de la medición de la distancia. Por otra parte, a pesar de que la velocidad del agente líder es desconocida, ésta tiene que ser muy pequeña. Además, el modelo dinámico utilizado es el simple integrador, por lo que el sistema carece de una definición de orientación. Otra desventaja radica en que cuando el objetivo se empieza a mover, y, existe error en la medición, la distancia entre el agente y el objetivo empieza a oscilar. De manera similar, en Deghat et al. (2014), los autores proponen un estimador para localizar a un objetivo y diseñan un control robusto, ante errores en la medición del ángulo, que permite al agente mantenerse a una distancia y moverse en una trayectoria circular alrededor del objetivo. En este caso se asume que el objetivo se mueve de manera lenta con una velocidad desconocida, y que el agente solo puede medir el ángulo hacia el objetivo. Al igual que en el caso anterior, el modelo dinámico está dado por el simple integrador y, a pesar de ser robusto, existen oscilaciones entre la distancia del agente y el objetivo.

Note que en la mayoría de los trabajos Cao et al. (2013); Zheng et al. (2013); Shao and Tian (2017); Milutinović et al. (2014); Hashemi et al. (2014), el objetivo a seguir se mantiene estático, además de no considerar perturbaciones en el sistema.

Con el fin de resolver estos inconvenientes, este trabajo se enfoca en diseñar una estrategia de control utilizando el enfoque de Backstepping, el cual se demuestra que es robusto ante errores en la medición, considerando el modelo cinemático de distancia y ángulo entre robots móviles del tipo omnidireccional.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 presenta el planteamiento del problema y el modelo matemático basado en distancia y ángulo entre agentes. El diseño de la ley de control y resultados teóricos se presentan en la Sección 3. Las simulaciones numéricas se presentan en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se mencionan las conclusiones y trabajo futuro.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea  $N = \{R_F, R_L\}$  un conjunto de dos robots móviles del tipo omnidireccional, que se mueven en un plano horizontal. El modelo cinemático (ver Fig. 1) para los robots tipo omnidireccional está dado por

$$\dot{\xi}_i = R(\theta_i)\mathbf{u}_i, \quad (1)$$

donde  $R(\theta_i)$  es la matriz de rotación definida por

$$R(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

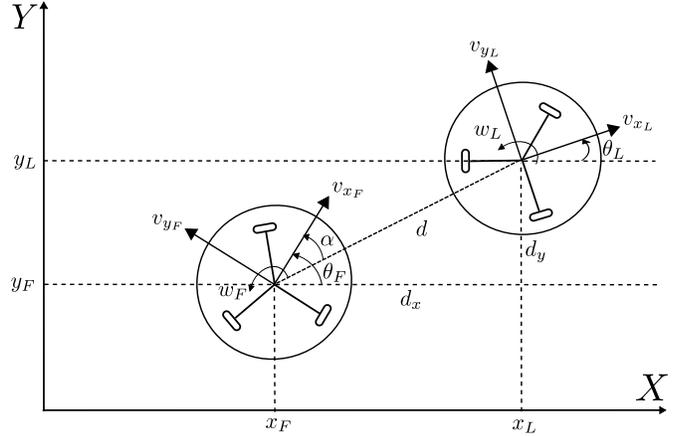


Fig. 1. Esquema líder-seguidor compuesto por dos robots móviles tipo omnidireccional.

con  $i = F, L$  donde  $F$  se refiere al agente seguidor y  $L$  al agente líder,  $\xi_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados con  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  como la posición en el plano del  $i$ -ésimo agente,  $\theta_i \in \mathbb{R}$  es la orientación con respecto al eje horizontal  $X$  y  $\mathbf{u}_i = [v_{x_i} \ v_{y_i} \ w_i]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas de control con  $v_{x_i} \in \mathbb{R}$  como la velocidad longitudinal,  $v_{y_i} \in \mathbb{R}$  es la velocidad lateral y  $w_i \in \mathbb{R}$  es la velocidad angular.

*Comentario 1.* Considere que el agente líder se desplaza libremente sobre el plano, es decir, no existe control sobre él. Sin embargo su velocidad está acotada, *i.e.*  $\max(\sqrt{v_{x_L}^2 + v_{y_L}^2}) \leq a_2$ . Además, se asume que el agente seguidor no conoce la posición y velocidad del agente líder.

El problema de interés consiste en diseñar estrategias de control robustas utilizando el enfoque de Backstepping para que el agente seguidor se mantenga una distancia y ángulo de formación variante en el tiempo con respecto al líder, a pesar de algunas incertidumbres que pueden afectar al sistema, y, considerando que el agente seguidor no recibe información del agente líder, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} (d - d^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha - \alpha^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_L - \theta_F) = 0$ , donde  $d^*$  y  $\alpha^*$  son la distancia y el ángulo de formación deseado, respectivamente, ambos variantes en el tiempo.

De manera general, y, considerando el diagrama de la Fig. 1, el modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre agentes (González-Sierra et al. (2018); Paniagua-Contro et al. (2019)), está dado por

$$\dot{\eta} = f_\eta(\eta)\mathbf{u}_L + g_\eta(\eta)\mathbf{u}_F, \quad (2)$$

donde  $\eta = [d \ \alpha \ \theta_F]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados, mientras que  $\mathbf{u}_L$  y  $\mathbf{u}_F$  son los vectores de entradas de control del agente  $R_L$  y  $R_F$ , respectivamente;  $d \in \mathbb{R}_+$  es la distancia medida desde el centro geométrico del agente  $R_L$  al centro geométrico del agente  $R_F$ , con  $\mathbb{R}_+$  como el conjunto de todos los números reales positivos y  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el ángulo de formación medido a partir del vector de distancia  $d$  al marco local del agente  $R_F$ . Las funciones

$f_\eta$  y  $g_\eta$  están dadas por

$$f_\eta = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_L - \theta_F + \alpha)}{d} & -\frac{\sin(\theta_L - \theta_F + \alpha)}{d} & 0 \\ \frac{\sin(\theta_L - \theta_F + \alpha)}{d} & \frac{\cos(\theta_L - \theta_F + \alpha)}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$g_\eta = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \frac{d}{0} & \frac{d}{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

*Comentario 2.* Note que el modelo matemático considerando los dos agentes, está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\xi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_\eta & f_\eta \\ 0_3 & R(\theta_L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix},$$

donde  $0_3$  es una matriz de ceros de  $3 \times 3$ . Sin embargo, como se mencionó anteriormente, el agente líder se desplaza libremente sobre el plano, y, por lo tanto, no existe un control sobre él.

Para el diseño de la ley de control se considera que  $f_\eta(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_L$  es una perturbación que afecta al sistema (2).

### 3. CONTROL POR BACKSTEPPING

En esta sección se presenta el diseño de la estrategia de control utilizando el enfoque de Backstepping (Khalil (2002)). En primera instancia, debido a que el ángulo de orientación está desacoplado de la dinámica de la distancia y ángulo de formación, se procede a diseñar la ley de control para que el agente seguidor tenga el mismo ángulo de orientación del líder. Posteriormente, se diseña un control para que el agente seguidor se mantenga a una distancia y ángulo de formación deseado con respecto al líder.

#### 3.1 Control del ángulo de orientación

Antes de proceder, se define el error de orientación como

$$e_\theta = \theta_L - \theta_F, \quad \bar{e}_\theta = \int_0^t e_\theta(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Este cambio de coordenadas nos permitirá diseñar el control y realizar el análisis de estabilidad de una manera más sencilla. Note que a partir de (4), el agente seguidor debe de mantener el mismo ángulo de orientación del agente líder. A partir de (3), la dinámica de (4) está dada por

$$\dot{e}_\theta = e_\theta + \delta_{\theta_1}(\bar{e}_\theta, e_\theta), \quad (5a)$$

$$\dot{e}_\theta = w_L - w_F + \delta_{\theta_2}(e_\theta), \quad (5b)$$

donde  $\delta_{\theta_1}$  y  $\delta_{\theta_2}$  son perturbaciones que son atribuidas a errores de medición y las cuales satisfacen las siguientes restricciones

$$|\delta_{\theta_1}| \leq \alpha_{\theta_1} |\bar{e}_\theta|, \quad |\delta_{\theta_2}| \leq \alpha_{\theta_2} |e_\theta|, \quad (6)$$

con  $\alpha_{\theta_1}, \alpha_{\theta_2} > 0$ . Utilizando la técnica de Backstepping, se procede a estabilizar el sistema (5a) a partir de una función  $\phi(\bar{e}_\theta)$ , es decir, el sistema (5a) se reescribe como

$$\dot{\bar{e}}_\theta = \phi(\bar{e}_\theta) + \delta_{\theta_1}. \quad (7)$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_{\theta_1} = \frac{1}{2}\bar{e}_\theta^2$  y, derivándola a lo largo de la trayectoria (7) con  $\phi(\bar{e}_\theta) = -k_{\theta_1}\bar{e}_\theta$  y  $k_{\theta_1}$  un parámetro de diseño que se definirá más adelante, se tiene que  $\dot{V}_{\theta_1} = -k_{\theta_1}\bar{e}_\theta^2 + \bar{e}_\theta\delta_{\theta_1}$ , y, aplicando (6), entonces,  $\dot{V}_{\theta_1}$ , tiene una cota superior dada por  $\dot{V}_{\theta_1} \leq -(k_{\theta_1} - \alpha_{\theta_1})\bar{e}_\theta^2$ , la cual es definida negativa si  $k_{\theta_1} = b_\theta + \alpha_{\theta_1}$  y  $b_\theta > 0$ . Ahora, proponiendo una nueva variable  $z_\theta = e_\theta - \phi(\bar{e}_\theta)$ , el sistema (5) se reescribe como

$$\dot{\bar{e}}_\theta = z_\theta - k_{\theta_1}\bar{e}_\theta + \delta_{\theta_1}, \quad (8a)$$

$$\dot{z}_\theta = w_L - w_F + k_{\theta_1}(z_\theta - k_{\theta_1}\bar{e}_\theta + \delta_{\theta_1}) + \delta_{\theta_2}. \quad (8b)$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_{\theta_2} = V_{\theta_1} + \frac{1}{2}z_\theta^2$ , y, derivándola a lo largo de las trayectorias (8), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\theta_2} &= z_\theta [w_L - w_F + \bar{e}_\theta + \delta_{\theta_2} + k_{\theta_1}(e_\theta + \delta_{\theta_1})] \\ &\quad - k_{\theta_1}\bar{e}_\theta^2 + \bar{e}_\theta\delta_{\theta_1}. \end{aligned}$$

Si la entrada de control se define como

$$w_F = \bar{e}_\theta + k_{\theta_1}e_\theta + k_{\theta_2}z_\theta, \quad (9)$$

con  $k_{\theta_2}$  como un parámetro de diseño que se definirá más adelante, entonces,  $V_{\theta_2}$  se reescribe como

$$\dot{V}_{\theta_2} = -k_{\theta_1}\bar{e}_\theta^2 - k_{\theta_2}z_\theta^2 + z_\theta [w_L + \delta_{\theta_2} + k_{\theta_1}\delta_{\theta_1}] + \bar{e}_\theta\delta_{\theta_1},$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\theta_2} &\leq -(k_{\theta_1} - \alpha_{\theta_1})\bar{e}_\theta^2 - (k_{\theta_2} - \alpha_{\theta_2})z_\theta^2 \\ &\quad + 2|z_\theta| |\bar{e}_\theta| k_{\theta_1}(\alpha_{\theta_1} + \alpha_{\theta_2}) + |z_\theta| |w_L|, \end{aligned}$$

$$\dot{V}_{\theta_2} \leq -[|\bar{e}_\theta| |z_\theta|] Q \begin{bmatrix} |\bar{e}_\theta| \\ |z_\theta| \end{bmatrix} + |z_\theta| |w_L|,$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} k_{\theta_1} - \alpha_{\theta_1} & -k_{\theta_1}(\alpha_{\theta_1} + \alpha_{\theta_2}) \\ -k_{\theta_1}(\alpha_{\theta_1} + \alpha_{\theta_2}) & k_{\theta_2} - \alpha_{\theta_2} \end{bmatrix}.$$

Debido a que  $k_{\theta_1} = b_\theta + \alpha_{\theta_1}$  con  $b_\theta > 0$  y, definiendo a  $k_{\theta_2} > \frac{k_{\theta_1}^2(\alpha_{\theta_1} + \alpha_{\theta_2})^2}{k_{\theta_1} - \alpha_{\theta_1}} + \alpha_{\theta_2}$ , entonces, se garantiza que la matriz  $Q$  es definida positiva. Finalmente,  $\dot{V}_{\theta_2}$  tiene una cota superior dada por

$$\dot{V}_{\theta_2} \leq -\lambda_{\min}\{Q\} (|\bar{e}_\theta|^2 + |z_\theta|^2) + |z_\theta| |w_L|. \quad (10)$$

Estos resultados nos permiten establecer la siguiente Proposición.

*Proposición 1.* Sea el sistema (8) con la ley de control (9) y las restricciones dadas en (6). Considere que la velocidad angular del líder es cero, es decir,  $w_L = 0$ , entonces, los errores de orientación  $\bar{e}_\theta$  y  $e_\theta$  convergen exponencialmente a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$  ante la presencia de perturbaciones.

*Prueba 1.* Es evidente que cuando  $w_L = 0$ , la derivada de la función candidata de Lyapunov dada en (10) es

definida negativa, por lo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} z_\theta = 0$ . Debido a que  $z_\theta = e_\theta + k_{\theta_1} \bar{e}_\theta$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_\theta = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ .

*Proposición 2.* Sea el sistema (8) con la ley de control (9) y sea  $w_L$  una perturbación no desvaneciente la cual está acotada, es decir,  $|w_L| \leq \Delta$ , entonces, el sistema (8) es entrada-estado estable con respecto a  $w_L$ , y, el vector de error de orientación  $\epsilon_\theta = [\bar{e}_\theta \ z_\theta]^\top \in \mathbb{R}^2$ , convergerá de manera exponencial a una región determinada por

$$\|\epsilon_\theta\| \geq \frac{\Delta}{\kappa_\theta \lambda_{\min}\{Q\}}, \quad (11)$$

donde  $\kappa_\theta \in (0, 1)$  es un parámetro de diseño.

*Prueba 2.* La derivada de la función candidata de Lyapunov dada en (10), se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\theta_2} \leq & -(1 - \kappa_\theta) \lambda_{\min}\{Q\} \|\epsilon_\theta\|^2 + \Delta \|\epsilon_\theta\| \\ & - \kappa_\theta \lambda_{\min}\{Q\} \|\epsilon_\theta\|^2, \end{aligned}$$

con  $\kappa_\theta \in (0, 1)$ . Note que  $\dot{V}_{\theta_2}$  será definida negativa si  $\Delta \|\epsilon_\theta\| - \kappa_\theta \lambda_{\min}\{Q\} \|\epsilon_\theta\|^2 \leq 0$ , entonces, es posible definir la siguiente región

$$\|\epsilon_\theta\| \geq \frac{\Delta}{\kappa_\theta \lambda_{\min}\{Q\}},$$

y, por lo tanto, las trayectorias del sistema perturbado (8) convergerán de manera exponencial a la región dada por (11). Finalmente, se concluye que el origen del sistema (8) es globalmente uniformemente ultimamente acotado y es entrada-estado estable con respecto a la perturbación  $w_L$ .

### 3.2 Control de la distancia y ángulo de formación

De manera similar, se define el vector de error de distancia y de error de ángulo de formación como

$$\mathbf{e}_{d\alpha} = [e_d \ e_\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} = [\bar{e}_d \ \bar{e}_\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2, \quad (12)$$

donde  $e_d = d - d^*$ ,  $e_\alpha = \alpha - \alpha^*$ ,  $\bar{e}_d = \int_0^t e_d(\tau) d\tau$ ,  $\bar{e}_\alpha = \int_0^t e_\alpha(\tau) d\tau$ , con  $d^*(t)$  como la distancia deseada y  $\alpha^*(t)$  como el ángulo de formación deseado, ambos variantes en el tiempo. A partir de (3), la dinámica de (12) está dada por

$$\dot{\mathbf{e}}_{d\alpha} = \mathbf{e}_{d\alpha} + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}(\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}, \mathbf{e}_{d\alpha}), \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{d\alpha} = & G(\mathbf{e}_{d\alpha}) \mathbf{v}_F + \mathbf{p}^*(\dot{d}^*, \dot{\alpha}^*, w_F) \\ & + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2}(\mathbf{e}_{d\alpha}, e_\theta, v_{xL}, v_{yL}), \end{aligned} \quad (13b)$$

donde  $\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1} = [\delta_{d_1} \ \delta_{\alpha_1}]^\top \in \mathbb{R}^2$  son perturbaciones atribuidas a errores de medición;  $\mathbf{v}_F = [v_{x_F} \ v_{y_F}]^\top \in \mathbb{R}^2$  es el vector de entradas de control correspondiente a la velocidad lineal y lateral del agente seguidor, respectivamente;  $\mathbf{p}^* = [-\dot{d}^* \ w_F - \dot{\alpha}^*]^\top \in \mathbb{R}^2$  es un vector que contiene la derivada de la distancia y ángulo de formación deseado y la velocidad angular; mientras que la matriz  $G$  está dada por

$$G = \begin{bmatrix} -\cos(e_\alpha + \alpha^*) & \sin(e_\alpha + \alpha^*) \\ \frac{\sin(e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} & \frac{\cos(e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} \end{bmatrix},$$

y  $\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2}$  es un vector que contiene la velocidad lineal y lateral del agente líder, es decir,

$$\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(e_\theta + e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} & -\frac{\sin(e_\theta + e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} \\ -\frac{\sin(e_\theta + e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} & \frac{\cos(e_\theta + e_\alpha + \alpha^*)}{e_d + d^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xL} \\ v_{yL} \end{bmatrix}.$$

*Comentario 3.* Se asume que la información que contiene el vector  $\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2}$  es desconocida, por lo tanto, es una perturbación para el sistema (13). Sin embargo, es posible demostrar que  $\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}$  y  $\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2}$  cumplen con las siguientes cotas superiores

$$\|\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}\| \leq a_1 \|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\|, \quad \|\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2}\| \leq a_2 \|\mathbf{e}_{d\alpha}\|, \quad (14)$$

con  $a_1 > 0$  y  $a_2 \geq \max\left(\sqrt{v_{xL}^2 + v_{yL}^2}\right)$ .

Utilizando la técnica de Backstepping, se procede a estabilizar el sistema (13a) a partir de una función  $\phi(\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha})$ , es decir, el sistema (13a) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{e}}_{d\alpha} = \phi(\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}) + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}. \quad (15)$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_{d\alpha_1} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}$  y, derivándola a lo largo de la trayectoria (15) con  $\phi(\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}) = -K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}$  y  $K_{d\alpha_1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz de diseño que se definirá más adelante, se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_{d\alpha_1} = -\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} + \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1},$$

y, aplicando (14), entonces,  $\dot{V}_{d\alpha_1}$  tiene una cota superior dada por  $\dot{V}_{d\alpha_1} \leq -(\lambda_{\min}\{K_{d\alpha_1}\} - a_1) \|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\|^2$ , la cual es definida negativa, si  $\lambda_{\min}\{K_{d\alpha_1}\} = b_{d\alpha} + a_1$  con  $b_{d\alpha} > 0$ . Ahora, proponiendo una nueva variable  $\mathbf{z}_{d\alpha} = \mathbf{e}_{d\alpha} - \phi(\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha})$ , el sistema (13) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{e}}_{d\alpha} = \mathbf{z}_{d\alpha} - K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}, \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{d\alpha} = & G \mathbf{v}_F + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2} + \mathbf{p}^* \\ & + K_{d\alpha_1} (\mathbf{z}_{d\alpha} - K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}). \end{aligned} \quad (16b)$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_{d\alpha_2} = V_{d\alpha_1} + \frac{1}{2} \mathbf{z}_{d\alpha}^\top \mathbf{z}_{d\alpha}$ , y, derivándola a lo largo de las trayectorias (16), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_{d\alpha_2} = & \mathbf{z}_{d\alpha}^\top [\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} + G \mathbf{v}_F + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2} + \mathbf{p}^* + K_{d\alpha_1} (\mathbf{e}_{d\alpha} + \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1})] \\ & - \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} + \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}. \end{aligned}$$

Si la entrada de control se define como

$$\mathbf{v}_F = G^{-1} [-K_{d\alpha_1} \mathbf{e}_{d\alpha} - \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} - K_{d\alpha_2} \mathbf{z}_{d\alpha} - \mathbf{p}^*], \quad (17)$$

con  $K_{d\alpha_2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz de diseño que se definirá más adelante, entonces,  $V_{d\alpha_2}$  se reescribe como

$$\begin{aligned}\dot{V}_{d\alpha_2} &= -\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top K_{d\alpha_1} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} - \mathbf{z}_{d\alpha}^\top K_{d\alpha_2} \mathbf{z}_{d\alpha} + \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}^\top \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1} \\ &\quad + \mathbf{z}_{d\alpha}^\top [\boldsymbol{\delta}_{d\alpha_2} + K_{d\alpha_1} \boldsymbol{\delta}_{d\alpha_1}], \\ \dot{V}_{d\alpha_2} &\leq -[\lambda_{\min}(K_{d\alpha_1}) - a_1] \|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\|^2 \\ &\quad - [\lambda_{\min}(K_{d\alpha_2}) - a_2] \|\mathbf{z}_{d\alpha}\|^2 \\ &\quad + (a_1 + a_2) \lambda_{\max}(K_{d\alpha_1}) \|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\| \|\mathbf{z}_{d\alpha}\|, \\ \dot{V}_{d\alpha_2} &\leq -[\|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\| \|\mathbf{z}_{d\alpha}\|] Q_{d\alpha} \begin{bmatrix} \|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\| \\ \|\mathbf{z}_{d\alpha}\| \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde

$$Q_{d\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_{d\alpha_1}\} - a_1 & -\lambda_{\max}\{K_{d\alpha_1}\}(a_1 + a_2) \\ -\lambda_{\max}\{K_{d\alpha_1}\}(a_1 + a_2) & \lambda_{\min}\{K_{d\alpha_2}\} - a_2 \end{bmatrix}.$$

Debido a que  $\lambda_{\min}\{K_{d\alpha_1}\} = b_{d\alpha} + a_1$  con  $b_{d\alpha} > 0$  y, definiendo a

$$\lambda_{\min}\{K_{d\alpha_2}\} \geq \frac{[\lambda_{\max}\{K_{d\alpha_1}\}(a_1 + a_2)]^2}{\lambda_{\min}\{K_{d\alpha_1}\} - a_1} + a_2,$$

entonces, se garantiza que la matriz  $Q_{d\alpha}$  es definida positiva, por lo tanto,  $\dot{V}_{d\alpha_2}$  tiene la siguiente cota superior

$$\dot{V}_{d\alpha_2} \leq -\sigma [\|\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}\|^2 + \|\mathbf{z}_{d\alpha}\|^2], \quad (18)$$

con  $\sigma > 0$ . Este último resultado nos permite establecer la siguiente Proposición

*Proposición 3.* Sea el sistema (16) con la ley de control (17), entonces, el agente seguidor se mantendrá a una distancia y ángulo de formación con respecto al agente líder, es decir, los errores  $\bar{\mathbf{e}}_{d\alpha}$  y  $\mathbf{e}_{d\alpha}$  convergen exponencialmente a cero, *i.e.*,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{d\alpha} = 0$ .

*Prueba 3.* Es evidente que la derivada de la función candidata de Lyapunov dada en (18) es definida negativa y por lo tanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_{d\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{d\alpha} = 0$ .

*Comentario 4.* Note que el determinante de la matriz  $G$  está dado por  $\det(G) = -\frac{1}{e_d + d^*}$ , por lo tanto, la ley de control dada en (17) está definida para todo  $d^* \neq 0$ .

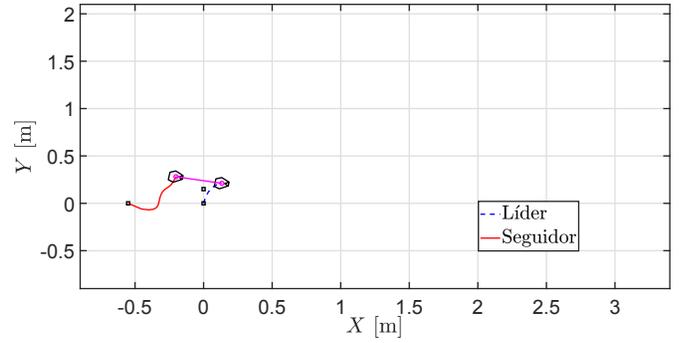
#### 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se considera que el agente líder se mueve de tal manera que cumple con las siguientes ecuaciones

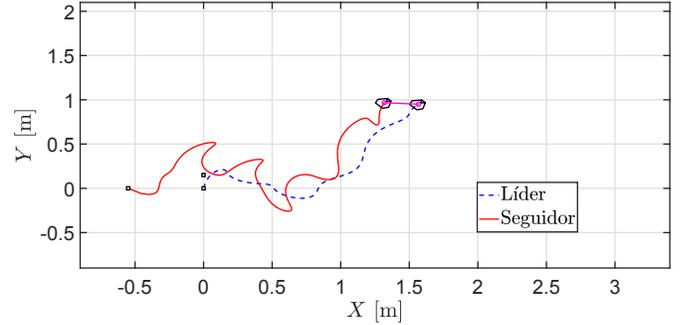
$$\begin{bmatrix} v_{xL} \\ v_{yL} \\ w_L \end{bmatrix} = R^{-1}(\theta_L) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix}$$

donde  $\dot{x}_d = 0.1 + 0.035 \left(\frac{3}{5}\pi\right) \cos\left(\frac{3}{5}\pi t\right)$ ,  $\dot{y}_d = 0.05 - 0.3 \left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) + 0.035 \left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$  y  $\dot{\theta}_d = \frac{\dot{y}_d \dot{x}_d - \dot{x}_d \dot{y}_d}{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}$ .

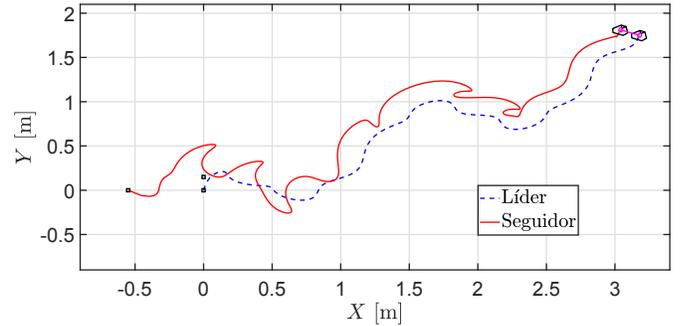
Por otra parte, el agente seguidor debe mantener una distancia y un ángulo de formación deseados, los cuales están dados por  $d^* = 0.35 - 0.00625t$  y  $\alpha^* = 0.03125 \left(\frac{\pi}{2}t\right)$ , respectivamente. La Fig. 2 ilustra el comportamiento en el plano de los dos agentes en diferentes instantes de tiempo. Note que el agente seguidor tiene la misma orientación que el líder, y, debido a que la distancia y ángulo de formación son variantes en el tiempo, el agente seguidor se acerca al líder con diferente ángulo.



(a)  $t = 2$  segundos.



(b)  $t = 16$  segundos.



(c)  $t = 32$  segundos

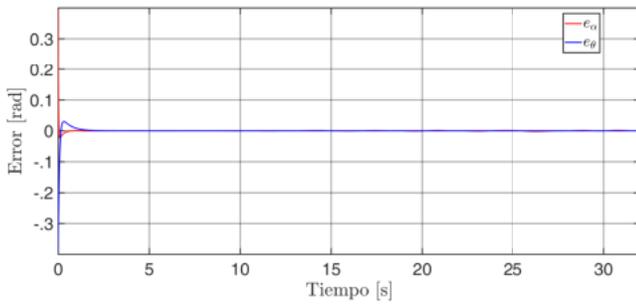
Fig. 2. Trayectoria en el plano de los agentes en diferentes instantes de tiempo.

La Fig. 3 muestra el error de orientación  $e_\theta$ , el error de distancia  $e_d$  y el error de ángulo de formación  $e_\alpha$ , los cuales convergen a cero, permitiendo al agente seguidor mantenerse a una distancia y ángulo de formación variantes en el tiempo con respecto al líder.

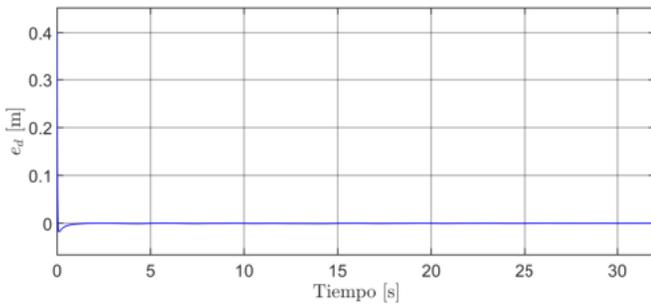
Finalmente, la Fig. 4 presenta las entradas de control para que el agente seguidor se mantenga a una distancia y ángulo de formación con respecto al líder.

#### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se utilizó el enfoque por Backstepping para diseñar una estrategia de control que permite que un agente seguidor (robot tipo omnidireccional) se forme a una distancia y ángulo de formación variante en el tiempo con respecto a otro agente líder (también del tipo omni-

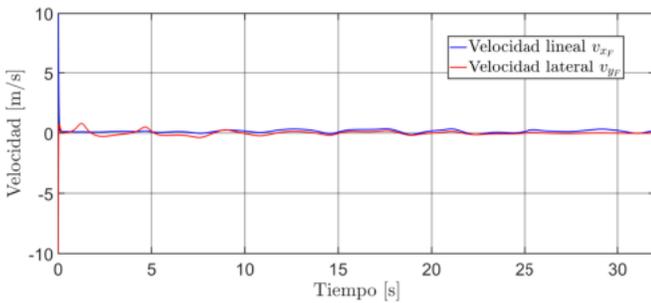


(a) Error de orientación entre los agentes  $e_\theta$  y  $e_\alpha$ .

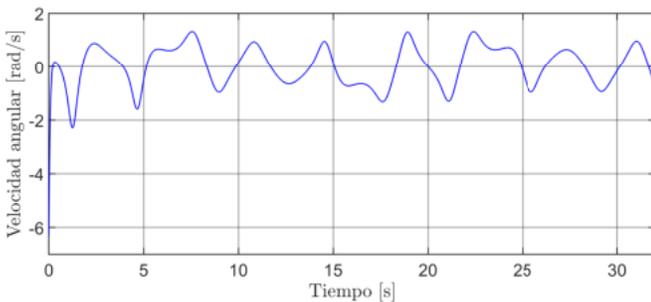


(b) Error de distancia entre los agentes  $e_d$ .

Fig. 3. Error de orientación, de distancia y de ángulo de formación.



(a) Velocidad lineal y lateral del agente seguidor.



(b) Velocidad angular del agente seguidor.

Fig. 4. Entradas de control para el agente seguidor.

directional). A pesar de que el agente líder se desplaza en el plano de manera libre, se demuestra que el agente seguidor es capaz de mantener su distancia y ángulo de formación aún en la presencia de perturbaciones, *i.e.* errores en la medición. Además, se demostró que, si la

velocidad angular del líder  $w_L$  está acotada, entonces, el error de orientación converge de manera exponencial a una región determinada por la cota superior de  $w_L$ . Las simulaciones numéricas ilustran el desempeño de la estrategia de control propuesta. Como trabajo futuro, está el de extender este trabajo considerando diferentes tipos de robots móviles así como el diseño de controladores utilizando diferentes enfoques.

## REFERENCIAS

- Boccia, A., Adaldo, A., Dimarogonas, D.V., di Bernardo, M., and Johansson, K.H. (2017). Tracking a mobile target by multi-robot circumnavigation using bearing measurements. *Proceedings of the 56th Annual Conference on Decision and Control*.
- Cao, Y., Muse, J., Casbeer, D., and Kingston, D. (2013). Circumnavigation of an unknown target using uavs with range and range rate measurements. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*.
- Deghat, M., Shames, I., Anderson, B.D.O., and Yu, C. (2014). Localization and circumnavigation of a slowly moving target using bearing measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(8), 2182–2188.
- González-Sierra, J., Hernández-Martínez, E.G., Ferreira-Vazquez, E., Flores-Godoy, J., Fernandez-Anaya, G., and Paniagua-Contro, P. (2018). Leader-follower control strategy with rigid body behavior. *IFAC PapersOnLine*, 51(22), 184–189.
- Hashemi, A., Cao, Y., Casbeer, D., and Yin, G. (2014). Uav circumnavigation of an unknown target without location information using noisy range-based measurements. *Proceedings of the American Control Conference*.
- Khalil, H. (2002). Nonlinear systems. *Prentice Hall*.
- Milutinović, D., Casbeer, D., Cao, Y., and Kingston, D. (2014). Coordinate frame free dubins vehicle circumnavigation. *Proceedings of the American Control Conference*.
- Paniagua-Contro, P., Hernández-Martínez, E.G., González-Medina, O., González-Sierra, J., Ferreira-Vazquez, E., Flores-Godoy, J., and Fernandez-Anaya, G. (2019). Extension of leader-follower behaviours for wheeled mobile robots in multi-robot coordination. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2019, 1–16, <https://doi.org/10.1155/2019/4957259>.
- Shames, I., Dasgupta, S., Fidan, B., and Anderson, B.D.O. (2012). Circumnavigation using distance measurements under slow drift. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 889–903.
- Shao, J. and Tian, Y. (2017). Multi-target localization and circumnavigation control by a group of moving agents. *Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Control and Automation*.
- Zheng, R., Lin, Z., Fu, M., and Sun, D. (2013). Distributed circumnavigation by unicycles with cyclic repelling strategies. *Proceedings of the 9th Asian Control Conference*.