

# Modelado del motor de inducción en la formulación Euler-Lagrange considerando las pérdidas del núcleo

Hernández Rodríguez I. V.\* Guerrero Ramírez G. V.\*  
García Beltrán C. D.\* Adam Medina M.\*  
Torres del Carmen F. J.\*\* Ortiz Rangel E.\*

\* *TecNM-CENIDET, Interior Internado Palmira S/N, Cuernavaca Morelos (isaura.hernandez17ea@cenidet.edu.mx, gerardog@cenidet.edu.mx, cgarcia@cenidet.edu.mx, adam@cenidet.edu.mx, estela\_or@cenidet.edu.mx)*

\*\* *Universidad de Guanajuato, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca (fdj.torres@ugto.mx)*

Resumen: El modelado tradicional del motor de inducción se realiza mediante el análisis del circuito equivalente considerando el circuito magnético lineal y despreciando las pérdidas del núcleo. Este artículo presenta el modelado matemático del motor de inducción trifásico en coordenadas ABC incluyendo las pérdidas del núcleo mediante la formulación Euler-Lagrange. Las pérdidas del núcleo se modelan por medio de una resistencia eléctrica que se incluye en el circuito equivalente trifásico del motor, el valor aproximado de esta resistencia es determinado experimentalmente. Siendo el motor de inducción un sistema que contiene componentes de diferente naturaleza energética (eléctrica, mecánica, magnética), la formulación Euler-Lagrange considera de manera implícita la interacción de sus componentes. El modelo matemático desarrollado se simula con parámetros obtenidos experimentalmente.

*Keywords:* Motor de inducción, modelado Euler-Lagrange, pérdidas del núcleo.

## 1. INTRODUCCIÓN

En México, aproximadamente el 70 % del consumo de la energía eléctrica en la industria se debe al funcionamiento de los motores eléctricos, de los cuales, el 60 % son motores de inducción<sup>1</sup>. Además, se ha incrementado el uso de los motores de inducción en robótica y en vehículos eléctricos entre otras aplicaciones que requieren de alta eficiencia (Torres del Carmen, 2017; Yilmaz, 2015). Esto hace deseable tener modelos que emulen de manera más precisa su comportamiento para poder predecirlo y desarrollar controladores que garanticen eficiencia, confiabilidad y una vida útil larga.

El motor de inducción es un sistema físico donde se presenta la interacción de efectos de diferente naturaleza física. Si se considera a estos efectos como subsistemas de un sistema principal, se puede considerar que el motor de inducción contiene los subsistemas eléctrico, mecánico, magnético y térmico principalmente, los cuales están fuertemente acoplados.

En el modelado clásico del motor de inducción se obtienen las ecuaciones del subsistema eléctrico mediante las leyes

de Kirchhoff y del mecánico mediante las leyes de Newton. Por separado se debe establecer de forma explícita el acoplamiento entre ambos subsistemas. Además, se considera al subsistema magnético como lineal y sin pérdidas magnéticas (P. Krause, 2012). La formulación Euler-Lagrange expresa de manera implícita la interacción entre sistemas de diferente naturaleza física (Wellstead, 1979).

Las principales pérdidas magnéticas son las pérdidas por histéresis y por corrientes de eddy, conocidas como pérdidas del núcleo. Estas pérdidas se pueden calcular como funciones de la densidad de campo magnético máximo, de la frecuencia, de las características de los materiales y de las dimensiones del motor. Este método de cálculo se utiliza ampliamente en el diseño constructivo del motor con el objetivo de minimizar las pérdidas del núcleo (Dang L., 2016; Yiqi Liu, 2017; Bracikowski N., 2012).

Una alternativa para modelar las pérdidas del núcleo cuando no se tienen los datos de construcción del mismo, es mediante una resistencia  $R_c$  en paralelo con la rama de magnetización en el circuito equivalente monofásico (Fitzgerald A. E., 2003; El-Hawary, 2008). El valor aproximado de esta resistencia y de los otros parámetros del motor de inducción se pueden obtener experimentalmente.

<sup>1</sup> Datos de la Comisión Nacional para el Uso Eficiente de la Energía

El circuito equivalente monofásico se utiliza principalmente para análisis de comportamiento en estado estacionario, para obtener un modelo dinámico, en este artículo se utilizará el circuito equivalente trifásico con la resistencia que representa pérdidas del núcleo en paralelo con la inductancia de magnetización en cada una de las fases del estator.

En la segunda sección se muestra el desarrollo del modelo matemático del motor de inducción trifásico en coordenadas ABC, incluyendo las pérdidas del núcleo y mediante la formulación Euler-Lagrange por mallas. En la tercera sección se presenta de manera resumida el procedimiento para realizar las pruebas y calcular los parámetros del motor de inducción a partir del circuito equivalente monofásico. El modelo matemático resultante se simula con los parámetros obtenidos y los resultados de simulación se presentan en la sección cuatro.

## 2. MODELADO DEL MOTOR INCLUYENDO LAS PÉRDIDAS DEL NÚCLEO

La forma comúnmente utilizada para calcular las pérdidas por histéresis y las pérdidas por corrientes de eddy es mediante (1) y (2) respectivamente (Stein R., 1979).

$$P_h = k_h V f B_{max}^n \quad (1)$$

$$P_e = k_e V a f^2 B_{max}^2 \quad (2)$$

donde  $V$  es el volumen del núcleo,  $a$  es el ancho de la laminación del núcleo,  $f$  es la frecuencia y  $B_{max}$  es la densidad de flujo máximo. Las constantes  $k_h$ ,  $k_e$  y  $n$  se encuentran empíricamente y dependen de las características magnéticas del material del núcleo.

En (1) y (2) se requiere información del motor que no se puede obtener fácilmente, por lo que una alternativa es representar las pérdidas por histéresis y por corrientes de eddy mediante la resistencia  $R_c$  en el circuito equivalente monofásico de la Figura 1.

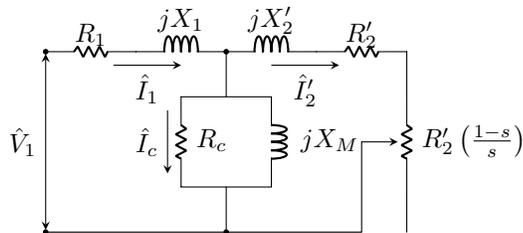


Figura 1. Circuito equivalente monofásico del motor de inducción.

El circuito de la Figura 1 también se utiliza para la determinación de los parámetros del motor. Los parámetros obtenidos son para el circuito equivalente monofásico y se deben adecuar para el circuito equivalente trifásico. Las relaciones entre los parámetros para ambos casos se muestran en la Tabla 1 y son válidas para sistemas balanceados. En la Tabla 1,  $\omega_e = 2\pi f$  y  $r_s$ ,  $r_r$ ,  $L_{ls}$ ,

Tabla 1. Relaciones entre parámetros.

$R_1 = r_s$
$R'_2 = r_r$
$X_1 = L_{ls}\omega_e$
$X_2 = L_{lr}\omega_e$
$X_M = \frac{3}{2}L_{ms}\omega_e$
$R_c = \frac{3}{2}r_c$

$L_{lr}$ ,  $L_{ms}$ , y  $r_c$  son los parámetros del circuito equivalente trifásico.

En la Figura 2 se muestra el circuito equivalente trifásico del motor de inducción incluyendo las pérdidas del núcleo mediante la resistencia  $r_c$ . Esta representación se emplea para el análisis del comportamiento dinámico y se utiliza para desarrollar el modelo matemático del motor de inducción.

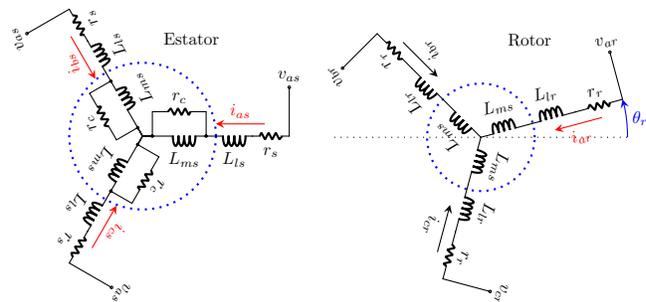


Figura 2. Diagrama trifásico del motor de inducción incluyendo  $r_c$ .

El modelado mediante Euler-Lagrange trata a los componentes de un sistema como dispositivos manipuladores de energía y la forma en que procesan la energía determina la respuesta dinámica del sistema. Al desarrollar el modelo, las ecuaciones resultantes incluyen de manera implícita las interacciones entre los componentes del sistema. Para el modelado se requiere conocer los elementos que componen el sistema y su función de energía. En la Figura 3 se muestran una simplificación del proceso para realizar el modelado.

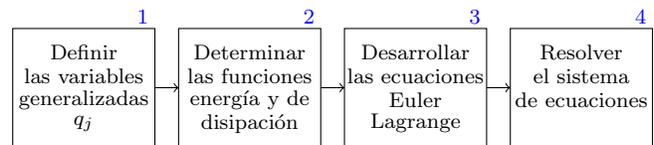


Figura 3. Proceso de modelado Euler-Lagrange.

### 2.1 Definir las variables generalizadas

Lo primero es definir las variables generalizadas. Se eligen las cargas como las variables generalizadas eléctricas y se selecciona a la posición angular del rotor ( $\theta_r$ ) como la variable generalizada mecánica. En las Figuras 4, 5 y 6 se muestran las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  del estator y del rotor indicando las variables generalizadas para cada una

de las fases. Estas figuras también muestran las mallas adicionales debidas a la inclusión de la resistencia  $r_c$ , estos elementos adicionales causan el incremento del orden del modelo del motor. A continuación se enlistan las variables generalizadas.

$\dot{\mathbf{q}}_s$  Corrientes en el estator  $\dot{\mathbf{q}}_s^T = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]$   
 $\dot{\mathbf{q}}_r$  Corrientes en el rotor  $\dot{\mathbf{q}}_r^T = [\dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]$   
 $\dot{\mathbf{q}}_{r_c}$  Corrientes de las mallas de  $r_c$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{r_c}^T = [\dot{q}_7 \quad \dot{q}_8 \quad \dot{q}_9]$   
 $q_m$  Posición angular del rotor ( $\theta_r$ )

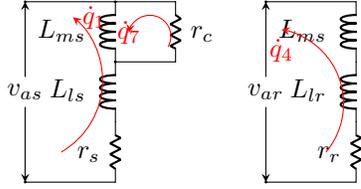


Figura 4. Representación de la fase a.

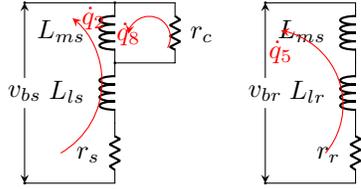


Figura 5. Representación de la fase b.

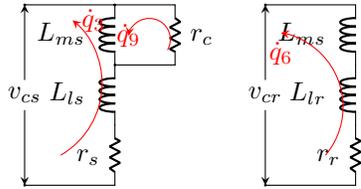


Figura 6. Representación de la fase c.

Las mallas indicadas con las coordenadas  $q_7$ ,  $q_8$  y  $q_9$  son las que se agregan para representar las pérdidas del núcleo en el modelo del motor.

## 2.2 Determinar las funciones de energía y de disipación

Una vez definidas las variables generalizadas se obtienen las funciones de energía y de disipación respecto de estas variables incluyendo todos los elementos del sistema. Para cada elemento se debe conocer:

- La naturaleza del elemento, que puede ser fuente, almacenador o disipador.
- La relación constitutiva que representan sus propiedades físicas.

En el caso del motor de inducción trifásico son doce elementos almacenadores eléctricos y un elemento almacenador mecánico que corresponden a las doce inductancias y a la constante de inercia del rotor. Se tienen nueve elementos disipadores eléctricos que son las resistencias y uno mecánico representado por la constante de fricción

viscosa. Las funciones de energía ( $L^*$ ) y de disipación ( $G$ ) son las siguientes:

$$L^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{L}_{ks} \dot{\mathbf{q}}_s + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{L}_{kr} \dot{\mathbf{q}}_r + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T (\mathbf{L}_{sr} + \mathbf{L}_M) \dot{\mathbf{q}}_r + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{r_c})^T (\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_{rs}) (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{r_c}) + \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (3)$$

$$G = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{R}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{q}}_r + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{r_c}^T \mathbf{R}_c \dot{\mathbf{q}}_{r_c} + \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2 \quad (4)$$

En (3), las matrices  $\mathbf{L}_{ks}$  y  $\mathbf{L}_{kr}$  contienen a las inductancias de dispersión de las tres fases del estator y del rotor respectivamente. Las matrices  $\mathbf{L}_{sr}$  y  $\mathbf{L}_{rs}$  representan los efectos de las inductancias mutuas entre el estator el rotor y la matriz  $\mathbf{L}_M$  contiene los elementos de magnetización entre fases en el estator y en el rotor.

$$\mathbf{L}_{ks} = \begin{bmatrix} L_{ls} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{kr} = \begin{bmatrix} L_{lr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{lr} & 0 \\ 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_M = \begin{bmatrix} L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ms} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} L_{ms} \cos \theta_r & L_{ms} \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_{ms} \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{ms} \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & L_{ms} \cos \theta_r & L_{ms} \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_{ms} \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_{ms} \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) & L_{ms} \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \mathbf{L}_{rs}^T$$

En (4), las matrices  $\mathbf{R}_s$  y  $\mathbf{R}_r$  contienen las resistencias de las tres fases del estator y del rotor, la matriz  $\mathbf{R}_c$  contiene las resistencias que representan las pérdidas del núcleo en las tres fases.

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} r_c & 0 & 0 \\ 0 & r_c & 0 \\ 0 & 0 & r_c \end{bmatrix}$$

## 2.3 Desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange

Con las variables generalizadas y las funciones de energía y de disipación, se desarrollan las ecuaciones de Euler-Lagrange indicadas en (5) a (8). La expresión (7) está dada por las mallas que representan las pérdidas del núcleo y al desarrollarla incrementa en tres el orden del modelo.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{q}_s} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s} = \mathbf{v}_s \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{q}_r} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} = \mathbf{v}_r \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{r_c}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{q}_{r_c}} + \frac{\partial G}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{r_c}} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_m} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_m} = -\tau_L \quad (8)$$

donde

$\mathbf{v}_s = [v_{as} v_{bs} v_{cs}]$  son los voltajes del estator.  
 $\mathbf{v}_r = [v_{ar} v_{br} v_{cr}]$  son los voltajes del rotor (son cero para el motor con rotor de jaula de ardilla).  
 $\tau_L$  es el par de carga.

#### 2.4 Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange

Resolviendo (5), (6), (7) y (8) se obtiene el siguiente modelo matemático del motor de inducción incluyendo las pérdidas del núcleo.

$$(\mathbf{L}_{ks} + \mathbf{L}_M + \mathbf{L}_{rs}) \ddot{\mathbf{q}}_s - (\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_{rs}) \ddot{\mathbf{q}}_{rc} + \mathbf{R}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \left[ \frac{d\mathbf{L}_M}{dt} \right] (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rc}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{L}_{rs}}{\partial q_m} \right] \dot{q}_m (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rc}) = \mathbf{v}_s \quad (9)$$

$$(\mathbf{L}_{kr} + \mathbf{L}_{sr} + \mathbf{L}_M) \ddot{\mathbf{q}}_r + \left[ \frac{\partial \mathbf{L}_{sr}}{\partial q_m} \right] \dot{q}_m \dot{\mathbf{q}}_r + \left[ \frac{d\mathbf{L}_M}{dt} \right] \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{v}_r \quad (10)$$

$$(\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_{rs}) (\ddot{\mathbf{q}}_{rc} - \ddot{\mathbf{q}}_s) + \left[ \frac{d\mathbf{L}_M}{dt} \right] (\dot{\mathbf{q}}_{rc} - \dot{\mathbf{q}}_s) + \left[ \frac{\partial \mathbf{L}_{rs}}{\partial q_m} \right] \dot{q}_m (\dot{\mathbf{q}}_{rc} - \dot{\mathbf{q}}_s) + \mathbf{R}_c \dot{\mathbf{q}}_{rc} = 0 \quad (11)$$

$$J \ddot{q}_m - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ \frac{\partial \mathbf{L}_{sr}}{\partial q_m} \right] \dot{\mathbf{q}}_r + B \dot{q}_m - \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rc})^T \left[ \frac{\partial \mathbf{L}_{rs}}{\partial q_m} \right] (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rc}) = -\tau_L \quad (12)$$

Este modelo matemático se desarrolló considerando variable a la inductancia de magnetización ( $L_{ms}$ ) con el objetivo de incluir el efecto de la saturación magnética en un trabajo posterior.

Para simular este modelo matemático se requieren los parámetros del motor, mismos que se obtuvieron con las pruebas que se indican en la siguiente sección.

### 3. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

Las pruebas para la determinación de los parámetros del motor de inducción presentadas en esta sección se diseñan basadas en el método cuatro descrito en la sección 5.10 del estándar IEEE std 112-2017. Los parámetros a determinar son los mostrados en la Figura 1.

#### 3.1 Prueba de resistencia de cd

La prueba de resistencia de cd tiene como objetivo determinar un valor aproximado de la resistencia del devanado

del estator. Se realiza a temperatura ambiente aplicando un voltaje de cd a dos terminales del devanado del estator hasta llegar al valor nominal de la corriente. En esta prueba, cuando la conexión de los devanados es en estrella la corriente fluye a través de dos devanados del estator, de modo que la resistencia total de esta trayectoria es  $2R_1$ , por lo que resistencia de un devanado del estator se determina mediante (13).

$$R_1 = \frac{V_{CD}}{2I_{CD}} \quad (13)$$

Se encuentra un promedio en las mediciones realizadas en la combinación de las tres terminales del estator ( $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ ). Además, se realizan mediciones de temperatura ambiente ya que se deben realizar ajustes por temperatura en caso de ser necesario. El diagrama de conexión para la prueba de resistencia de cd se muestra en la Figura 7.

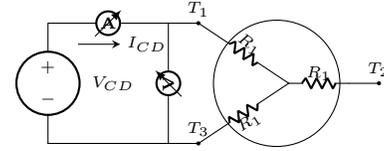


Figura 7. Diagrama de conexión para prueba de resistencia de cd.

#### 3.2 Prueba de vacío

Esta prueba se realiza a frecuencia nominal y con voltajes trifásicos balanceados. La potencia de entrada medida es igual a las pérdidas en vacío del motor. Para separar las pérdidas en vacío en pérdidas rotacionales y en pérdidas del núcleo, se deben tomar las mediciones a tres o más valores de voltaje entre el 125 % y el 75 % de su valor nominal. Uno de estos puntos debe ser cercano al 100 % del voltaje nominal. También se debe medir en tres o más valores entre el 50 % y el 20 % del voltaje nominal. En la Figura 8 se muestra el diagrama de conexión para la prueba de vacío.

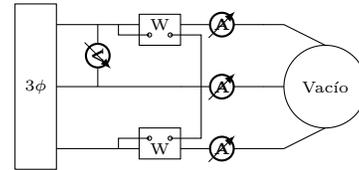


Figura 8. Diagrama de conexión para la prueba en vacío.

#### 3.3 Prueba de rotor bloqueado

En esta prueba se deben tener medios adecuados para bloquear el rotor e impedir su giro. Se realizan simultáneamente las mediciones de los voltajes, las corrientes y la potencia de entrada a diferentes niveles de voltaje hasta llegar al valor nominal de la corriente del motor. Se debe monitorear la temperatura del motor considerando que la máquina no debe presentar un incremento de temperatura de más de 40 grados centígrados. Esta prueba debe

realizarse a una frecuencia diferente a la frecuencia nominal del motor, el estándar recomienda el 25 % del valor nominal. La Figura 9 muestra el diagrama de conexión para la prueba de rotor bloqueado.

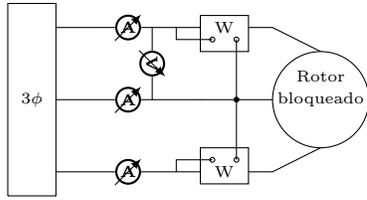


Figura 9. Diagrama de conexión para la prueba de rotor bloqueado.

### 3.4 Cálculo de los parámetros $X_1$ , $X_2'$ , $X_M$ y $R_2'$

Con los resultados de las pruebas de vacío y de rotor bloqueado se calculan la reactancia de dispersión del estator ( $X_1$ ), la reactancia de dispersión del rotor reflejada al estator ( $X_2'$ ), la reactancia mutua ( $X_M$ ) y la resistencia del rotor reflejada al estator ( $R_2'$ ). El detalle para el cálculo de estos parámetros se muestra en el estándar.

### 3.5 Cálculo de $R_c$

Las pérdidas del núcleo  $P_c$  se obtienen restando las pérdidas por fricción ( $P_{fw}$ ) y las del cobre del estator ( $3I_{10}^2R_1$ ) de la potencia de entrada en la prueba de vacío ( $P_0$ ). El valor de  $P_{fw}$  se puede calcular mediante diferentes métodos, en este trabajo se utiliza el indicado en el estándar IEEE 112.

$$P_c = P_0 - P_{fw} - 3I_{10}^2R_1 \quad (14)$$

Con (14) se obtiene un valor aproximado de las pérdidas del núcleo trifásicas. Considerando que en condiciones de vacío, la corriente del estator es relativamente baja y como una primera aproximación se puede ignorar la caída de voltaje a través de resistencia ( $R_1$ ) y la reactancia de dispersión del estator ( $X_1$ ), entonces el voltaje a través de  $R_c$  es el voltaje  $V_1$  y corresponde al voltaje de fase a neutro con el que se realizó la prueba de vacío ( $V_{10}$ ) por lo que el valor de la resistencia  $R_c$  del circuito equivalente de la Figura 1 es,

$$R_c = \frac{3V_{10}^2}{P_c} \quad (15)$$

## 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El modelo representado por (9), (10), (11) y (12) se programó para calcular las corrientes de estator, las corrientes de rotor, el par electromecánico y la velocidad del rotor. Se utilizaron los parámetros mostrados en la Tabla A.3 que corresponden al motor de inducción de la Tabla A.1.

La Tabla 2 muestra los valores RMS de las corrientes del estator y del rotor en diferentes condiciones de simulación.

Las simulaciones se realizaron con voltaje y frecuencia de alimentación constantes y nominales (220 volts de línea a línea y 60Hz). En la primera columna de la Tabla 2 se indican las condiciones de par de carga a las que se realizaron las simulaciones. El modelo del motor de inducción con pérdidas del núcleo se compara con el modelo del motor de inducción sin pérdidas del núcleo. Este último también se desarrolló mediante la formulación Euler-Lagrange.

Tabla 2. Resultados de simulación.

Carga	Corriente del estator		Corriente del rotor	
	sin pérdidas del núcleo	con pérdidas del núcleo	sin pérdidas del núcleo	con pérdidas del núcleo
0 %	0.5661	0.5747	0	0
25 %	0.5736	0.5843	0.1661	0.1661
50 %	0.6538	0.6631	0.338	0.338
75 %	0.766	0.7788	0.5172	0.5172
100 %	0.9115	0.9279	0.7055	0.7055
110 %	0.9776	0.9927	0.784	0.784

En las Figuras 10 y 11 se muestran las corrientes del estator, las corrientes del rotor, la velocidad del rotor y el par electromagnético cuando se realizan escalones de 0% al 25%, al 50%, al 75%, al 100% y al 110% del par de carga nominal aplicados en los tiempos 0.5s, 0.7s, 0.9s, 1.1s y 1.3s.

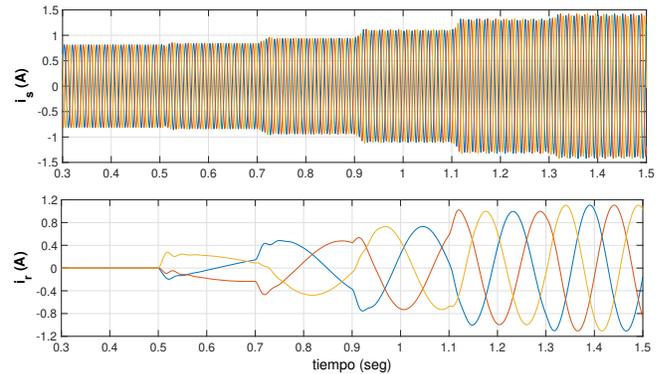


Figura 10. Corrientes del estator y del rotor.

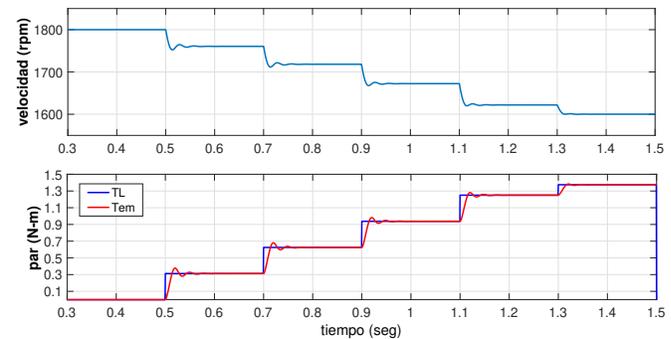


Figura 11. Velocidad y par electromagnético.

La Figura 12 muestra las pérdidas del núcleo al aplicar los escalones en el par de carga, mismas que se pueden calcular gracias a la inclusión de  $r_c$  en el modelo del motor.

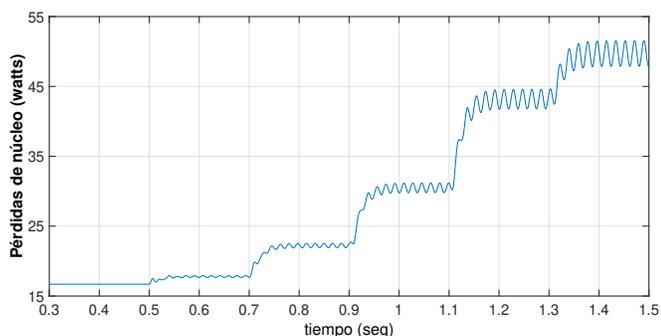


Figura 12. Pérdidas del núcleo.

## 5. CONCLUSIONES

En los resultados de simulación mostrados en la Tabla 2, se observa que al incluir la resistencia  $r_c$  en el circuito equivalente trifásico la corriente en el estator se incrementa alrededor del 2%, mientras que la corriente del rotor se mantiene. El incremento en la corriente del estator parece no ser significativo, sin embargo, el incluir  $r_c$  permite determinar las pérdidas del núcleo a costa del incremento en el orden del modelo. Utilizando la formulación Euler-Lagrange se eliminó la necesidad de encontrar una expresión matemática para modelar el acoplamiento entre los subsistemas y el modelo resultante permite la incorporación de la saturación magnética. Se debe evaluar si el incluir las pérdidas del núcleo impacta de manera significativa en el comportamiento del motor cuando se satura el núcleo, esto se podrá hacer en la siguiente etapa del trabajo cuando se incluya la saturación al modelo matemático ya desarrollado del motor.

## REFERENCIAS

- Bracikowski N., Hecquet M., B.P. (2012). Multiphysics modeling of a permanent magnet synchronous machine by using lumped models. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59, 2426–2436.
- Dang L., B.N. (2016). Analytical model and reluctance network for high-speed pmsm design optimization application to electric vehicles. In *International Conference on Electrical Machines (ICEM)*.
- El-Hawary, M.E. (2008). *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications*. Wiley-Interscience, 1 edition.
- Fitzgerald A. E., Kingsley Jr. C., U.S.D. (2003). *Electric Machinery*. McGrawHill, 6 edition.
- Neira, M.C. (2011). *Método para la estimación del momento de inercia de máquinas de inducción trifásicas a partir de su peso y altura de eje*. Master's thesis, Universidad Rovira I Virgili, Espana.
- P. Krause, O. Wasynczuk, S.P. (2012). *Electromechanical Motion Devices*. Wiley, 2 edition.
- Stein R., H.W.T. (1979). *Electric Power System Components Transformer and Rotating Machines*. Van Nostrand Reinhold Company, 1 edition.
- Torres del Carmen, F.d.J. (2017). *Sincronización de sistemas Lagrangianos: aplicación en robótica*. Ph.D. thesis, TecNM/CENIDET, Cuernavaca, México.
- Wellstead, P.E. (1979). *Introduction to Physical System Modelling*. Academic Press Ltd, 1 edition.
- Yilmaz, M. (2015). Limitations/capabilities of electric machine technologies and modeling approaches for electric motor design and analysis in plug-in electric vehicle applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*.
- Yiqi Liu, B.A.M. (2017). A general analytical three-phase induction machine core loss model in the arbitrary reference frame. *IEEE Transactions on Industry applications*, 53.

## Apéndice A. DATOS DEL MOTOR, RESULTADOS DE PRUEBAS Y PARÁMETROS.

Los datos del motor al que se le realizaron las pruebas para determinación de parámetros se muestran en la Tabla A.1. La Tabla A.2 muestra los resultados de las pruebas. En la Tabla A.3 se presentan los parámetros obtenidos y con los que se realizan las simulaciones. Las pérdidas rotacionales fueron 2.62 watts y las pérdidas del núcleo en vacío a voltaje nominal para este motor son 17.35 watts. El momento de inercia del rotor  $J$  se calcula mediante un método estadístico mostrado en (Neira, 2011).

Tabla A.1. Datos del motor.

Marca	Oriental motors
no. de fases	3
Modelo	BHI62S-A
Voltaje	220 volts
Corriente	0.95 A
Potencia	200 watts
Frecuencia	60Hz
Número de polos	4

Tabla A.2. Resultado de pruebas.

Variable medida	Prueba de cd	Prueba vacío	Prueba de rotor bloqueado
Voltaje (V)	24.95	127.06	30
Corriente (A)	1.04	0.566	0.962
Potencia (W)	—	31.8	71

Tabla A.3. Parámetros calculados.

Parámetro	Valor
$R_s$	11.995 $\Omega$
$R_r$	15.25 $\Omega$
$R_c$	2799 $\Omega$
$X_{ls}$	12.19 $\Omega$
$X_{lr}$	12.19 $\Omega$
$X_{ms}$	209.74 $\Omega$
$J$	4,6423 $\times 10^{-4}$
$\tau_L$	1.25 N-m