

Consenso promedio en nodos integradores perturbados: Enfoque de la función barrera en modos deslizantes integrales continuos

Christopher D. Cruz-Ancona, Leonid Fridman

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, México (e-mail: cdiegoca89@gmail.com, lfridman@unam.mx).

Resumen Dentro del problema clásico de consenso promedio de nodos integradores perturbados, se investiga el uso de controladores adaptables por modos deslizantes integrales continuos. Considerando que la perturbación tiene derivada respecto al tiempo con cota desconocida, y que el grafo de comunicación es conexo, se propone un controlador adaptable *super-twisting* basado en la función barrera en combinación con el algoritmo clásico de consenso promedio. Esta configuración asegura la convergencia de los estados de cada agente a una vecindad prescrita de radio ε del valor de consenso promedio, además satisface las características clásicas de los protocolos de consenso y previene la sobrestimación de las ganancias del controlador robustificante ante una clase de perturbaciones.

Palabras clave: Consenso promedio, nodos integradores perturbados, perturbaciones desconocidas, grafo no dirigido, modos deslizantes integrales continuos adaptables, funciones barrera.

1. INTRODUCCIÓN

Por más de una década, los problemas de consenso han recibido un creciente interés por parte de la comunidad científica. Las aplicaciones en control cooperativo, redes de sensores, formación de múltiples robots, redes eléctricas inteligentes, etc. (Dörfler and Bullo, 2014; Nijmeijer and Rodriguez-Angeles, 2003; Ren et al., 2007); que emulan el comportamiento complejo entre individuos en la naturaleza (*cf.* Strogatz (2012)), se basan en las interacciones locales entre sistemas dinámicos (agentes) que pertenecen a una red denominada Sistema Multi-Agente (SMA).

En teoría de control se entiende que dichas interacciones locales entre agentes corresponden a leyes de control distribuidas (*i.e.*, que contienen la información total o parcial del estado del agente y sus vecinos), a partir de las cuales cada agente es capaz de calcular de forma dinámica una trayectoria o *solución síncrona* en común a seguir. En la actualidad se conoce que la dificultad para estudiar estos problemas radica en las características de la red (Wieland et al., 2011): la dinámica de los agentes (idéntica, casi-idéntica o diferente), el acoplamiento entre ellos (lineal o no-lineal) y la topología asociada a las conexiones (grafos dirigidos o no dirigidos). También, raramente mencionado en la literatura, existen dos características importantes en las leyes de control distribuidas en problemas de sincronización: una señal de control continua y que contiene una

parte de la solución al problema en forma de un modelo interno que emerge de las interacciones entre los agentes (Wieland et al., 2011).

Ante estas condiciones, los enfoques convencionales en Dörfler and Bullo (2014); Ren et al. (2007); Wieland et al. (2011); Zhang et al. (2017) logran convergencia al valor de consenso de manera asintótica o exponencial en ausencia de perturbaciones en el canal de comunicación.

En la literatura existen una gran cantidad de protocolos de consenso que logran la *sincronización idéntica* entre los agentes en la red (Pikovsky et al., 2003; Strogatz, 2012), en algunas ocasiones, ante perturbaciones acopladas al canal de comunicación. Por ejemplo, algunos protocolos para lograr convergencia en tiempo finito o fijo del tipo: discontinuo (Hui et al., 2010; Menon and Edwards, 2010; Davila and Pisano, 2016), discontinuo homogéneo (Guan et al., 2012) y basado en gradientes (Cortés, 2006), mediante modos deslizantes integrales (Yu and Long, 2015). Sin embargo, las señales de control son discontinuas y en su mayoría el valor de consenso se desconoce. Por otra parte, en ausencia de perturbaciones, los enfoques actuales (Wang et al., 2018) resuelven el problema de consenso promedio en tiempo prescrito a partir de señales de control continuas mediante la adaptación de la ley de consenso promedio clásico de Olfati-Saber and Murray (2004).

Bajo la premisa de adoptar estrategias robustificantes para mitigar el efecto de perturbaciones en el canal de comunicación, es importante considerar el diseño de es-

trategias basadas en algoritmos que han demostrado su capacidad para tal motivo. El uso de los Modos Deslizantes Integrales (MDI) permite robustificar los controladores nominales desde el momento inicial (Utkin and Shi, 1996). En combinación con los algoritmos de consenso convencionales (Olfati-Saber and Murray, 2004; Wieland et al., 2011), la incorporación de los Modos Deslizantes Integrales Continuos (MDIC) permiten compensar las perturbaciones acopladas en tiempo finito (*cf.* Yu and Long (2015)). Aún perdiendo la robustificación desde el momento inicial (*cf.* Chalanga and Plestan (2017)), este tipo de algoritmos mantiene las propiedades de los acoplamientos clásicos en la sincronización de sistemas *casi-idénticos*.

La idea principal de este trabajo radica en aprovechar la propiedad de compensación de las perturbaciones de los Modos Deslizantes Integrales Continuos Adaptables (MDICA) en Obeid et al. (2018b) y el protocolo clásico de consenso promedio Olfati-Saber and Murray (2004). Esta configuración, que además satisface las características clásicas de las leyes de control en los problemas de consenso, determina la convergencia de los estados de los agentes a una ε -vecindad predefinida del valor promedio de las condiciones iniciales ante perturbaciones desconocidas con pocas restricciones en el canal de comunicación. El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se presentan la notación y preliminares, se describe la topología de comunicación y la función barrera utilizada en el controlador MDICA. La Sección 3 describe los nodos integradores perturbados y el esquema completo de control. En la Sección 4 se presenta el resultado principal y en la Sección 5 se verifica la efectividad del esquema propuesto mediante un ejemplo numérico. Finalmente, en la Sección 6 se dan algunas observaciones y direcciones futuras de esta investigación. Cabe mencionar que la demostración de la Proposición 1 se encuentra en el Apéndice A.

2. PRELIMINARES

Notación. El vector $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ denota un vector columna N -dimensional con todos sus elementos iguales a 1; \mathbb{R}_+ corresponde al conjunto de los reales positivos. Dentro de este trabajo se omite la dependencia del tiempo en algunas funciones cuando esta se entiende del contexto. $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ denotan el valor absoluto y la norma Euclidiana, respectivamente.

2.1 Topología de comunicación

Los acoplamientos entre los agentes en la red se describen mediante una *topología de comunicación* fija $\mathcal{G} \triangleq (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, *i.e.*, un grafo no dirigido determinado por un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$, un conjunto de aristas $\mathcal{E} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, y una matriz de adyacencia \mathcal{A} . Las entradas de la matriz de adyacencia $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ asociada con \mathcal{G} se definen como $a_{ij} = 1$ si $(j, i) \in \mathcal{E}$ y $a_{ij} = 0$ si no; el conjunto de *vecinos* del nodo i se denota

por $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : ij \in \mathcal{E}\}$, $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ denota la matriz Laplaciana simétrica asociada al grafo \mathcal{G} donde $l_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij}$ si $i = 1, \dots, N$ y $l_{ij} = -a_{ij}$ si $i \neq j$. Por construcción se tiene que $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$ y 0 es un valor propio de \mathcal{L} con $\mathbf{1}$ como su vector propio por derecha. Se tiene que $\mathcal{L} \geq 0$, *i.e.*, todos los valores propios de \mathcal{L} distintos de cero son positivos. Además, sea \mathcal{G} un grafo no dirigido entonces 0 es un valor propio simple de \mathcal{L} si y solo si el grafo \mathcal{G} es conexo. Sean $\lambda_i(\mathcal{L})$ los valores propios de \mathcal{L} tales que $0 = \lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{L})$, para un grafo no dirigido $\lambda_2(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}_+$ si y solo si \mathcal{G} es conexo (Ren et al., 2007), $\lambda_2(\mathcal{L})$ se conoce como conectividad algebraica de \mathcal{G} . En el resto del trabajo considere que \mathcal{G} es conexo y fijo.

2.2 Funciones barrera FB

Dado $\varepsilon > 0$, las funciones barrera $\gamma_B : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow [\bar{\gamma}, \infty)$ son funciones continuas, pares, estrictamente crecientes en el intervalo $[0, \varepsilon)$, con asíntotas verticales $\lim_{|s| \rightarrow \varepsilon} \gamma_B(s) = +\infty$ y poseen un mínimo global en cero, *i.e.*, $f(0) = \bar{\gamma} \geq 0$. En este trabajo, se considera la clase de función barrera positiva definida (FBP): $\gamma_B(s) = \varepsilon \bar{\gamma} / (\varepsilon - |s|)$, *i.e.*, $\gamma_B(0) = \bar{\gamma} > 0$ (véase Obeid et al. (2018b)).

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema multi-agente descrito por un grafo de comunicación \mathcal{G} y N nodos integradores perturbados:

$$\dot{x}_i = u_i + d_i, \quad i \in \mathcal{V} \quad (1)$$

donde $x_i := x_i(t) \in \mathbb{R}$, $u_i := u_i(t) \in \mathbb{R}$ y $d_i := d_i(t) \in \mathbb{R}$ son el estado, la entrada de control y una perturbación del i -ésimo sistema, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, asuma la clase de perturbaciones Lipschitz con derivada acotada, *i.e.*, $|\dot{d}_i| \leq M$ donde $M \in \mathbb{R}_+$ es una cota desconocida.

Se requiere diseñar una ley de control u_i tal que resuelva un problema de consenso, *i.e.*, dadas las condiciones iniciales mediante una ley de control distribuida u_i existe un valor de consenso x^* (*e.g.*, $x^* = \sum_{i=1}^N x_i(0)/N$) tal que para todo $i \in \mathcal{V}$, $x_i \rightarrow x^*$ cuando t crece sin cota. Es importante mencionar que este valor solo puede calcularse mediante la información compartida por el i -ésimo agente y sus vecinos en la topología de comunicación \mathcal{G} .

3.1 Protocolo de consenso

Suponga el escenario en el cual $d_i = 0$, $\forall i \in \mathcal{V}$, y que las interacciones entre los agentes (1) del grafo \mathcal{G} corresponden al siguiente protocolo lineal de consenso o ley de control nominal:

$$u_i^{\text{nom}} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} x_j \quad (2)$$

con $u_i = u_i^{\text{nom}}$, $i = 1, \dots, N$ donde a_{ij} y ℓ_{ij} corresponden a los elementos de la matriz de adyacencia \mathcal{A} y Laplaciana \mathcal{L} , respectivamente. En forma compacta:

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x \quad (3)$$

donde $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N)^T$ es el vector de estado apilado. Este protocolo ha sido ampliamente estudiado en la literatura por Olfati-Saber and Murray (2004); Moreau (2004); Wieland et al. (2011); en el caso de grafos de comunicación fijos, la convergencia de este algoritmo se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1. (Olfati-Saber and Murray (2004)). Sea \mathcal{G} un grafo de comunicación fijo, no dirigido y conexo. Suponiendo que cada agente (1) utiliza el protocolo (2) con $d_i = 0$ para todo $i \in \mathcal{V}$, entonces todos los agentes alcanzan el consenso promedio $x^* = \sum_{i=1}^N x_i(0)/N$, i.e., $x_i \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Sin embargo, en presencia de perturbaciones Lipschitz d_i con cotas de derivada respecto al tiempo desconocidas, se pierde la convergencia al valor promedio de las condiciones iniciales de los agentes de la red (véase Fig. 2). La idea en este trabajo es mantener la propiedad de convergencia del algoritmo clásico en el siguiente escenario.

Problema: Dado un número finito N de nodos integradores perturbados (1) con cota desconocida de la derivada de la perturbación, diseñe una ley de control distribuida tal que el valor de consenso se encuentre dentro de una ε -vecindad prescrita del valor promedio de las condiciones iniciales de todos los nodos en la red.

Antes de presentar el esquema de control completo basado en MDICA es importante tomar en cuenta lo siguiente.

3.2 Conexión con los MDI

La importancia del uso correcto de la variable auxiliar de deslizamiento en los protocolos de consenso, basados en controladores por modos deslizantes integrales, es que esta es necesariamente distribuida. Considere la variable auxiliar:

$$\sigma_i = x_i - x_i(0) - \int_0^t u_i^{\text{nom}}(\tau) d\tau, \quad i \in \mathcal{V}, \quad (4)$$

donde $x_i(0)$ corresponde a la condición inicial del i -ésimo agente. Nótese que desde el momento inicial $\sigma_i(0) = 0$, y que existe la siguiente conexión entre el valor de consenso promedio y la variable auxiliar.

Proposición 1. Dadas las variables auxiliares (4) y el protocolo de consenso u_i^{nom} en (2). Si \mathcal{G} es conexo, entonces

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} \sigma_i = \sum_{i \in \mathcal{V}} (x_i - x^*), \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

con $x^* = \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i(0)/N$, $i \in \mathcal{V}$.

La demostración de este resultado se encuentra en el Apéndice A. La ecuación (5) es la conexión entre el protocolo de consenso y el controlador por MDI, además es útil en el análisis de convergencia de los estados del SMA.

3.3 Diseño de la ley de control por MDICA

Para mitigar el efecto de la perturbación d_i desconocida en cada agente, considere la ley de control distribuida $u_i = u_i^{\text{nom}} + u_i^{\text{stc}}$ con u_i^{nom} en (2) y el algoritmo *super-twisting* adaptable (cf. Obeid et al. (2018b)):

$$\begin{aligned} u_i^{\text{stc}} &= -k_1 \gamma_B(\sigma_i) |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_i) + \eta_i \\ \dot{\eta}_i &= -k_2 \gamma_B^2(\sigma_i) \text{sign}(\sigma_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Es importante resaltar que (6) solo depende de su estado, su condición inicial y el protocolo distribuido u_i^{nom} para toda $i \in \mathcal{V}$.

Observación 1. Debido a la naturaleza de la incertidumbre d_i , el controlador *super-twisting* (CST) en Levant (1993) no puede implementarse sin adaptación. El CST requiere del valor de la cota de la derivada de la perturbación, sobrestimando el valor de las ganancias del controlador.

4. RESULTADO PRINCIPAL

Teorema 2. Sea \mathcal{G} un grafo de comunicación fijo, no dirigido y conexo. Dado $\varepsilon > 0$ y suponiendo que cada agente (1) utiliza el protocolo $u_i = u_i^{\text{nom}} + u_i^{\text{stc}}$ en (2) y (6) con las variables auxiliares (4), ganancias fijas $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ y adaptables $\gamma_B(\sigma_i) = \varepsilon \bar{\gamma} / (\varepsilon - |\sigma_i|)$, $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+$. Si $|\dot{d}_i| \leq M$. Entonces se cumple el siguiente criterio:

$$|x_i - x^*| \leq \varepsilon, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Esta prueba consiste en dos etapas, la primera es el análisis de estabilidad de las variables auxiliares σ_i y η_i (cf. Obeid et al. (2018b)). La segunda parte muestra la manera que se llega a una vecindad del consenso promedio.

En primer lugar, de (4) $\sigma_i(0) = 0$ para todo $i \in \mathcal{V}$. Obteniendo la dinámica de la variable auxiliar (4)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \dot{x}_i - u_i^{\text{nom}} \\ &= u_i^{\text{nom}} + u_i^{\text{stc}} + d_i - u_i^{\text{nom}} \\ &= u_i^{\text{stc}} + d_i \end{aligned} \quad (7)$$

y considerando el cambio de variable $\xi_i = \eta_i + d_i$, entonces la dinámica de las variables (7) toma la forma de N controladores *super-twisting*, adaptables y distribuidos, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= -k_1 \gamma_B(\sigma_i) |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_i) + \xi_i \\ \dot{\xi}_i &= -k_2 \gamma_B^2(\sigma_i) \text{sign}(\sigma_i) + \dot{d}_i, \quad i \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (8)$$

Tome la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\sigma, \xi) = \sum_{i=1}^N V_i(\sigma_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^N |\sigma_i| + k_2 \varepsilon \bar{\gamma} \gamma_B(\sigma_i) + \frac{1}{2} \xi_i^2,$$

cuya primera derivada a lo largo de las trayectorias de (8) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N -\frac{k_1 k_2 \varepsilon^3 \bar{\gamma}^3}{(\varepsilon - |\sigma|)^3} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} - \frac{k_1 \varepsilon \bar{\gamma}}{\varepsilon - |\sigma|} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \xi_i \text{sign}(\sigma_i) + \xi_i \dot{d}_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Note que los últimos dos términos en cada sumando en (9) están acotados por $|\xi_i \text{sign}(\sigma_i)| \leq |\xi_i|$ y $|\xi_i d_i| \leq M|\xi_i|$, respectivamente. Luego

$$\dot{V} \leq \sum_{i \in \mathcal{V}} -k_1 k_2 \gamma_B^3(\sigma_i) |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} - \frac{k_1 \varepsilon \bar{\gamma}}{\varepsilon - |\sigma_i|} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} + \Delta_i \quad (10)$$

con $\Delta_i := (1 + M)|\xi_i| > 0$ y $\gamma_B(\sigma_i) = \frac{\varepsilon \bar{\gamma}}{\varepsilon - |\sigma_i|}$. La desigualdad anterior se reescribe como sigue

$$\dot{V} \leq \sum_{i \in \mathcal{V}} -k_1 k_2 \gamma_B^3(\sigma_i) |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta_i}{\varepsilon - |\sigma_i|} F_i \quad (11)$$

con

$$F_i := |\sigma_i| + \frac{k_1 \varepsilon \bar{\gamma} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}}}{\Delta_i} - \varepsilon, \quad i \in \mathcal{V}. \quad (12)$$

Observe que $F_i = 0$, para todo $i \in \mathcal{V}$, es una ecuación cuadrática con sus raíces dadas por

$$|\sigma'_i|^{\frac{1}{2}} = -\frac{a_i}{2} \pm \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{2} \quad (13)$$

con $a_i := k_1 \varepsilon \bar{\gamma} / \Delta_i$ y $b := 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. De (11), la única raíz importante en el análisis es la raíz no-negativa de (13) y debido a que $a^2 + b^2 < (a + b)^2$ para $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ cualesquiera, la desigualdad $\sqrt{a^2 + b^2} / 2 < (a + b) / 2$ se satisface. Por lo tanto, la siguiente es una cota superior de (13), $|\sigma'_i|^{\frac{1}{2}} < -\frac{a_i}{2} + \frac{a_i}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$ y tomando el cuadrado se obtiene que $|\sigma'_i| < \frac{b^2}{4} = \frac{4\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

De la derivada de V , note que F_i es positiva si $|\sigma_i| > |\sigma'_i|$. Entonces, basado en (11), para $|\sigma'_i| \leq |\sigma_i| < \varepsilon$, $\forall i \in \mathcal{V}$, los dos términos en cada sumando del lado derecho en (11) son negativos. Por lo tanto, las variables auxiliares σ_i se encuentran contenidas en el conjunto $\mathcal{S} := \left\{ \sigma_i \in \mathbb{R} : |\sigma'_i| \leq |\sigma_i| < \varepsilon, \forall i \in \mathcal{V} \right\}$ para todo $t \geq 0$.

Además, dado que \dot{V}_i es negativa en \mathcal{S} , las variables auxiliares ξ_i permanecen en una vecindad del cero. De esta manera la desigualdad $|\xi_i| \leq \delta_1$ se cumple con $\delta_1 := \delta_1(M)$ para todo $t \geq \bar{t}$, dentro de un periodo pequeño $\bar{t} := \max_{i \in \mathcal{V}} \{ \bar{t}(M, \xi_i(0)) \}$.

Por otra parte, debido a que el grafo no dirigido \mathcal{G} es conexo y N es finito, es claro que la igualdad (5) se mantiene para todo $t \geq 0$. Sea $\theta := (1/N) \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i$, el vector de desacuerdo $e = (e_1, \dots, e_N)^T$ donde $e_i = x_i - \theta$ y $\sum_{i \in \mathcal{V}} e_i = 0$. Utilizando la derivada de las variables auxiliares es posible obtener que $\dot{x} = -\mathcal{L}x + \dot{\sigma}$ y $\dot{e} = -\mathcal{L}e + \dot{\sigma} - \dot{\theta} \mathbf{1}$ donde $\dot{\sigma} = (\dot{\sigma}_1, \dots, \dot{\sigma}_N)^T$. Luego defínase la función candidata de Lyapunov $V_e = \|e\|^2 / 2$ y dado que $\sum_{i \in \mathcal{V}} e_i = 0$ se satisface que $\dot{V}_e \leq -2\lambda_2(\mathcal{L})V_e$ con $\lambda_2(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}_+$, esto implica que $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Mediante algunas manipulaciones algebraicas y el uso de la Proposición 1 se obtiene que $e_i = (x_i - x^*) - (1/N) \sum_{i \in \mathcal{V}} \sigma_i$ y dado que $|\sigma_i| < \varepsilon$ desde el momento inicial, para todo $i \in \mathcal{V}$, se obtiene lo siguiente

$$|x_i - x^*| \leq |e_i| + \varepsilon, \forall i \in \mathcal{V},$$

el resultado es inmediato al aplicar el límite cuando t tiende a infinito \square

Observación 2. Para una breve exposición del resultado, se ha omitido la extensión del Teorema 2 en el caso

de adaptación por medio de FB positivas semidefinidas en Obeid et al. (2018a) cuya verificación es análoga al Teorema 2. También, la extensión es inmediata en el caso del algoritmo de consenso promedio en tiempo prescrito en Wang et al. (2018).

5. EJEMPLO NUMÉRICO

Considere la topología de comunicación en la Fig. 1 para una red de nodos integradores perturbados (1) con $N = 5$. Tome como parámetros de simulación $x(0) = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$,

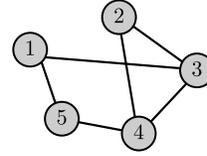


Figura 1. Topología de comunicación \mathcal{G} no dirigida de 5 nodos utilizada en el problema de consenso.

$x^* = 3$, $\bar{\gamma} = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$; una perturbación externa que se considera como $d_i = \alpha(t) \sin(t) + \beta_i$ donde

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0.3, & 0 \leq t \leq 100 \\ 3, & 100 < t \leq 200 \\ 10, & 200 < t \leq 300 \end{cases}$$

y $\beta_i \in [5, 10]$. Note que cuando las condiciones suficientes del Teorema 1 se cumplen, se alcanza el consenso promedio. Sin embargo, utilizando este mismo esquema, ante la presencia de perturbaciones en el canal de comunicación el resultado es poco favorable (véase Fig. 2). Es decir, las trayectorias de los agentes divergen cuando el tiempo crece sin cota, intentando seguirse una a la otra, logrando un tipo diferente de sincronización Wieland et al. (2011). Bajo estas condiciones, las señales de control asociadas a las interacciones entre los nodos u_i^{nom} son continuas como se muestra en la Fig. 3.

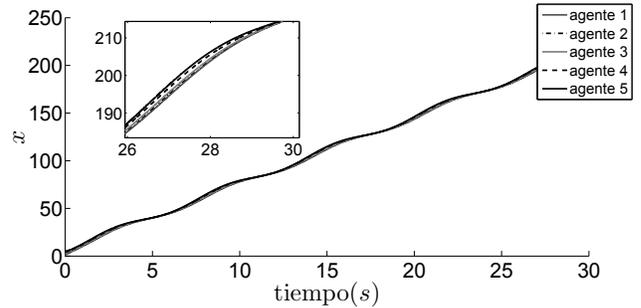


Figura 2. Trayectorias de los nodos integradores perturbados (1), $d_i = 0.3 \sin(t) + \beta_i$, $\beta_i \in [5, 10]$, $i = 1, \dots, 5$, y ley de control nominal (2): La existencia de las perturbaciones d_i no permite que se alcance el consenso promedio.

Por otra parte, las condiciones establecidas en el Teorema 2 indican que el esquema propuesto garantiza que las

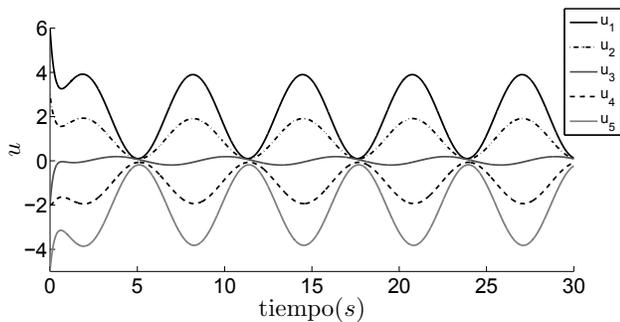


Figura 3. Señal continua en la ley de control nominal (2).

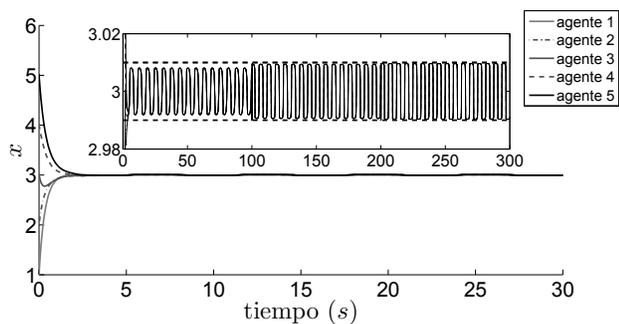


Figura 4. Trayectorias de los nodos integradores perturbados (1) con ley de control (2)+(6) con FBP: Convergencia a la ε -vecindad del consenso promedio $x^* = 3$, $\bar{\gamma} = 0.01$ y $\varepsilon = 0.01$.

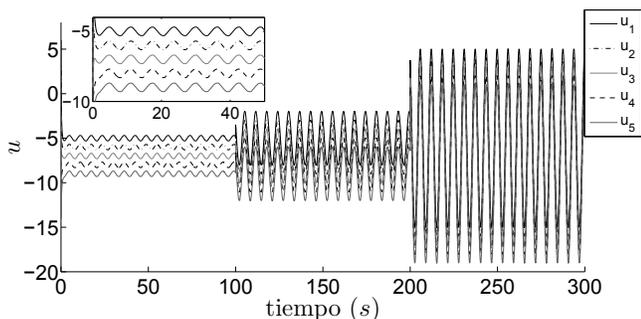


Figura 5. Señal continua de control (2)+(6) mediante MDICA con FBP, $k_1 = 1.5$ y $k_2 = 1.1$.

trayectorias de los nodos integradores convergen a una ε -vecindad prescrita del consenso promedio, esto se muestra en la Fig. 4. A su vez los MDICA permiten mantener el comportamiento continuo de las señales de control (véase Fig. 5).

El comportamiento de la ganancia adaptable del MDICA se observa en la Fig. 6, en este caso siempre es mayor que $\bar{\gamma} = 0.01$ y no se sobrestima la ganancia del CST. Los sobretiros que se muestran en la Fig. 6 son una consecuencia de mantener a las variables auxiliares σ_i dentro de la vecindad de radio ε . Note que cada variable auxiliar se mantiene dentro de la ε -vecindad del cero desde

el momento inicial a pesar de los saltos e incrementos de amplitud en la perturbación que se presentan en $t = 100, 200s$.

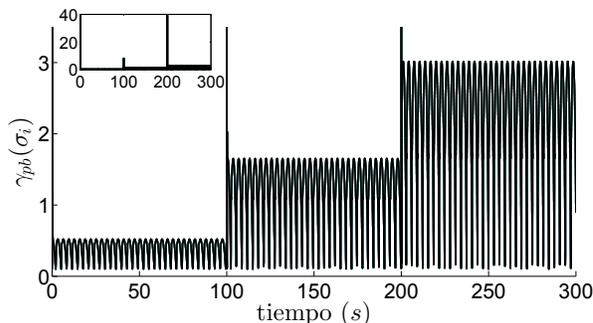


Figura 6. Ganancia adaptable $\gamma_{pb}(\sigma_i)$ en el MDICA con FBP, $k_1 = 1.5$, $k_2 = 1.1$, $\varepsilon = 0.01$, $i = 1, \dots, N$.

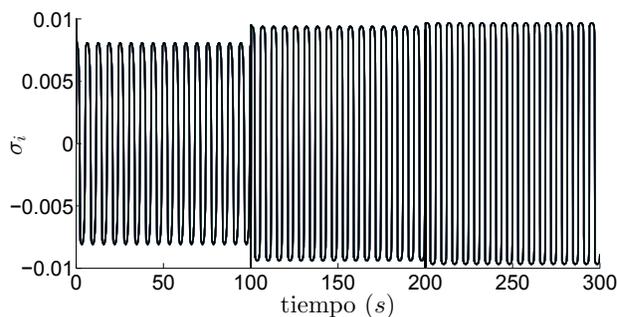


Figura 7. Variables auxiliares (4) en el MDICA con FBP, $\varepsilon = 0.01$, $i = 1, \dots, N$.

6. CONCLUSIÓN

En este trabajo se propuso el uso de controladores adaptables basados en la función barrera en el enfoque de modos deslizantes integrales continuos en el problema de consenso promedio de nodos integradores perturbados. Aunque se pierde la convergencia de las trayectorias de los agentes al consenso promedio debido a las perturbaciones acopladas al canal de comunicación, es posible restringir las trayectorias a una vecindad predefinida del valor de consenso de manera asintótica.

Dentro de las direcciones futuras se contempla el uso de protocolos de consenso con convergencia en tiempo finito, también se sugiere el uso de suposiciones menos restrictivas en cuanto al grafo de comunicación. Las comparaciones con otras estrategias adaptables quedan fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, los resultados de adaptación en Obeid et al. (2018a,b) sugieren que el uso de la FB puede competir con los algoritmos adaptables mostrados en Negrete-Chávez and Moreno (2016); Shtessel et al. (2012).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico de CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología): Proyecto 282013; PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica): Proyecto IN115419.

REFERENCIAS

- Chalanga, A. and Plestan, F. (2017). Finite time stabilization of an uncertain chain of integrators by integral sliding mode approach. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 9613–9618.
- Cortés, J. (2006). Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus. *Automatica*, 42(11), 1993–2000.
- Davila, J. and Pisano, A. (2016). Fixed-time consensus for a class of nonlinear uncertain multi-agent systems. In *2016 American Control Conference (ACC)*, 3728–3733. IEEE.
- Dörfler, F. and Bullo, F. (2014). Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*, 50(6), 1539–1564.
- Guan, Z.H., Sun, F.L., Wang, Y.W., and Li, T. (2012). Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 59(11), 2646–2654.
- Hui, Q., Haddad, W.M., and Bhat, S.P. (2010). Finite-time semistability, filippov systems, and consensus protocols for nonlinear dynamical networks with switching topologies. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4(3), 557–573.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Menon, P.P. and Edwards, C. (2010). A discontinuous protocol design for finite-time average consensus. In *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, 2029–2034. IEEE.
- Moreau, L. (2004). Stability of continuous-time distributed consensus algorithms. In *2004 43rd IEEE conference on decision and control (CDC)(IEEE Cat. No. 04CH37601)*, volume 4, 3998–4003. IEEE.
- Negrete-Chávez, D.Y. and Moreno, J.A. (2016). Second-order sliding mode output feedback controller with adaptation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10), 1523–1543.
- Nijmeijer, H. and Rodriguez-Angeles, A. (2003). *Synchronization of mechanical systems*, volume 46. World Scientific.
- Obeid, H., Fridman, L., Laghrouche, S., and Harmouche, M. (2018a). Barrier function-based adaptive integral sliding mode control. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 5946–5950. IEEE.
- Obeid, H., Fridman, L., Laghrouche, S., Harmouche, M., and Golkani, M.A. (2018b). Adaptation of levant’s differentiator based on barrier function. *International Journal of Control*, 91(9), 2019–2027.
- Olfati-Saber, R. and Murray, R.M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(9), 1520–1533.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J., and Kurths, J. (2003). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, volume 12. Cambridge university press.
- Ren, W., Beard, R.W., and Atkins, E.M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control systems magazine*, 27(2), 71–82.
- Shtessel, Y., Taleb, M., and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.
- Strogatz, S.H. (2012). *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*. Hachette UK.
- Utkin, V. and Shi, J. (1996). Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In *Proceedings of 35th IEEE conference on decision and control*, volume 4, 4591–4596. IEEE.
- Wang, Y., Song, Y., Hill, D.J., and Krstic, M. (2018). Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems. *IEEE transactions on cybernetics*, (99), 1–10.
- Wieland, P., Sepulchre, R., and Allgöwer, F. (2011). An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization. *Automatica*, 47(5), 1068–1074.
- Yu, S. and Long, X. (2015). Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode. *Automatica*, 54, 158–165.
- Zhang, Y., Nishikawa, T., and Motter, A.E. (2017). Asymmetry-induced synchronization in oscillator networks. *Physical Review E*, 95(6), 062215.

Apéndice A. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1

Dada la suma de variables auxiliares (4), *i.e.*,

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} \sigma_i = \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i - \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i(0) - \sum_{i \in \mathcal{V}} \int_0^t u_i^{\text{nom}}(\tau) d\tau, \quad (\text{A.1})$$

Considere el término integral (A.1), del hecho que N es finito, note que

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} \int_0^t u_i^{\text{nom}}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{i=1}^N u_i^{\text{nom}}(\tau) d\tau.$$

Por otra parte, dado que \mathcal{G} es conexo, entonces $\mathcal{L} \geq 0$; utilizando el lado derecho de (3), se tiene que:

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} u_i^{\text{nom}} = -(\mathbf{1}^T \mathcal{L} x)^T = -x^T \mathcal{L} \mathbf{1} = 0.$$

Así, es posible reescribir (A.1) como sigue

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} \sigma_i = \left(\sum_{i \in \mathcal{V}} x_i \right) - N x^*,$$

finalmente se obtiene el resultado. \square