

Estudio comparativo de Derivadores de Seguimiento y su Implementación en la Realización del PID en Presencia de Ruido

Fermín Hugo Ramírez Leyva*, Edgardo Yescas Mendoza*, Jacob Javier Vásquez Sanjuan**
Álvaro Jesús Mendoza Jasso*, Fernando Iturbide Jiménez*

*Universidad Tecnológica de la Mixteca,
México (e-mail: hugo@mixteco.utm.mx,

yescas@mixteco.utm.mx, alvaromj@mixteco.utm.mx, iturbide@mixteco.utm.mx)

**Universidad Politécnica de Puebla, Pue. México (e-mail: jacob.vasquez@uppuebla.edu.mx).

Resumen: En este trabajo se hace una comparación entre seis métodos para la implementación de la parte diferencial de un controlador PID. Para verificar su rendimiento se prueba, con simulaciones con periodo de muestreo fijo, sobre una planta de segundo orden y que la salida de ésta contamina por ruido gaussiano con distribución uniforme. Finalmente se demuestra que en estas condiciones, el cálculo de la derivada por el método de Euler hace que la salida de controlador tenga cambios bruscos.

Keywords: Aplicaciones de control, Controladores PID, Elementos derivativos, Modos deslizantes, Educación, Derivador de seguimiento.

1. INTRODUCTION

El controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) es el que se utiliza en más del 90% de aplicaciones industriales, ya que para su realización no requiere un conocimiento preciso del modelo del sistema que controla, además de que para su realización en forma digital no demanda operaciones muy complejas. Sin embargo, cuando se conoce el modelo del mismo se puede sintonizar con un mejor rendimiento que de forma empírica. Cuando el cálculo de la parte derivativa usa la aproximación de Euler, lo que se consigue es que amplifique mucho el ruido, por lo que en algunos casos se omite esta parte y únicamente queda un controlador Proporcional Integral (PI) (Bao-Zhu Guo et al. (2016)).

Para abordar este problema se puede utilizar la estimación de la derivada de señales, el cual es un problema bien conocido cuyo interés ha incrementado la atención en la comunidad científica en años recientes, ya que se utiliza para estimar la velocidad y aceleración de un sistema, que son parámetros cruciales en muchas aplicaciones, de tal manera que la robustez computacional y tiempo de diferenciación es muy significativo (Xinhua Wang et al. (2012)). A esta técnica se le conoce como diferenciador de seguimiento de una señal (TD por sus siglas en inglés *Tracking Differentiator*).

En los últimos años se han desarrollado muchas publicaciones para el cálculo de derivadas de señales en presencia de ruido, ya que esto sirve para emplear técnicas como rechazo activo de perturbaciones o control libre de modelo. Algunas de las cuales son Modos deslizantes, por filtrado de primer y

segundo orden, aproximación exacta, reconestructores algebraicos, filtros de Kalman (Wang Hongwei et al. (2015)). Una alternativa para el cálculo de derivadas es el estimador algebraico, el cual usa la serie truncada de Taylor para su cálculo (Matheus Schwalb Moraes et al. (2015) y R. Morales et al. (2014)). Bao-Zhu Guo (2016) hacen un estudio de diferentes técnicas avanzadas de TD y lo prueban ante entradas con ruido, mostrando que el de expansión en series de Taylor es más susceptible al ruido.

La eficiencia en el controlador PID se puede incrementar utilizando un TD para la implementación de la parte derivativa, el cual puede ser lineal o no lineal, cuando se utiliza un diferenciador de seguimiento no lineal en un controlador de este tipo se transforma en un PID no lineal (Ibraheem Kasim Ibraheem et al. (2014)).

Algunos trabajos en los que se prueba ante la presencia de ruido son: Ibraheem Kasim Ibraheem (2014) propone un TD no lineal con la tangente hiperbólica, y se prueba, a nivel de simulación, con un sistema masa amortiguador no lineal, se simula con ruido gaussiano de 0.001 de amplitud, mostrando que es capaz de rechazar el ruido, además de que demuestra la estabilidad del derivador. Kumar V. (2017) hace un estudio del comportamiento de un controlador PID fraccionario, y lo comparan contra el PID convencional para controlar un robot manipulador de dos grados de libertad, lo prueban en simulación usando ruido gaussiano de 0.002 de amplitud, muestran que el fraccionario tiene un mejor desempeño que el PID. Sin embargo, no se encontraron

trabajos en los que hagan una comparación de la respuesta de un sistema ante diferentes PID's, que utilicen varios TD's.

En este trabajo se exponen los resultados obtenidos para la implementación de un controlador PID para un sistema de segundo orden subamortiguado. En la parte diferencial se prueban 6 métodos, 4 lineales (de 1°, 2° grado, de Euler y estimador algebraico) y 2 TD no lineales (modos deslizantes y diferenciación exacta). Se hacen simulaciones en Matlab/Simulink pero los TD y el PID se codifican en tiempo discreto, con el fin de evaluar el rendimiento de los métodos ante las mismas condiciones (un periodo de muestreo de 100µs).

2. TÉCNICAS PARA EL CÁLCULO DE DERIVADAS

Sea la señal $v(t)$ que se quiere derivar, el método más simple es el de Euler descrito en la ecuación (1), para lo cual la señal se muestrea a una frecuencia $f_s = 1/h$, donde h es el periodo de muestreo. En la ecuación (1) se muestra éste método donde $v(t)$ es la entrada a derivar, $z_2 \approx \dot{v}(t)$ es la aproximación de la derivada de la entrada, $v(k)$ es la muestra actual y $v(k-1)$ la muestra anterior de la entrada.

$$z_2 = \frac{v(k) - v(k-1)}{h} \quad (1)$$

Un TD lineal de primer orden se considera un filtro pasa bajas de primer orden, el cual se define en (2), donde $v(t)$ es la entrada, R es una ganancia arbitraria que está relacionada con el ancho de banda del filtro y z_2 la estimación de la derivada de la entrada.

$$\begin{cases} z_1 = R(v(t) - z_1(t)) \\ z_2 = z_1 \end{cases} \quad (2)$$

El TD lineal de segundo orden se muestra en la ecuación (3), el cual consta de los estados Z_1 y Z_2 , la entrada es $v(t)$ y la ganancia R , z_2 es la estimación de la derivada de la entrada.

$$\begin{cases} z_1 = z_2(t) \\ z_2 = R^2 \left(-(z_1(t) - v(t)) - \frac{z_2(t)}{R} \right) \end{cases} \quad (3)$$

El TD no lineal descrito en la ecuación (4) consta de 2 estados, $v(t)$ es la entrada, R una ganancia y z_2 es la estimación de la derivada de $v(t)$.

$$\begin{cases} z_1 = z_2(t) \\ z_2 = R^2 \left(-(z_1(t) - v(t))^{1/2} - \left[\frac{z_2(t)}{R} \right]^{2/3} \right) \end{cases} \quad (4)$$

La ecuación (5) corresponde a un TD no lineal el cual es conocido en la literatura como Diferenciador exacto robusto por modos deslizantes, al igual que en los otros métodos R es una ganancia, $v(t)$ es la entrada y z_2 la estimación de la derivada.

$$\begin{cases} z_1 = z_2(t) - R(z_1(t) - v(t))^{1/2} \\ z_2 = -R \operatorname{sign}(z_1(t) - v(t)) \end{cases} \quad (5)$$

El último método se muestra en la ecuación (6) el cual es el de estimadores algebraicos, la cual se obtiene a partir de una expansión de series de Taylor y es la aproximación de primer orden. t es el tiempo en el que se calcula la derivada que se tiene que reinicializar para el cálculo de la integral, donde τ es la variable de integración y $v(t)$ la entrada.

$$z_2 = -\frac{6}{t} \int_0^t (t - 2\tau)v(\tau) d\tau \quad (6)$$

En la siguiente sección se explica la planta a simular y el diseño del controlador PID por asignación de polos.

3. SISTEMA SUBAMORTIGUADO Y CONTROLADOR PID

Un sistema subamortiguado de segundo orden tiene una función de transferencia la cual posee dos polos complejos conjugados. En la ecuación (7) se muestra la función de transferencia del mismo, donde δ es la constante de amortiguamiento, ω_n la frecuencia natural y k la ganancia en estado estable.

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

En la figura 1 se muestra el diagrama a bloques de la planta y el controlador PID, la salida del sistema se retroalimenta y se compara con la señal de referencia. La función de transferencia $G_{PID}(s)$ del controlador PID se muestra en la ecuación (8), donde k_d, k_p y k_i son las ganancias diferencial, proporcional e integral. $R_1(s)$ es la referencia deseada y $C(s)$ la salida de la planta.

$$G_{PID}(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (8)$$

La ecuación de lazo cerrado $G_C(s) = C(s)/R_1(s)$ del sistema de la figura 1 está dada por la ecuación (9), donde $\alpha = 2\delta\omega_n + \omega_n^2 k_d k$, $\beta = \omega_n^2 (k_p k + 1)$ y $\gamma = \omega_n^2 k_i k$.

Como se puede observar los polos de $G_C(s)$ dependen de las ganancias del controlador y es lo que se utiliza para la sintonización por asignación de polos.

$$G_C(s) = \frac{k\omega_n^2 (k_d s^2 + k_p s + k_i) k_d s^2 + k_p s + k_i}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma} \quad (9)$$

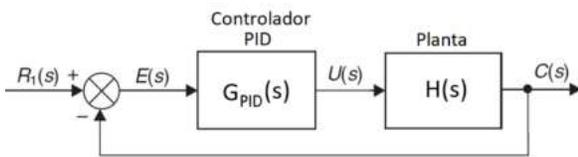


Fig. 1. Diagrama a bloques de controlador y la planta

Para la sintonización se propone un polinomio deseado $G_{des}(s)$ de tipo Hurwitz con 3 polos diferentes (p_1 , p_2 y p_3), como se muestra en la ecuación (10), igualando $G_{des}(s)$ con el denominador de $G_C(s)$ se encuentran los valores de las ganancias, siendo éstas: $k_d = (\alpha - 2\delta\omega_n)/(\omega_n^2 k)$, $k_p = (\beta - \omega_n^2)/(k\omega_n^2)$ y $k_i = (\gamma)/(\omega_n^2 k)$.

$$G_{des}(s) = s^3 + s^2(p_1 + p_2 + p_3) + s(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + p_1 p_2 p_3 \quad (10)$$

Para este trabajo se va a suponer que se tiene una planta de segundo orden subamortiguada con $\delta=0.3$, $\omega_n=1$ y $k=0.5$. En la figura 2 se muestra la respuesta ante una entrada escalón, como se puede ver su valor en estado estable es de 0.5, su porcentaje de sobre tiro es del 37.3% y el tiempo de establecimiento es de 13s.

A la planta anterior se le diseña un controlador PID suponiendo que se tiene una entrada de control limitada a $\pm 10V$ y con un tiempo de establecimiento de 5s. Se eligen las ganancias de tal manera que la señal de control no sobre pase este límite. Se propone un polinomio deseado con los polos en -0.8, -1 y -3, lo que da un polinomio deseado $G_{des}(s) = s^3 + 4.8s^2 + 6.2s + 2.4$ y las ganancias que se obtienen son: $k_d = 8.4$, $k_p = 10.2$ y $k_i = 4.8$.

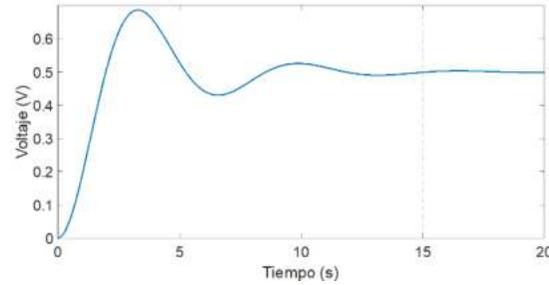


Fig. 2. Respuesta del sistema subamortiguado ante una entrada escalón

4. SIMULACIONES

En la figura 3 se muestra el diagrama esquemático en Matlab/Simulink en el que se implemente el controlador PID usando el bloque que proporciona, el simulador, para el integrador y el diferenciador; el módulo de saturación limita el voltaje del actuador en el rango de $\pm 10V$ y el valor deseado es de 1V.

En la figura 4 se muestra la simulación donde la salida (Y) se muestra de color azul. Como se puede ver ésta es subamortiguada con un tiempo de establecimiento de 6.2s, con un sobretiro de 10.7%. El tiempo de simulación es de 0 a 10s. El voltaje de control está acotado en el rango de $\pm 10V$, cuando se alcanza el valor deseado el voltaje de control se estabiliza en 2V.

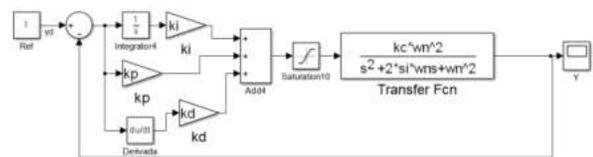


Fig. 3. Diagrama esquemático del controlador PID en Simulink

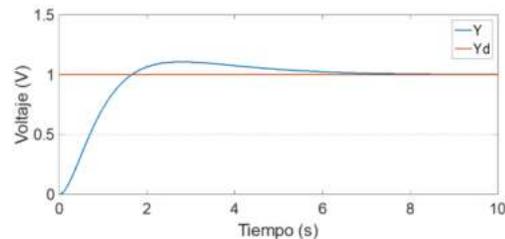


Fig. 4. Respuesta del controlador PID en condiciones ideales

En la implementación de la parte derivativa se van a probar los 6 métodos para el cálculo de la derivada los cuales son Euler, Primer orden, Segundo orden, TD no lineal, Modos deslizantes y Estimadores Algebraicos que corresponden a las ecuaciones (1) a la (6), y en las simulaciones se les va a denominar Euler, Primero, Segundo, Exacto, Sliding, y

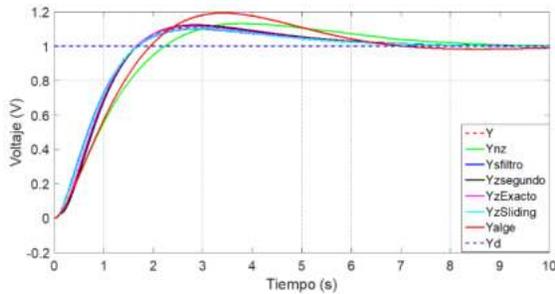


Fig. 8. Respuestas del sistema ante un escalón unitario y la salida contaminada con ruido aleatorio.

Para tener una medida más cualitativa del comportamiento global se utiliza la figura de mérito de error eficaz, la cual se define en la ecuación (11), donde e_i es el error con respecto a la variable de interés y n el número de datos (J. Kern et al. (2014)). El error se define en la ecuación (12) donde la $Señal_{Ideal}$ es la respuesta o valor deseado y la $Respuesta_{Real}$ la que se obtiene en el experimento o simulación.

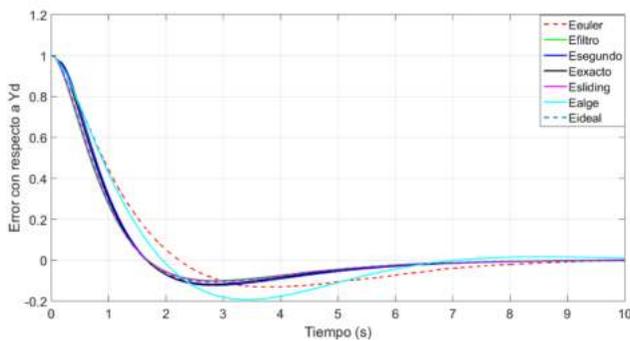


Fig. 9. Error con respecto a la salida deseada de los controladores con la salida contaminada con ruido aleatorio

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (11)$$

$$e = Señal_{Ideal} - Respuesta_{Real} \quad (12)$$

En la figura 10 se muestra la comparación del error RMS del error de salida de los controladores, donde la $Señal_{Ideal} = Y_d$ que en este caso es 1V, y $Respuesta_{Real} = y(t)$ es la respuesta de cada controlador. Los valores obtenidos fueron: Euler = 0.2645, Filtro = 0.2267, Segundo = 0.2466, Exacto = 0.2403, Sliding = 0.2290, Algebraico = 0.2670 e ideal=0.2312. Como se puede ver el que tiene el mejor desempeño es de filtro, incluso es superior a la respuesta ideal.

En la figura 11 se muestra las salidas del controlador PID que se le aplican a la planta con los difentes diferenciadores

($u(t)$), cada salida tienen el subíndice de acuerdo al tipo de diferenciador usado, como $U_{yfiltro}$ corresponde al derivador por filtro. Se puede ver que todas las señales tienen la misma tendencia y se estabilizan alrededor de 2V, que es el voltaje necesario para hacer que el error se haga cero. Aunque en condición estable no se mantiene estático por efectos del ruido aleatorio que se le adhiere a la salida del sistema. La salida de control por el método de Euler no se muestra en esta figura, porque todo el tiempo se encuentra saturada en el rango de $\pm 10V$, esto se debe al efecto de la derivada.

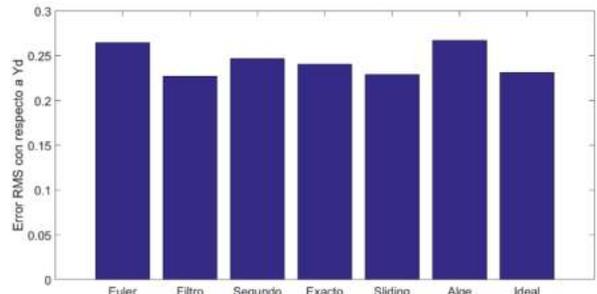


Fig. 10. Error eficaz de la respuesta de los controladores PID ante la salida deseada

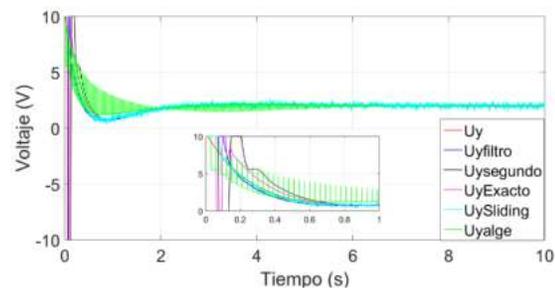


Fig. 11. Señal de control aplicada a la planta ante las diferentes implementaciones de la parte derivativa del PID.

Para tener una mejor representación del comportamiento de los controladores en presencia de ruido, se obtiene una gráfica del error de la respuesta de todos ellos con respecto a la salida ideal del PID sin ruido. Esta gráfica se muestra en la figura 12. Como se puede ver en este caso los que tienen la mejor aproximación son el de modos deslizantes (Esliding) y le sigue el de filtro de primer orden (Efiltro), la que tiene el peor desempeño es Euler.

Para tener una medida más cuantitativa del rendimiento de los controladores el valor eficaz del error se muestra en la figura 13, donde $Señal_{Ideal} = y(t)$ del PID sin ruido y la $Respuesta_{Real}$ es la que se obtiene de todos los derivadores bajo prueba. Los valores obtenidos fueron: Euler=0.0699, Efiltro=0.0062, Esegundo= 0.0192, Eexacto=0.0111, Esliding=0.0036 y Ealge=0.0657. Como se puede ver el que tiene mejor desempeño es el de modos deslizantes, seguido por el de primer orden, el de peor desempeño es el Euler.

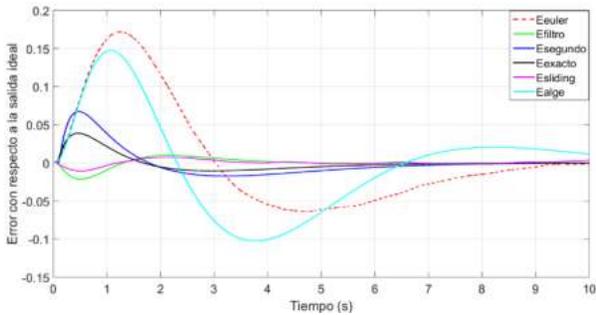


Fig. 12. Comparación del error de las salidas de los controladores con respecto a la salida obtenido por el PID sin ruido

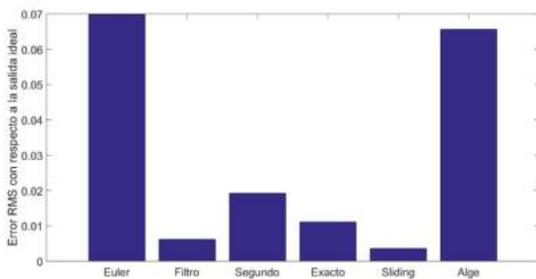


Fig. 13. Error RMS del error de la repuesta ideal sin ruido menos la repuesta de todos los controladores con ruido

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se mostraron los resultados obtenidos en la implementación de un controlador PID, donde la parte derivativa se obtuvo por 6 métodos diferentes, se consideró que la salida del sistema a controlar está contaminada con ruido aleatorio de magnitud $\pm 100\mu V$. Como se pudo apreciar todos los métodos funcionan mucho mejor que el clásico método de Euler, sin embargo cada uno de ellos tienen una mayor complejidad computacional.

La implementación del PID con la derivada por Euler hace que la salida del controlador este cambiando entre valores máximos y mínimos como si fuera un tipo de control de tipo todo nada, lo que hace que el actuador se force mucho y produzca sobre calentamiento en caso de que se implementara.

La razón del porque a pesar de que la salida del controlador PID por Euler funciona aunque la salida esté saturada, es porque la planta trabaja como filtro pasa bajas ante la entrada de control saturada. Lo cual en sistemas reales en ocasiones es preferible omitir la parte derivativa, si no se utiliza un método con mejor desempeño ante la presencia de ruido.

El método de filtro de primer orden se recomienda usarlo para el cálculo de derivadas, ya que computacionalmente es el que demanda menos recursos, y en simulación mostró un

buen desempeño, en comparación a los otros métodos que se usaron, como fue el de modos deslizantes o el algebraico, ambos demandan más recursos que el de filtrado.

La mayoría de trabajos que se encontraron en la literatura no prueban a los controladores PID con cierto periodo de muestreo, consideran que es implícito que va a funcionar de manera adecuada, sin embargo si se viola el teorema del muestreo esto puede hacer que se desestabilice el sistema, lo cual es muy factible cuando se utilizan ganancias muy grandes.

Como trabajos futuros se pretende aplicar estos métodos para el control de sistemas reales como puede ser el control de un motor de corriente directa o de un convertidor CD-CD.

REFERENCIAS

- Bao-Zhu Guo and Zhi-Liang Zhao. (2016). *Active disturbance rejection control for nonlinear systems: an introduction*. John Wiley & Sons.
- Ibraheem Kasim Ibraheem, Wameedh Riyadh Abdul-Adheem (2016). *On the Improved Nonlinear Tracking Differentiator based Nonlinear PID Controller Design*. (IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 7, No. 10.
- J. Kern, M. Jamett, C. Urrea, H. Torres. (2014). *Development of a Neural Controller Applied in a 5 DOF Robot Redundant*. IEEE LATIN AMERICA TRANSACTIONS, VOL. 12, NO. 2, MARCH.
- Kumar V., Rana K.P.S. (2017) *Comparative Study on Fractional Order PID and PID Controllers on Noise Suppression for Manipulator Trajectory Control*. Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems. Studies in Computational Intelligence, vol 688. Springer.
- Matheus Schwalb Moraes, Paulo Sergio Pereira da Silva. (2015). *Algebraic Derivative Estimation and Applications in Adaptive Control*. Conference: ABCM International Congress of Mechanical Engineering, Volume: 23.
- R. Morales, J.A. Somolinos, H. Sira-Ramírez. (2014). *Control of a DC motor using algebraic derivative estimation with real time experiments*. Measurement, Volume 47, Pages 401-417, ISSN 0263-2241.
- Wang Hongwei, Wang Heping. (2015). *A Comparison Study of Advanced Tracking Differentiator Design Techniques*. Procedia Engineering, Volume 99, Pages 1005-1013, ISSN 1877-7058.
- Xinhua Wang, Bijan Shirinzadeh. (2012). *Rapid-convergent nonlinear differentiator*. Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 28, Pages 414-431, ISSN 0888-3270.