

# Modelo dinámico de un mecanismo de 5 barras con un péndulo esférico

J.A. Villalobos-Torres, L.A. Márquez-Martínez,  
Ricardo Cuesta

*CICESE, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones (e-mail:  
{jvillalobos,lmarquez}@cicese.edu.mx,jcuesta@cicese.mx}*

**Resumen:** Se describe el modelo dinámico de un sistema compuesto por un mecanismo de 5 barras y un péndulo esférico. A diferencia de otros trabajos, aquí se considera que el péndulo es un barra rígida y no una masa puntual. Haciendo las consideraciones pertinentes, el modelo se reduce y coincide con los modelos de mecanismos más simples como el péndulo esférico y el péndulo simple.

*Keywords:* Modelo dinámico, sistema subactuado, mecanismo de 5 barras, péndulo esférico.

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los sistemas más conocidos y de interés en el área de control automático es el péndulo invertido. Controlar este mecanismo es atractivo en el ámbito teórico y práctico. Las principales razones por las que este sistema es interesante investigar, es por su dinámica no lineal, sus características de inestabilidad y el grado de subactuación que contiene. Existen algunos sistemas basados en péndulos invertidos, los más comunes son, de acuerdo a (Alvarado et al., 2010):

- Carro-péndulo,
- Péndulo de Furuta,
- Péndulo con rueda inercial,
- Pendubot,
- Acrobot,
- Péndulo esférico.

El último sistema mencionado, el péndulo esférico, tiene la particularidad de tener un grado de subactuación dos. Consiste en un péndulo conectado por una unión esférica a un robot cartesiano (Wang et al., 2008), (Yang et al., 2000), o un mecanismo de cinco barras (Alvarado et al., 2010). Sin embargo, en todos los casos, se hacen simplificaciones en el modelado como son la linealización o consideración de masas puntuales. Conforme se desee realizar tareas de control más demandantes, se requiere contar con un modelo dinámico más completo.

La contribución de este trabajo es presentar un modelo dinámico sin ninguna de las simplificaciones anteriormente mencionadas.

Entonces, para un péndulo esférico donde se tiene una barra rígida, puede no ser muy eficiente utilizar el modelo considerando una masa puntual o aproximación lineal según la aplicación. Si se desea controlar el sistema, es necesario conocer un modelo matemático que describa su comportamiento real. Si se tiene un modelo restringido, tal que no representa una buena aproximación al sistema real, es necesario aplicar una ley de control con cierta robustez para compensar las incertidumbres paramétricas o

de modelado y cumplir satisfactoriamente con el objetivo de control.

Por lo tanto, en este trabajo se presenta el modelo dinámico del péndulo esférico invertido considerando una barra rígida, también, se demuestra que se puede simplificar el modelo al caso donde se considera masa puntual en el sistema.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Considere el sistema que se ilustra en la Figura 1a, el cual está constituido por un mecanismo de 5 barras cuyo espacio de trabajo está sobre el plano  $XY$  y un péndulo esférico cuya posición está definida por los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , y por las posiciones angulares  $q_i$  correspondientes al  $i$ -ésimo eslabón del mecanismo de 5 barras, estas últimas medidas a partir del eje  $X$  en sentido levógiro, tal como se ilustra en la Figura 1b. Se considera que el ángulo  $q_5$  es constante y los actuadores están en las articulaciones correspondientes a  $q_1$  y  $q_4$ .

Se tiene el péndulo invertido esférico como se muestra en la Figura 1. Este sistema es la combinación de un sistema planar de cinco barras y un péndulo esférico.

## 3. MODELADO DINÁMICO

La metodología que se empleó para obtener el modelo dinámico completo es:

- (1) Considerar dos subsistemas desacoplados, uno de ellos será el péndulo doble y el péndulo esférico  $\Sigma_1$ , y el otro subsistema es un péndulo doble de dos grados de libertad  $\Sigma_2$  (véase Figura 2).
- (2) Obtener las energías cinéticas y potenciales de ambos subsistemas.
- (3) Calcular el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de los subsistemas desacoplados.
- (4) Escribir la ecuaciones en su forma matricial y aumentada.
- (5) Considerar restricciones holonómicas.

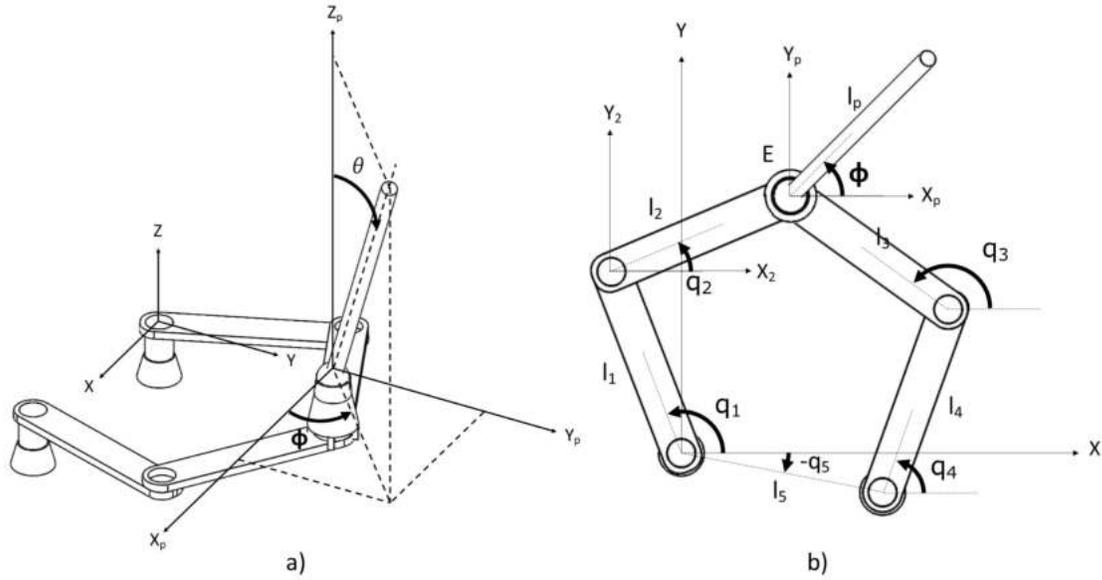


Fig. 1. Diagrama del sistema mecánico a) vista tridimensional b) vista superior.

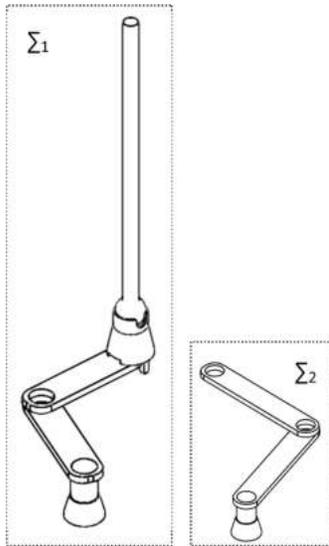


Fig. 2. Diagrama de los subsistemas

(6) Finalmente, reducir el número de ecuaciones de estado al de grados de libertad.

### 3.1 Energía cinética

Las energías cinéticas relacionadas a los eslabones 1 y 2 del subsistema  $\Sigma_1$  se obtienen con

$$K_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m_i v_i^2 + I_i \dot{q}_i^2), \quad (1)$$

donde  $i = 1, 2$ . La energía cinética del péndulo esférico  $K_3$  se obtiene utilizando la ecuación mencionada en (Arimoto, 1996)

$$K_3 = \frac{1}{2} \text{traza} \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_j} J_3 \left( \frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right], \quad (2)$$

donde

$$J_3 = \int_{L_3} r^{(3)} \left( r^{(3)} \right)^T dm,$$

$$T_3 = R_{z, q_1} D_{x, l_1} R_{z, q_2 - q_1} D_{x, l_2} R_{z, \phi - q_2} R_{x, \theta},$$

siendo  $r^{(3)}$  las coordenadas homogéneas de un punto en el marco  $(X_p, Y_p)$  y  $T_3$  es la matriz que las transforma al marco inercial  $(X, Y)$ . La notación  $R_{x, \theta}$  representa una rotación dextrógira  $\theta$  en el eje  $X$  y  $D_{x, l_1}$  representa una matriz de desplazamiento de longitud  $l_1$  en el eje  $x$ . Entonces, la energía cinética relacionada al péndulo esférico queda de la siguiente manera

$$K_3 = \frac{m_p}{48} (k_1 \dot{q}_1^2 + k_2 \dot{q}_2^2 + k_3 \dot{\theta}^2 + k_4 \dot{\phi}^2 + k_5 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + k_6 \dot{q}_1 + k_7 \dot{q}_2), \quad (3)$$

donde

$$k_1 = 24l_1^2,$$

$$k_2 = 24l_2^2,$$

$$k_3 = 2 (3r_2^2 + 3r_1^2 + 4l_p^2),$$

$$k_4 = (3r_2^2 + 3r_1^2 - 4l_p^2) \cos(2\theta) + 9r_2^2 + 9r_1^2 + 4l_p^2,$$

$$k_5 = 48l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1),$$

$$k_6 = -12l_1 l_p \left( (\dot{\phi} + \dot{\theta}) f_1 + (\dot{\theta} - \dot{\phi}) g_1 \right),$$

$$k_7 = -12l_2 l_p \left( (\dot{\phi} + \dot{\theta}) f_2 + (\dot{\theta} - \dot{\phi}) g_2 \right)$$

$$f_1 = \cos(\theta - q_1 + \phi),$$

$$g_1 = \cos(\theta + q_1 - \phi),$$

$$f_2 = \cos(\theta - q_2 + \phi),$$

$$g_2 = \cos(\theta + q_2 - \phi).$$

La energía cinética total del subsistema  $\Sigma_1$  está dado por la suma de todas las energías cinéticas

$$\mathcal{K}_1(\eta, \dot{\eta}) = \sum_{i=1}^3 K_i.$$

Para obtener la energía cinética  $\mathcal{K}_2$  del subsistema  $\Sigma_2$  se utiliza (1) cambiando los subíndices correspondientes.

### 3.2 Energía potencial

Dado que el mecanismo de 5 barras se mueve en el plano horizontal, sólo se requiere calcular la energía potencial en el péndulo esférico, la cual está dada por

$$U(\eta) = \frac{1}{2}m_p g l_p \cos(\theta). \quad (4)$$

### 3.3 Mecanismo desacoplado

Se define el lagrangiano  $L(\eta, \dot{\eta})$  de la siguiente manera

$$L(\eta, \dot{\eta}) = K(\eta, \dot{\eta}) - U(\eta),$$

donde  $K(\eta, \dot{\eta}) = \mathcal{K}_1(\eta, \dot{\eta}) + \mathcal{K}_2(\eta, \dot{\eta})$ . Para describir el sistema desacoplado, se considera el siguiente vector de coordenadas generalizadas

$$\eta = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \theta \ \phi]^T. \quad (5)$$

Entonces, se obtienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}_i} \right] - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \eta_i} = \tau_i \quad (6)$$

siendo  $\tau$  es el vector de fuerzas generalizadas. En (Kelly et al., 2005) se describe la forma matricial de la siguiente manera

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G(\eta) = \tau$$

donde  $M$  es la matriz de inercia,  $C$  es la matriz de coriolis y  $G$  es el vector de pares gravitacionales, los cuales para nuestro caso son

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 & m_{15} & m_{16} \\ m_{12} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} & 0 & 0 \\ m_{15} & m_{25} & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ m_{16} & m_{26} & 0 & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 + l_1^2 m_p + l_1^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1, \\ m_{12} &= l_1(l_2 m_p + l_{c2} m_2) \cos(q_2 - q_1), \\ m_{15} &= -\frac{1}{4} l_1 l_p m_p (\cos(\theta - q_1 + \phi) + \cos(\theta + q_1 - \phi)), \\ m_{16} &= \frac{1}{4} l_1 l_p m_p (\cos(\theta + q_1 - \phi) - \cos(\theta - q_1 + \phi)), \\ m_{22} &= I_2 + l_2^2 m_p + l_{c2}^2 m_2, \\ m_{25} &= -\frac{1}{4} l_2 l_p m_p (\cos(\theta - q_2 + \phi) + \cos(\theta + q_2 - \phi)), \\ m_{26} &= \frac{1}{4} l_2 l_p m_p (\cos(\theta + q_2 - \phi) - \cos(\theta - q_2 + \phi)), \\ m_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3, \\ m_{34} &= m_3 l_4 l_{c3} \cos(q_4 - q_3), \\ m_{44} &= m_4 l_{c4}^2 + m_3 l_4^2 + I_4, \\ m_{55} &= \frac{1}{12} m_p (4l_p^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2), \\ m_{66} &= \frac{m_p}{24} ((3r_2^2 + 3r_1^2 - 4l_p^2) \cos(2\theta) + 9r_2^2 \\ &\quad + 9r_1^2 + 4l_p^2), \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{26} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & 0 & 0 & 0 & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & 0 & 0 & c_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} c_{12} &= -l_1 (l_{c2} m_2 + l_2 m_p) \dot{q}_2 \sin(q_2 - q_1), \\ c_{15} &= \frac{1}{4} l_1 l_p m_p (2\dot{\phi} + \dot{\theta}) \sin(\theta - q_1 + \phi) \\ &\quad + \frac{1}{4} l_1 l_p m_p (\dot{\theta} - 2\dot{\phi}) \sin(\theta + q_1 - \phi), \\ c_{16} &= \frac{1}{4} l_1 l_p m_p \dot{\phi} (\sin(\theta - q_1 + \phi) + \sin(\theta + q_1 - \phi)), \\ c_{21} &= l_1 (l_{c2} m_2 + l_2 m_p) \dot{q}_1 \sin(q_2 - q_1), \\ c_{25} &= \frac{1}{4} l_2 l_p m_p (2\dot{\phi} + \dot{\theta}) \sin(\theta - q_2 + \phi) \\ &\quad + \frac{1}{4} l_2 l_p m_p (\dot{\theta} - 2\dot{\phi}) \sin(\theta + q_2 - \phi), \\ c_{26} &= \frac{1}{4} l_2 l_p m_p \dot{\phi} (\sin(\theta - q_2 + \phi) + \sin(\theta + q_2 - \phi)), \\ c_{34} &= -m_3 l_4 l_{c3} \sin(q_4 - q_3) \dot{q}_4, \\ c_{43} &= m_3 l_4 l_{c3} \sin(q_4 - q_3) \dot{q}_3, \\ c_{51} &= \frac{1}{4} (l_1 l_p m_p \dot{q}_1 (\sin(\theta + q_1 - \phi) - \sin(\theta - q_1 + \phi))), \\ c_{52} &= \frac{1}{4} (l_2 l_p m_p \dot{q}_2 (\sin(\theta + q_2 - \phi) - \sin(\theta - q_2 + \phi))), \\ c_{56} &= \frac{1}{24} m_p \dot{\phi} (-4l_p^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2) \sin(2\theta), \\ c_{61} &= -\frac{1}{4} (l_1 l_p m_p \dot{q}_1 (\sin(\theta - q_1 + \phi) + \sin(\theta + q_1 - \phi))), \\ c_{62} &= -\frac{1}{4} (l_2 l_p m_p \dot{q}_2 (\sin(\theta - q_2 + \phi) + \sin(\theta + q_2 - \phi))), \\ c_{65} &= -\frac{1}{12} m_p \dot{\phi} (-4l_p^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2) \sin(2\theta), \end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} g l_p m_p \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}^T.$$

y

$$\tau = [\tau_1 \ 0 \ 0 \ \tau_4 \ 0 \ 0]^T.$$

### 3.4 Sistema restringido

Para obtener el sistema restringido, nos basaremos en la metodología dada en (Ghorbel et al., 2000), la cual requiere un vector que incluya las restricciones y las coordenadas generalizadas, que en nuestro caso es

$$\beta = [r_1 \ r_2 \ q_1 \ q_4 \ \theta \ \phi]^T$$

donde las restricciones  $r_1 = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) - l_3 \cos(q_3) - l_4 \cos(q_4) - l_5 \cos(q_5)$  y  $r_2 = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_3) - l_4 \sin(q_4) - l_5 \sin(q_5)$  se obtienen de la cinemática directa (véase en apéndice A). Continuando con la metodología se requiere la matriz  $\psi = \frac{\partial \beta}{\partial \eta}$ , es decir

$$\psi = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) & -l_2 \sin(q_2) & l_3 \sin(q_3) & l_4 \sin(q_4) & 0 & 0 \\ l_1 \cos(q_1) & l_2 \cos(q_2) & -l_3 \cos(q_3) & -l_4 \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{lineal del mecanismo de 5 barras y el péndulo esférico} \\ \text{por separado, haciendo un acoplamiento de modelos por} \\ \text{medio de la retroalimentación de estados. En este modelo} \\ \text{se presenta el efecto que produce el péndulo esférico en} \\ \text{el mecanismo de 5 barras y viceversa.} \end{array} \quad (7)$$

Finalmente se obtiene el modelo dinámico del mecanismo de 5 barras con un péndulo esférico, dado por

$$\hat{M}(\eta)\ddot{\gamma} + \hat{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\gamma} + \hat{G}(\eta) = \hat{\tau}, \quad (8)$$

donde

$$\gamma = [q_1 \ q_4 \ \theta \ \phi]^T, \\ \dot{\eta} = \rho(\eta)\dot{\gamma},$$

$$\hat{M}(\eta) = \rho(\eta)^T M(\eta) \rho(\eta),$$

$$\hat{C}(\eta, \dot{\eta}) = \rho(\eta)^T M(\eta) \dot{\rho}(\eta, \dot{\eta}) + \rho(\eta)^T C(\eta, \dot{\eta}) \rho(\eta)$$

$$\hat{G}(\eta) = \rho(\eta)^T G(\eta)$$

$$\hat{\tau} = \rho(\eta)^T \tau = [\tau_1 \ \tau_4 \ 0 \ 0]^T.$$

$$\rho(\eta) = \psi^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} \\ I_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\rho}(\eta, \dot{\eta}) = -\psi^{-1} \frac{d}{dt} (\psi) \rho(\eta).$$

#### 4. CASOS PARTICULARES

##### 4.1 Mecanismo de 5 barras con péndulo esférico: masa puntual

Considere el mecanismo de 5 barras con péndulo esférico de masa puntual. Dicho sistema no presenta momento de inercia con respecto al centro de masa en el péndulo esférico, por lo tanto, la energía cinética (3) se reduce a lo siguiente

$$K_3 = \frac{m_p}{4} (k_1 \dot{q}_1^2 + k_2 \dot{q}_2^2 + k_3 \dot{\theta}^2 + k_4 \dot{\phi}^2) \\ + \frac{m_p}{4} (k_5 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + k_6 \dot{q}_1 + k_7 \dot{q}_2),$$

donde

$$k_1 = 2l_1^2,$$

$$k_2 = 2l_2^2,$$

$$k_3 = 2l_p^2,$$

$$k_4 = l_p^2 - l_p^2 \cos(2\theta),$$

$$k_5 = 4l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1),$$

$$k_6 = -12l_1 l_p \left( (\dot{\phi} + \dot{\theta}) f_1 + (\dot{\theta} - \dot{\phi}) g_1 \right),$$

$$k_7 = -12l_2 l_p \left( (\dot{\phi} + \dot{\theta}) f_2 + (\dot{\theta} - \dot{\phi}) g_2 \right)$$

$$f_1 = \cos(\theta - q_1 + \phi),$$

$$g_1 = \cos(\theta + q_1 - \phi),$$

$$f_2 = \cos(\theta - q_2 + \phi),$$

$$g_2 = \cos(\theta + q_2 - \phi).$$

El sistema completo queda de la forma (8), la diferencia se tiene en las ecuaciones de movimiento (6), por lo tanto, cambian los elementos de las matrices.

Este modelo dinámico resulta ser más apegado al comportamiento real con respecto al modelo mostrado en (Alvarado et al., 2010), ya que se muestra una aproximación

##### 4.2 Mecanismo de 5 barras

El modelo dinámico del mecanismo de 5 barras (sin considerar el péndulo esférico) se obtiene a partir de (8). Para este caso considere el vector de estados de la siguiente manera

$$\gamma = [q_1 \ q_4]^T.$$

Observe que este modelo no considera los efectos del péndulo invertido, por lo tanto, todos los elementos relacionados al péndulo se hacen nulos (es decir,  $\theta = \phi = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ ). Por lo tanto, las matrices del mecanismo de 5 barras quedan de la siguiente manera

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\tau = [\tau_1 \ 0 \ 0 \ \tau_4]^T.$$

Finalmente, considerando  $\gamma, \eta, \rho$  y  $\psi$  como las descritas anteriormente pero de manera reducida, es decir, sin las componentes relativas al péndulo esférico, se obtiene el mismo modelo dinámico descrito en (Violante, 2018).

##### 4.3 Péndulo esférico: barra rígida

El modelo dinámico del péndulo esférico considerando una barra rígida, se obtiene a partir de la energía cinética (3), pero se hacen nulos los elementos que no interfieren en el sistema (es decir,  $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ ), por lo que se reduce la energía cinética de la siguiente manera

$$K_3 = \frac{1}{8} m_p l_p^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) + \frac{1}{48} m_p (9r_c + l_p^2) \dot{\phi}^2 \\ + \frac{1}{48} m_p \left( (3r_c - l_p^2) \cos(2\theta) \dot{\phi}^2 + (6r_c + 2l_p^2) \dot{\theta}^2 \right) \quad (9)$$

donde  $r_c = r_1^2 + r_2^2$ . Para este caso considere el vector de estados

$$\gamma = [\theta \ \phi]^T,$$

por lo tanto, las matrices del péndulo esférico quedan de la siguiente manera

$$M = \begin{bmatrix} m_{55} & 0 \\ 0 & m_{66} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{56} \\ c_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}gl_p m_p \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\tau = [0 \ 0]^T.$$

Observe que en este caso el péndulo es libre, no tiene fuerzas externas.

#### 4.4 Energía cinética: Péndulo esférico considerando masa puntual

Ahora considere el péndulo esférico con masa puntual. Dicho sistema no presenta momento de inercia con respecto al centro de masa, por lo tanto, la energía cinética (9) se reduce a lo siguiente

$$K_3 = \frac{1}{8}m_p l_p^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right),$$

donde esta energía cinética coincide con la descrita en (Marion, 1996).

## 5. CONCLUSIONES

El modelo dinámico obtenido presenta una mayor generalización en comparación a los modelos presentados en la literatura ya que se considera una barra rígida (no masa puntual). Dada la caracterización del péndulo esférico aquí presentada, es posible obtener la inercia sobre cualquier eje de rotación. Por otra parte, aplicando las consideraciones correctas, el modelo dinámico del sistema completo coincide con los modelos simplificados como los mostrados en la sección 4.

## REFERENCES

- Alvarado, O., Ollervides, J., and Campa, R. (2010). Modelado y Control de un Mecanismo Tipo Péndulo Invertido Esférico. *Congreso anual de La Asociación de México de Control Automático*.
- Arimoto, S. (1996). *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems*. 1st edition.
- Ghorbel, F.H., Member, S., Chételat, O., Gunawardana, R., and Longchamp, R. (2000). Modeling and Set Point Control of Closed-Chain Mechanisms : Theory and Experiment. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, 8(5), 801–815.
- Kelly, R., Santibáñez, V., and Loria, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. 1st edition.
- Marion, J.B. (1996). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*.
- Violante, C. (2018). *Diseño y construcción de un mecanismo de cinco barras*. Master's thesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Wang, H., Chamroo, A., Vasseur, C., and Koncar, V. (2008). Stabilization of a 2-DOF Inverted Pendulum by a Low Cost Visual Feedback. *American Control Conference*, 3851–3856.
- Yang, R., Kuen, Y.y., Li, Z., Bay, C.W., and Kong, H. (2000). Stabilization of A 2-DOF Spherical Pendulum

on X-Y table. *IEEE International Conference on Control Applications*.

## Appendix A. CINEMÁTICA DIRECTA

Para obtener la posición y orientación del efector final del sistema con respecto al punto de origen, con las posiciones y orientaciones de cada articulación del mecanismo. Por lo tanto, el análisis de cinemática directa se hace en el efector final  $E$ , donde es la unión del eslabón 2, 3 y el péndulo esférico.

En la Figura 1b se observan dos maneras de llegar al efector final  $E$  en función de las longitudes  $l_i$  y ángulos  $q_i$  donde  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Por lo tanto se tienen la siguientes ecuaciones

$$E_x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) \tag{A.1}$$

$$= l_3 \cos(q_3) + l_4 \cos(q_4) + l_5 \cos(q_5),$$

$$E_y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) \tag{A.2}$$

$$= l_3 \sin(q_3) + l_4 \sin(q_4) + l_5 \sin(q_5),$$

donde (A.1) y (A.2) corresponden a las coordenadas en  $X$  y  $Y$  del efector final  $E$ , respectivamente. Realizando una serie de cálculos se obtiene que

$$q_3 = 2 \arctan \left( \frac{B + \sqrt{B^2 + C^2 - D}}{C + D} \right)$$

donde

$$B = 2l_3 (l_4 \sin(q_4) + l_5 \sin(q_5) - l_1 \sin(q_1)),$$

$$C = 2l_3 (l_4 \cos(q_4) + l_5 \cos(q_5) - l_1 \cos(q_1)),$$

$$D = -l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2 - l_5^2 + 2l_1 l_4 \cos(q_1 - q_4) + 2l_1 l_5 \cos(q_1 - q_5) - 2l_4 l_5 \cos(q_4 - q_5).$$

Dado que  $q_5$  es fijo y  $q_3$  se acaba de obtener, se puede despejar  $q_2$  de (A.1). De esta forma,  $q_2$  y  $q_3$  quedan únicamente en función de  $q_1$  y  $q_4$ .