

Formación autónoma bio-inspirada para robots diferenciales^{*}

J.A. Juárez-Lora^{*} A. Rodríguez-Angeles^{*}

^{*} Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Col. San Pedro Zacatenco, CDMX 07360 México
(e-mail: alejandro.lora@cinvestav.mx*, aangeles@cinvestav.mx).

Resumen: En este trabajo se propone un controlador de formación circular autónoma y descentralizada para vehículos a partir de algunos comportamientos vistos en la naturaleza. El sistema de control está basado en un modelo que integra fuerzas de evasión de obstáculos dinámicos, fuerzas de formación entre agentes y aceleraciones respecto a una trayectoria de referencia. Usando el método de Lyapunov se demuestra la estabilidad de lazo cerrado entre el control de navegación y el modelo cinemático del robot, para el caso libre de colisiones. Se muestran también resultados en simulación para respaldar las conclusiones de estabilidad y convergencia para este controlador.

Palabras clave: Control de navegación, Robot móvil autónomo, Control Bio-inspirado. Formaciones

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de brindar autonomía a sistemas multiagente compuesto por varios vehículos es altamente perseguido por la comunidad científica. El posicionamiento del robot a partir de un marco de referencia, navegación en entornos desconocidos y la introducción de múltiples robots en el mismo espacio de trabajo, hacen que el problema sea complicado de atender.

Algunas especies en la naturaleza han desarrollado maneras efectivas de lograr objetivos de evasión, de seguimiento y de formaciones. Se tienen ejemplos como las parvas de peces, que logran compactar a la mayor cantidad de ejemplares en un espacio reducido, o como algunas especies de aves, que logran formaciones más específicas en torno a un líder.

En Cucker y Smale [2007], por ejemplo, se ilustra un modelo basado en estos comportamientos y ha sido estudiado en áreas biológicas, ecológicas, robótica y teoría del control. En investigaciones como Li et al. [2016] y Park et al. [2018], se proponen modificaciones a este modelo con el propósito de que los individuos logren formaciones geométricas respecto a la ubicación de los demás.

Otra aproximación es descrita en Helbing et al. [2000, 2005], el cual ilustra el modelo de desplazamiento presente en multitudes humanas, donde, si se desea llegar a un punto deseado, cada persona se mueve en la trayectoria más corta a una velocidad cómoda. Al presentarse un

obstáculo, las acciones de evasión se presentan cuando este rebasa su zona de confort.

Se pretende entonces tomar dichos modelos y adaptarlos en una propuesta de control que de manera individual, permita navegación autónoma cumpliendo un seguimiento de una trayectoria deseada (una posición en un tiempo definido), la evasión de colisiones y pueda lograr una formación de patrón circular.

En la sección 2 de este artículo se desarrolla la propuesta de control. La sección 3 muestra el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado, para el caso libre de colisiones. En la sección 4 se describen algunas consideraciones de implementación. En la sección 5 se muestran resultados obtenidos en plataformas de simulación. Por último se entregan las conclusiones de este trabajo.

2. DISEÑO DEL CONTROL DE NAVEGACIÓN AUTÓNOMA

Se muestra a continuación la interacción detallada entre los lazos de control externo e interno con el robot diferencial. Se describe el *control externo* bio-inspirado que produce valores de aceleración en la dirección en $[x, y]$, cuyas integraciones pueden ser usadas por el *control interno* para obtener la velocidad lineal y angular V_i y W_i , que sirven como entradas de control al robot. Esto puede verse en la Fig. 2.

2.1 Modelo cinemático del robot diferencial

Un robot móvil tipo (2,0) presenta el modelo cinemático dado en (1), donde $[x_i, y_i]$ son las coordenadas dado

^{*} Trabajo parcialmente auspiciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT-México, por el proyecto 254329.

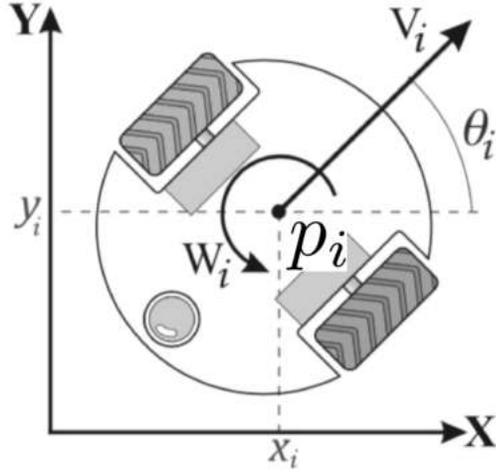


Figura 1. Robot móvil tipo (2,0)

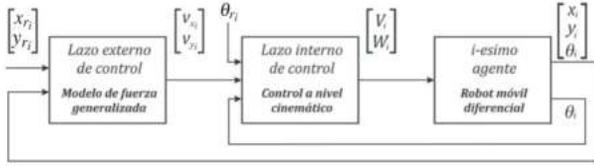


Figura 2. Esquema de control implementado

el centro de rotación del robot respecto a un marco de referencia inercial, y representa su orientación. El índice i identifica al i -ésimo robot dentro de un sistema multi-agente de N robots móviles.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= V_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i &= V_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= W_i \end{aligned} \quad (1)$$

Para dicho modelo, las entradas de control son la velocidad traslacional V_i y la rotacional W_i . Véase Fig. 1.

2.2 Lazo de control externo

Este bloque se encarga de procesar el algoritmo bio-inspirado cuya salida son componentes de aceleración $[\dot{v}_{x_i}, \dot{v}_{y_i}]$ y velocidad $[v_{x_i}, v_{y_i}]$.

El modelo consiste en una serie de modificaciones al trabajo de Helbing et al. [2000, 2005] el cual asume que el comportamiento de un individuo de masa m_i con velocidad $v_i = [v_{x_i}, v_{y_i}]$ está dado por un conjunto de reglas socio-psicológicas y físicas. El individuo cuya posición $p_i = [x_i, y_i]$ se desplaza hacia una posición de referencia individual $p_{r_i} = [x_{r_i}, y_{r_i}]$. La velocidad deseada del individuo v_i^0 es alcanzada en un tiempo característico τ_i , en dirección dada por el vector del error de posición $e_i^0 = [x_{r_i} - x_i, y_{r_i} - y_i]$. A su vez, intenta evadir obstáculos y a otros individuos que invaden su zona de confort de radio r_i . Las fuerzas de evasión para obstáculos dinámicos

y estáticos se denotan con f_{ij} y f_{iw} respectivamente. El modelo se representa como:

$$m_i \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} \\ \dot{v}_{y_i} \end{bmatrix} = \frac{m_i}{\tau_i} (v_i^0 e_i - v_i) + \sum f_{ij} + \sum f_{iw} \quad (2)$$

f_{ij} y f_{iw} están modelados como:

$$f_{ij} = k_i g(r_{ij} - d_{ij}) n_{ij} - \kappa_i g(r_{ij} - d_{ij}) \Delta v_{ji}^t t_{ij} \quad (3)$$

$$f_{iw} = k_i g(r_i - d_{iw}) n_{ij} - \kappa_i g(r_i - d_{iw}) (v_i \cdot t_{iw}) t_{iw} \quad (4)$$

El cual está compuesto de términos como la distancia entre los centros de masa del agente i y j , $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$, el vector de dirección normalizado $n_{ij} = (n_{ij_x}, n_{ij_y}) = (p_i - p_j)/d_{ij}$ que apunta desde el agente j hacia el agente i , el vector tangencial $t_{ij} = (-n_{ij_y}, n_{ij_x})$, el término g que determina si la zona de confort del agente i interactúa con otro agente. Es decir $g = 1$ ssi $r_{ij} > d_{ij}$ (donde $r_{ij} = r_i + r_j$) y $g = 0$ en el caso contrario. Se tiene también la diferencia de velocidades tangenciales $\Delta v_{ji}^t = (v_j - v_i) \cdot t_{ij}$. La magnitud de las constantes positivas k y κ determina la influencia de los componentes normal y tangencial, lo cual permite modular la respuesta de aceleración, desaceleración e intensidad de giro para evitar colisiones. El término de repulsión contra obstáculos estáticos f_{iw} surge de hacer $v_j = 0$ en (3).

A partir del modelo anterior, considerando que la masa m_i es puntual, que cualquier obstáculo puede ser tratado con la misma función de evasión tomando en cuenta solo su velocidad relativa, y en base a los objetivos de control se obtiene el siguiente control propuesto:

$$\dot{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} \\ \dot{v}_{y_i} \end{bmatrix} = k_p e_i + k_d \dot{e}_i + \sum f_{ij} + f_{ic} \quad (5)$$

Donde, para lograr seguimiento de trayectoria de referencia se incorpora un controlador PD con constantes de sintonización k_p , k_d y el error de posición dado por:

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{x_i} \\ e_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r_i} - x_i \\ y_{r_i} - y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para lograr establecer una formación circular de los agentes, se propone a partir del trabajo de Park et al. [2018] la función f_{ic} dada por:

$$\begin{aligned} f_{ic} &= \gamma \left(1 - \frac{R}{\|d_{ic}\|} \right) d_{ic} \\ &= \gamma \left(1 - \frac{R}{\sqrt{(\bar{x} - x_i)^2 + (\bar{y} - y_i)^2}} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} - x_i \\ \bar{y} - y_i \end{bmatrix}, \quad N > 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Donde $d_{ic} = [d_{ic_x}, d_{ic_y}]^T$ es el vector que denota la distancia de cada agente al centro geométrico, γ una constante positiva de sintonización y N el número de

agentes en el sistema. Dicha función pretende formar con los agentes un círculo de radio R respecto al centro geométrico (\bar{x}, \bar{y}) del sistema, el cual es el promedio de las posiciones de todos los agentes, es decir:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (8)$$

Al evaluar el control propuesto en (5) e integrando dicha salida, se obtienen los valores $(\dot{v}_{x_i}, \dot{v}_{y_i}, v_{x_i}, v_{y_i})$ los cuales son entrada para el lazo de control interno.

2.3 Lazo de control interno

Este bloque convierte las velocidades y aceleraciones obtenidas por el lazo de control externo en la velocidad lineal V_i y angular W_i necesarias para operar el vehículo. Para obtener las velocidades lineal y angular se considera el trabajo en Carlos Canudas de Wit [1997], Chávez y Ángeles [2017], teniendo las relaciones dadas por (9) y (10):

$$V_i = k_v [v_{x_i} \cos(\theta_i) + v_{y_i} \sin(\theta_i)] \quad (9)$$

$$W_i = k_a \left[\frac{\dot{v}_{y_i} v_{x_i} - \dot{v}_{x_i} v_{y_i}}{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + \epsilon} (\text{sen}_c(e_{\theta_i})) - k_t e_{\theta_i} \right] \quad (10)$$

Donde k_v, k_a, k_t son ganancias que modulan la intensidad de la señal de control V_i y W_i . La constante $\epsilon \approx 0$ se añade con la finalidad de evitar la aparición de singularidades cuando v_{x_i}, v_{y_i} sean simultáneamente cero. Ya que se pretende lograr una orientación deseada, se añade un control proporcional con $e_{\theta_i} = [\theta_i - \theta_{r_i}]$ como el error de orientación respecto al ángulo de referencia θ_{r_i} . Se considera $\text{sen}_c(\cdot)$ como la función seno cardinal, definida en (11) por:

$$\text{sen}_c(e_{\theta_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_{\theta_i} = 0 \\ \frac{\text{sen}(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} & \text{si } e_{\theta_i} \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA EL CASO LIBRE DE COLISIONES

Se realiza el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov con un ambiente libre de colisiones, es decir, con f_{ij} igual a cero. Teniendo en cuenta los estados de interés del agente i $(x_i, y_i, v_{x_i}, v_{y_i}, \theta_i)$ y sus correspondientes valores de referencia $(x_{r_i}, y_{r_i}, v_{x_{r_i}}, v_{y_{r_i}}, \theta_{r_i})$, se consideran los siguientes errores en el espacio de estados:

$$\begin{aligned} z_{1_i} &= e_{x_i} = x_{r_i} - x_i & z_{2_i} &= e_{y_i} = y_{r_i} - y_i \\ z_{3_i} &= e_{v_{x_i}} = v_{x_{r_i}} - v_{x_i} & z_{4_i} &= e_{v_{y_i}} = v_{y_{r_i}} - v_{y_i} \\ z_{5_i} &= e_{\theta_i} = \theta_i - \theta_{r_i} \end{aligned} \quad (12)$$

Se obtiene la dinámica del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1_i} &= v_{x_{r_i}} \text{sen}^2 \theta_i + (z_{4_i} - v_{y_{r_i}}) \text{sen} \theta_i \cos \theta_i + z_{3_i} \cos^2 \theta_i \\ \dot{z}_{2_i} &= v_{y_{r_i}} \cos^2 \theta_i + (z_{3_i} - v_{x_{r_i}}) \text{sen} \theta_i \cos \theta_i + z_{4_i} \text{sen}^2 \theta_i \\ \dot{z}_{3_i} &= \dot{v}_{x_{r_i}} - k_p z_{1_i} - k_d z_{3_i} - \gamma \beta_{i_x} \\ \dot{z}_{4_i} &= \dot{v}_{y_{r_i}} - k_p z_{2_i} - k_d z_{4_i} - \gamma \beta_{i_y} \\ \dot{z}_{5_i} &= -\dot{\theta}_{r_i} - k_a k_t z_{5_i} \\ k_a &\left[\frac{(\dot{v}_{y_{r_i}} - \dot{z}_{4_i})(v_{x_{r_i}} - z_{3_i}) - (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})(\dot{v}_{x_{r_i}} - \dot{z}_{3_i})}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \left(\frac{\text{sen}(z_{5_i})}{z_{5_i}} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Siendo $\dot{\theta}_{r_i} = W_{r_i}$ la velocidad angular de referencia y:

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i_x} \\ \beta_{i_y} \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{R}{\sqrt{(\bar{x} - x_{r_i} + z_{1_i})^2 + (\bar{y} - y_{r_i} + z_{2_i})^2}} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} - x_{r_i} + z_{1_i} \\ \bar{y} - y_{r_i} + z_{2_i} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considerando la función candidata de Lyapunov:

$$V_i(z_i) = \frac{1}{2} z_i^T z_i \geq 0 \quad (15)$$

Se tiene que su derivada temporal evaluada en el sistema en lazo cerrado resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(z_i) &= [\cos^2 \theta_i - k_p] z_{1_i} z_{3_i} + [\text{sen}^2 \theta_i - k_p] z_{2_i} z_{4_i} \\ &+ \left[\text{sen} \theta_i \cos \theta_i + \frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{1_i} z_{4_i} \\ &+ \left[\text{sen} \theta_i \cos \theta_i - \frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{2_i} z_{3_i} \\ &- \left[\text{sen} \theta_i \cos \theta_i + \frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{1_i} v_{y_{r_i}} \\ &- \left[\text{sen} \theta_i \cos \theta_i + \frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{1_i} v_{x_{r_i}} \\ &+ \left[z_{1_i} \text{sen} \theta_i + \gamma \beta_{i_y} \left(\frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right] v_{x_{r_i}} \\ &+ \left[z_{2_i} \cos \theta_i - \gamma \beta_{i_x} \left(\frac{k_a k_p \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right] v_{y_{r_i}} \\ &- k_d [z_{3_i}^2 + z_{4_i}^2] - k_a k_t z_{5_i}^2 - z_{5_i} W_{r_i} \end{aligned} \quad (16)$$

Para acotar los términos cruzados resultantes usamos las propiedades del binomio cuadrado $(a^2 + b^2) \geq 0$ y $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq -ab$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(z_i) &\leq \\ &\frac{1}{2} \left[k_p \left(1 - \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right. \\ &\left. - (\cos^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i) \right] z_{1_i}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 + \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right. \\
& \left. - (\text{sen}^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i) \right] z_{2_i}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 + \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right. \\
& \left. - (\cos^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i) \right] z_{3_i}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 - \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right) \right. \\
& \left. - (\text{sen}^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i) \right] z_{4_i}^2 \\
& + \left[v_{x_{r_i}} \text{sen}^2 \theta_i - (\text{sen} \theta_i \cos \theta_i \right. \\
& \left. + k_p \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} v_{y_{r_i}} \right] z_{1_i} \\
& + \left[v_{y_{r_i}} \cos^2 \theta_i - (\text{sen} \theta_i \cos \theta_i \right. \\
& \left. + k_p \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} v_{x_{r_i}} \right] z_{2_i} \\
& + \left[\dot{v}_{x_{r_i}} - \gamma \beta_{i_x} - (\gamma \beta_{i_y} + k_d v_{y_{r_i}}) \cdot \right. \\
& \left. \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{3_i} \\
& + \left[\dot{v}_{y_{r_i}} - \gamma \beta_{i_y} + (\gamma \beta_{i_x} + k_d v_{x_{r_i}}) \cdot \right. \\
& \left. \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right] z_{4_i} \\
& + \frac{k_a \text{sen} z_{5_i}}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} [\gamma \beta_{i_y} v_{x_{r_i}} - \gamma \beta_{i_x} v_{y_{r_i}}] \\
& - k_a k_t z_{5_i}^2 - z_{5_i} W_{r_i}
\end{aligned} \tag{18}$$

Derivando las funciones trigonométricas presentes en (17), y evaluándolas con los posibles valores que puede tomar θ_i , es decir $(-\pi < \theta_i < \pi)$, se obtienen sus cotas dadas por:

$$\begin{aligned}
-0,2 & \leq \cos^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i \leq 1,2 \\
-0,2 & \leq \text{sen}^2 \theta_i + \text{sen} \theta_i \cos \theta_i \leq 1,2 \\
-\frac{1}{2} & \leq \text{sen} \theta_i \cos \theta_i \leq \frac{1}{2} \\
0 & \leq \cos^2 \theta_i \leq 1 \\
0 & \leq \text{sen}^2 \theta_i \leq 1
\end{aligned} \tag{19}$$

Debido a que para las ruedas del vehículo, sin importar su sentido de giro, su velocidad es una magnitud acotada positiva, se tiene entonces que los términos de referencia $v_{x_{r_i}}, v_{y_{r_i}}, \dot{v}_{x_{r_i}}$ en (17) se ven acotados por una velocidad $v_{x_{i_{max}}}, v_{y_{i_{max}}}$ y aceleración $\dot{v}_{x_{i_{max}}}, \dot{v}_{y_{i_{max}}}$ máximas, las cuales a su vez se traducen en una velocidad lineal $V_{i_{max}}$ y angular $W_{i_{max}}$ máximas. En el evento de que el agente presente un pico de aceleración máxima, la velocidad seguirá incrementando hasta que se vea saturada.

Considerando los peores escenarios que pueden ocurrir en la navegación, es decir:

- $|v_{x_{r_i}}| < v_{x_{i_{max}}}, |v_{y_{r_i}}| < v_{y_{i_{max}}}$
- $|\dot{v}_{x_{r_i}}| \leq \dot{v}_{x_{i_{max}}}, |\dot{v}_{y_{r_i}}| \leq \dot{v}_{y_{i_{max}}}$
- $|\text{sen}(z_{5_i})| = 1$

- $\cos^2(\theta_i) + \text{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i), \text{sen}^2(\theta_i) + \text{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i) = -0,2$
- $\cos^2(\theta_i) = \text{sen}^2(\theta_i) = 1$
- $\text{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i) = -1/2$

Y en el caso de que las velocidades de referencia sean iguales al error de velocidad, es decir:

$$\left| \frac{k_a}{(v_{x_{r_i}} - z_{3_i})^2 + (v_{y_{r_i}} - z_{4_i})^2 + \epsilon} \right| \leq \frac{k_a}{\epsilon} \tag{20}$$

Después de sustituir en (17), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 - \frac{k_a}{\epsilon} \right) + 0,2 \right] z_{1_i}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 + \frac{k_a}{\epsilon} \right) + 0,2 \right] z_{2_i}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 + \frac{k_a}{\epsilon} \right) + 0,2 \right] z_{3_i}^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[k_p \left(1 - \frac{k_a}{\epsilon} \right) + 0,2 \right] z_{4_i}^2 \\
& + \left[v_{x_{i_{max}}} + \left(\frac{1}{2} - k_p \frac{k_a}{\epsilon} \right) v_{y_{i_{max}}} \right] z_{1_i} \\
& + \left[v_{y_{i_{max}}} + \left(\frac{1}{2} - k_p \frac{k_a}{\epsilon} \right) v_{x_{i_{max}}} \right] z_{2_i} \\
& + \left[\dot{v}_{x_{i_{max}}} - \gamma \beta_{i_x} - (\gamma \beta_{i_y} + k_d v_{y_{i_{max}}}) \frac{k_a}{\epsilon} \right] z_{3_i} \\
& + \left[\dot{v}_{y_{i_{max}}} - \gamma \beta_{i_y} + (\gamma \beta_{i_x} + k_d v_{x_{i_{max}}}) \frac{k_a}{\epsilon} \right] z_{4_i} \\
& + \frac{k_a}{\epsilon} [\gamma \beta_{i_y} v_{x_{i_{max}}} - \gamma \beta_{i_x} v_{y_{i_{max}}}] \\
& - k_d [z_{3_i}^2 + z_{4_i}^2] - k_a k_t z_{5_i}^2 - z_{5_i} W_{i_{max}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Revisando (14), se puede ver que existen 3 casos para la función de formación:

- A) El agente i se encuentra situado en la circunferencia de radio R , es decir $\|d_{ic}\| = R$
- B) El agente i se encuentra fuera del círculo de radio R , es decir $\|d_{ic}\| > R$.
- C) El agente i se encuentra dentro del círculo de radio R , es decir $\|d_{ic}\| < R$.

De los tres casos, el caso más favorable es $\|d_{ic}\| = R$ ya que alcanzar la formación conlleva a que $\|\beta_i\| = 0$. El caso más desfavorable sería $\|d_{ic}\| > R$, ya que vuelve algunos términos de (21) definidos positivos. Considerando esto, se puede llegar al siguiente listado de condiciones que hacen a $\dot{V}_i(z_i) < 0$:

1. $k_p > 0, k_d > 0, k_a > 0, k_t > 0, \epsilon > 0, \gamma > 0$
2. $k_p > \frac{0,2}{(1 - \frac{k_a}{\epsilon})}$
3. $k_p > \frac{\epsilon}{k_a} \left(\frac{v_{x_{i_{max}}}}{v_{y_{i_{max}}}} + \frac{1}{2} \right)$
4. $k_d > \frac{\dot{v}_{x_{i_{max}}}}{v_{y_{i_{max}}}} \frac{\epsilon}{k_a}$,
5. $\gamma > \frac{k_a}{\epsilon} \frac{k_d v_{y_{i_{max}}} - \dot{v}_{x_{i_{max}}}}{1 + \frac{k_a}{\epsilon}}, \gamma < \frac{\dot{v}_{y_{i_{max}}} + \frac{k_a}{\epsilon} k_d v_{x_{i_{max}}}}{1 + \frac{k_a}{\epsilon}}$

(22)

Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable sólo cuando $\|\beta_i\| = 0$, es decir cuando el agente logró la formación circular, ya que

$V_i(0) = 0$, $V_i(z_i) > 0$, $\dot{V}_i(0) = 0$ y $\dot{V}_i(z_i) < 0$, sin embargo, cuando $\|\beta_i\| \neq 0$, existen términos no desvanescentes, lo que hace que $\dot{V}_i(0) \neq 0$ y solo se logre estabilidad práctica.

El análisis de estabilidad considerando obstáculos dinámicos implica fuerzas de reacción distintas para cada posible situación, por lo cual, no es desarrollado. Se procede entonces a sintonizar k y κ en la expresión (3) asegurando que las fuerzas repulsivas sean suficientes para producir giros rápidos y evitar colisiones, manteniendo la estabilidad del sistema.

4. CONSIDERACIONES DE IMPLEMENTACIÓN

El controlador de alto nivel necesita los valores de referencia $x_{r_i}(t)$, $y_{r_i}(t)$, y sus derivadas con respecto al tiempo. Dichas funciones se evalúan de acuerdo a la duración d de la trayectoria, y la tasa de cambio temporal k_s de la trayectoria. De dichas evaluaciones y del cómputo de las derivadas, a partir de las expresiones en (23), (24), (25) se obtienen ángulo, velocidad lineal y velocidad angular de referencia.

$$\theta_{r_i} = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_r}{\dot{y}_r} \right) \quad (23)$$

$$V_{r_i} = \sqrt{\dot{x}_{r_i}^2 + \dot{y}_{r_i}^2} \quad (24)$$

$$W_{r_i} = \frac{\dot{x}_{r_i} \ddot{y}_{r_i} - \dot{y}_{r_i} \ddot{x}_{r_i}}{v_{r_i}^2 + \epsilon} \quad (25)$$

Si bien el controlador propuesto en (5) entrega una formación circular equidistante al centro geométrico, no garantiza la repartición equitativa de los agentes en la circunferencia. Para esto, y para que cada agente tenga una trayectoria propia, se agregan los siguientes términos:

$$\begin{aligned} x_{r_i}(t) + R \cos \left(\frac{(i)(360)}{N} \right) \\ y_{r_i}(t) + R \sin \left(\frac{(i)(360)}{N} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Los términos añadidos están definidos por la formación circular de radio R y donde i es el número del agente en el sistema, véase Fig. 3.

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Para la sintonización de nuestro controlador y con la finalidad de cumplir las condiciones impuestas en (22), consideramos las velocidades y aceleraciones máximas del Turtlebot3 Burger que son $V_{max} = 0,22m/s$ y $W_{max} = 2,84rad/s$. Las ganancias de control empleadas en el lazo de control de todos los agentes se muestran en la tabla 1.

Para nuestras pruebas usaremos 3 agentes ($N = 3$) de tal manera que el centroide de la formación circular describa una lemniscata, dada por las siguientes ecuaciones:

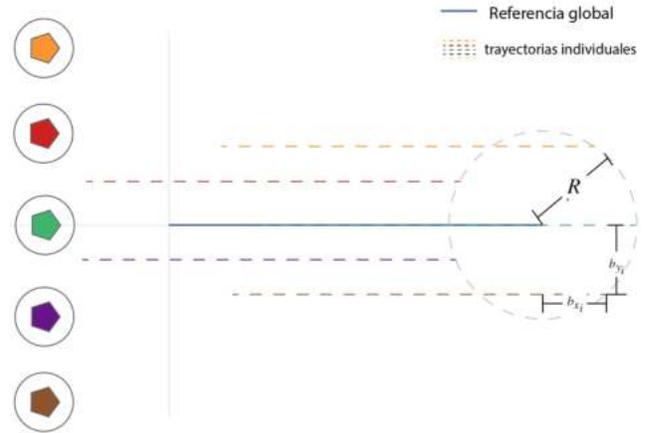


Figura 3. Esquema de trayectorias individuales

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a \cos(k_s t) + R \cos \left(\frac{(i)(360)}{N} \right) \\ y_i(t) &= b \sin(2k_s t) + R \sin \left(\frac{(i)(360)}{N} \right) \\ \dot{x}_i(t) &= -a \cdot k_s \cdot \sin(k_s t) \\ \dot{y}_i(t) &= 2b \cdot k_s \cdot \cos(2k_s t) \\ \ddot{x}_i(t) &= -a \cdot k_s^2 \cdot \cos(k_s t) \\ \ddot{y}_i(t) &= -4bk_s^2 \cdot \sin(k_s t) \end{aligned} \quad (27)$$

Con el radio de formación $R = 0,5m$, coeficiente de velocidad $k_s = 0,1m/s$. Los parámetros de la ecuación lemniscata son $a = 1m$, $b = 0,5m$ y una duración $d = 150s$. La posición inicial de los agentes está dado por $x_i = 0,5$, $y_i = [-0,5, 0, 0, 0, 5]$, $\theta_i = 0$ y un radio de confort $r_i = 0,3m$

Nota: Los sobresaltos en las gráficas del error de orientación se deben al cambio de magnitud de la ecuación (23) de $+\pi$ a $-\pi$. Lo que provoca que por un instante, el error de orientación sea de casi 6rad. Durante estos picos, se suministra el valor calculado durante el tiempo de ejecución anterior. En la siguiente ejecución, el error vuelve a la normalidad. (Fig. 5). De no hacer esto, el agente dará la media vuelta en dichos instantes.

6. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede concluir que el control propuesto basado en comportamiento bioinspirado junto con sus modificaciones permite seguimiento de trayectoria, evasión de colisiones y creación de formaciones circulares. Se puede visualizar que el centro geométrico sigue la trayectoria deseada para la formación, además de un desempeño aceptable para el control de posición para cada agente.

Cuadro 1. Ganancias empleadas en el lazo de control

k_p	k_d	k_a	k_v	k_t	γ	k	κ	ϵ
9	10.4	0.5	0.995	0.8	2.3	2	5.4	0.005

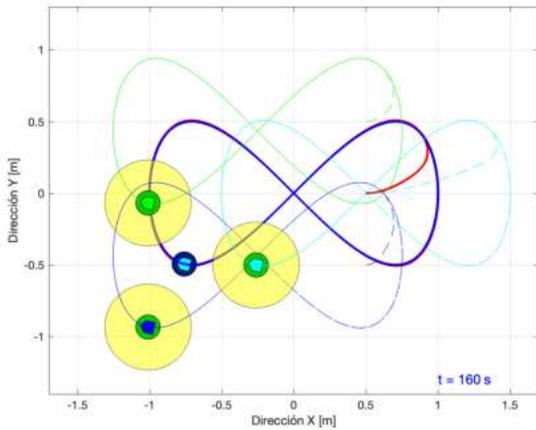


Figura 4. Posición del centro geométrico [rojo] comparado con la referencia [Azul]. Simulación

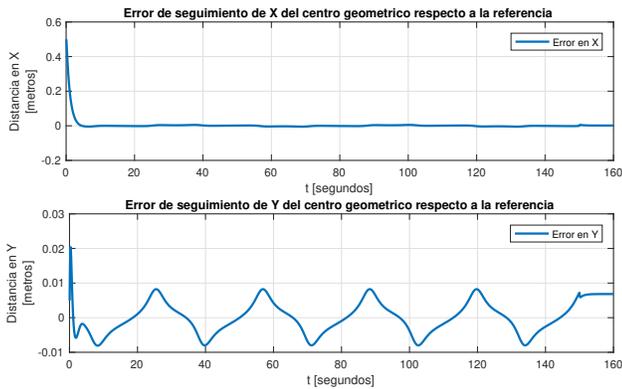


Figura 5. Error de posición del centro geométrico. Simulación



Figura 6. Error de orientación de cada agente respecto a la referencia. Simulación

REFERENCIAS

- Carlos Canudas de Wit, B.S. (1997). *Theory of robot control*. Springer.
- Chávez, L.F.V. y Ángeles, A.R. (2017). Control descentralizado bio-inspirado para navegación autónoma de sistemas multiagente. *Congreso Nacional de Control Automático*, 534.
- Cucker, F. y Smale, S. (2007). Emergent behavior in flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5), 852–862.

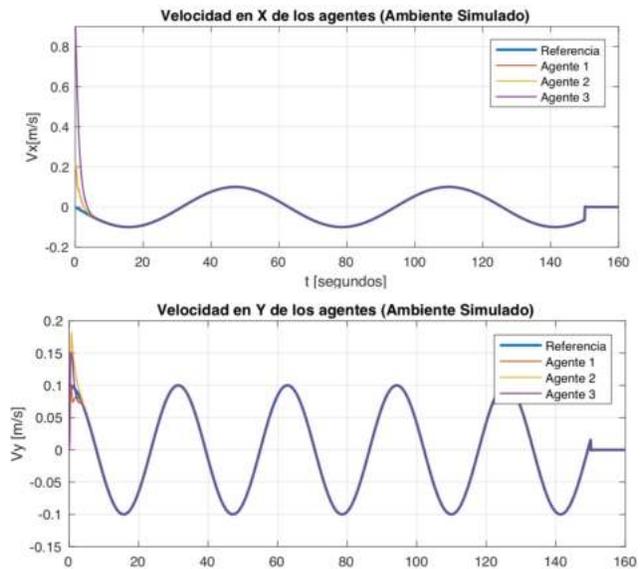


Figura 7. Salidas del lazo de control externo, Simulación

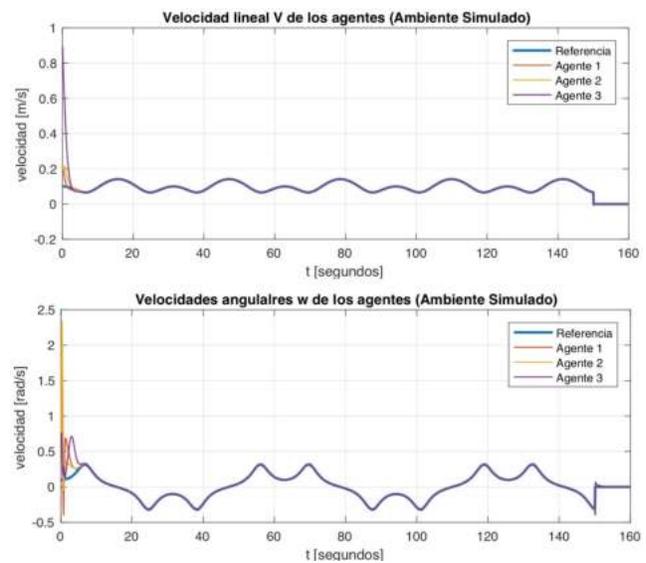


Figura 8. Salidas del lazo de control interno, Simulación

- Helbing, D., Buzna, L., Johansson, A., y Werner, T. (2005). Self-organized pedestrian crowd dynamics: Experiments, simulations, and design solutions. *Transportation science*, 39(1), 1–24.
- Helbing, D., Farkas, I., y Vicsek, T. (2000). Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407(6803), 487–490.
- Li, X., Liu, Y., y Wu, J. (2016). Flocking control and pattern motion in a modified cucker-smale model. *Korean Math. Soc.*, 53, 1–6.
- Park, J., Kim, H.J., y Ha, S.Y. (2018). Cucker-smale flocking with inter-particle bonding forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55, 2617–2623.