

# Un control robusto para el aterrizaje autónomo sobre una plataforma que se mueve verticalmente <sup>\*</sup>

Carlos Aguilar-Ibanez <sup>\*</sup> Carlos A. Merlo-Zapata <sup>\*</sup>  
Miguel S. Suarez-Castanon <sup>\*\*</sup> Oscar O. Gutierrez-Frias <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Centro de Investigacion en Computacion, Instituto Politecnico Nacional, CDMX 07738 Mexico (e-mail: carlosaguilari@cic.ipn.mx)

<sup>\*\*</sup> Escuela Superior de Computo, Instituto Politecnico Nacional, CDMX 07738 Mexico (e-mail: sasuares@prodigy.net.mx)

<sup>\*\*\*</sup> Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingenieria y Tecnologias Avanzadas, Instituto Politecnico Nacional, CDMX 07738 Mexico (e-mail: ogutierrezf@ipn.mx)

---

## Abstract:

En este trabajo proponemos la solución al problema de aterrizaje suave de un vehículo aéreo no tripulado, y de parámetros desconocidos, sobre una plataforma móvil, suponiendo que siempre podemos medir la posición relativa del vehículo aéreo con respecto a la plataforma. El aterrizaje se lleva a cabo mediante un controlador robusto con salida retroalimentada, y una fuerza de repulsión. El controlador robusto controla el modelo nominal, realiza el seguimiento de la trayectoria requerida para el aterrizaje, y contrarresta las incertidumbres desconocidas. Para asegurar que la aeronave siempre se ubique por encima de la plataforma, incluimos una fuerza de repulsión que únicamente actúa en una pequeña vecindad de la plataforma. Para estimar la velocidad relativa de la aeronave y la aceleración de la plataforma, empleamos un observador basado en el método de super-twisting, lo que nos asegura convergencia de las señales en tiempo finito. Este hecho nos permitió diseñar el estabilizador con realimentación de forma independiente al diseño del observador (en concordancia con el principio de separación). Para validar la efectividad del enfoque de control propuesto, llevamos a cabo una simulación numérica, habiendo obtenido resultados satisfactorios.

*Keywords:* Vehículo aéreo no tripulado de despegue y aterrizaje vertical, Aterrizaje autónomo, Observador basado en el enfoque super-twisting, Control robusto, Método de Lyapunov.

---

## 1. INTRODUCTION

El aterrizaje autónomo de un vehículo aéreo no tripulado (**VANT**) tiene aplicaciones, tales como aterrizar en la cubierta de un barco en altamar; además de ser un problema de control muy desafiante. Desde el punto de vista de control, este problema puede ser visto como un problema de la regulación a cero de la distancia relativa entre el vehículo y la cubierta del barco que está sujeto al efecto de los movimientos verticales y de inclinación del mar.

En este trabajo, resolvimos el problema de aterrizaje de un VANT sobre una plataforma móvil, mediante regulación retroalimentada y regulación de la salida, y

<sup>\*</sup> Esta investigación fue financiada por el Instituto Politécnico Nacional, a través de los proyectos de investigación 20190263 y 20196405.

suponiendo que disponemos de un conocimiento parcial del modelo del VANT, así como su posición relativa con respecto a la plataforma y la aceleración vertical de esta última. Evidentemente, este problema puede ser visto como un problema de sincronización entre dos sistemas parcialmente conocidos, donde el VANT es el esclavo, y la plataforma es el maestro. Para resolverlo de esta manera, asumimos que los desplazamientos horizontal y angular del VANT son muy pequeños, por lo que los despreciamos, simplificando de esta forma el modelo del sistema. Entonces, nuestra solución consistió en proponer un control no lineal, junto con una fuerza de repulsión. El controlador tiene dos acciones, la primera, basada en saturación, controla el modelo nominal; la segunda acción, basada en un integrador no lineal, compensa las no linealidades que conocemos de forma parcial. El controlador y el compensador actúan junto con un observador diseñado a partir del enfoque super-twisting (**OBST**). Este obser-

vador estima en tiempo finito la velocidad relativa del VANT y la aceleración de la plataforma. Complementariamente, la fuerza de repulsión nos ayuda a garantizar que la aeronave siempre se encuentre ubicada por encima de la plataforma. El análisis de estabilidad en lazo cerrado lo realizamos mediante el método de Lyapunov. Terminamos resaltando que la planeación de la trayectoria del VANT se basó en la *curva de Bézier*, junto con la fuerza de repulsión. Hasta donde nosotros sabemos, esta forma de planificar una trayectoria para el problema de aterrizaje que aquí resolvimos, no ha sido explotada. Hacemos mención que en Marconi et al. (2002), se presenta una solución muy interesante al problema del aterrizaje de un VANT sobre una plataforma móvil, pero empleando técnicas distintas a las empleadas por nosotros.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Antes de plantear formalmente el problema de control objeto de este trabajo, presentamos el modelo simplificado del VANT que empleamos, y que se define de la siguiente manera:

$$m\ddot{z} = K_g(h)u - mg, \quad (1)$$

donde  $z$  es la posición vertical de VANT,  $u$  es el empuje vertical del rotor,  $h = z - z_d$  es la distancia relativa entre la posición del VANT,  $z$ , y la posición vertical de la plataforma móvil,  $z_d$ ;  $m$  es la masa del VANT,  $g$  es la fuerza de gravedad, y  $K(h)$  es una función no lineal, modelada de la siguiente manera (ver la Eq. (31) de Herissé et al. (2012)):

$$K(h) = \frac{1}{1 - \left(\frac{D_0}{h+l_0}\right)^2}, \quad (2)$$

donde las constantes positivas  $D_0$  y  $l_0$ , con  $l_0 > D_0$ , pueden ser identificadas a partir del modelo físico. Estos parámetros están relacionados con las dimensiones físicas del VANT (Sanchez-Cuevas et al. (2017)). La posición de la plataforma se modela como:

$$z_d = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \zeta_i), \quad (3)$$

donde  $A_i$  es la amplitud del  $i$ -ésimo componente del movimiento sinusoidal,  $\omega_i$  es la frecuencia, y  $\zeta_i$  es la fase. Ya que hemos presentado el modelo simplificado del VANT, introducimos el problema de control objeto de este trabajo.

**Problema de Control:** Consideremos la planta (1), con salidas medibles  $h_1 = z - z_d$  y  $y_2 = \ddot{z}$ , y las constantes desconocidas  $D_0$  y  $l_0$ . El objetivo de control consiste en diseñar un control  $u$ , tal que:

$$|z(t) - z_d(t)| \leq \delta_1; \quad |\dot{z}(t) - \dot{z}_d(t)| \leq \delta_2.$$

para toda  $t > T > 0$ , y donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  sean suficientemente pequeñas. En otras palabras, queremos llevar las variables  $(z(t), \dot{z}(t))$  del sistema a una vecindad de cero. Esto es, queremos que los estados  $(z, \dot{z})$  del VANT se aproximen a los estados  $(z_d, \dot{z}_d)$  de la plataforma, con suficiente precisión para algún tiempo  $T > 0$ , sujeto a  $z(t) \geq z_d(t)$  para toda  $t \geq 0$ .

Para resolver este problema de control, introducimos las siguientes suposiciones:

$$A1) \left| z_d^{(i)}(t) \right| \leq \bar{z}_i, \text{ con } i = \{0, 1, 2\} \text{ y } t > 0.$$

A2) las señales  $\ddot{z}(t)$  and  $h(t)$  siempre se pueden medir.

Nótese que debemos de asegurar que  $z(t) \geq z_d(t)$  para toda  $t \geq 0$  porque suponemos que el VANT siempre está por encima de la plataforma. Este problema de control asemeja, por ejemplo, el aterrizaje de un helicóptero sobre un barco cuya cubierta oscila verticalmente debido al movimiento de las olas del mar, como se ilustra en la figura 1. Debemos apuntar que, la señal de referencia  $z_d(t)$ , y su primera y segunda derivada tiene que estar acotadas. Por otro lado, trabajamos sobre el caso ideal en el que las señales  $h_1$  y  $y_2$  están libres de ruido. Sin embargo, si esas señales no estuvieran libres de ruido, podemos filtrarlas mediante un filtro pasa bajas, obteniendo los valores promedio de las señales, mismo que están muy cercanos a los valores reales.

Antes de concluir esta sección, introducimos un lema que nos será de mucha ayuda en los siguientes desarrollos.

**Lema 1:** Consideremos el siguiente sistema incierto de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= v + \dot{\varphi}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $x, y \in \mathbf{R}$  son los estados,  $\dot{\varphi}(t)$  es una perturbación continua y acotada, y  $v$  es la entrada del sistema, definida como:

$$v = -s_a [y - x_r] - s_{a/2} [x + y - (x_r + \dot{x}_r)] + \ddot{x}_r, \quad (5)$$

donde  $a > 0$  es una constante,  $x_r$  es una señal suave de referencia con derivadas respecto al tiempo  $\dot{x}_r$  y  $\ddot{x}_r$ .

Supongamos que  $|x_r^{(i)}| \leq \bar{x}_r^{(i)}$  con  $i = \{0, 1, 2\}$ ,  $|\dot{\varphi}(t)| \leq \bar{\varphi}$ , y  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$ , siempre que  $t \rightarrow \infty$ , con:

$$\int_0^\infty |\varphi(t)| dt \leq M < \infty, \quad (6)$$

entonces, los errores de seguimiento,  $e_x = x - x_r$  y  $e_y = y - \dot{x}_r$ , convergen global y asintóticamente hacia el origen.

Debido a las restricciones de espacio, nos vemos en la necesidad de omitir la prueba de este lema.

## 3. ESTRATEGIA DE CONTROL

En general, podemos ver el problema de control que proponemos, como un problema de sincronización entre sistemas inciertos, donde la plataforma actúa como el maestro y el VANT como el esclavo. Para resolver el problema de esta forma, proponemos un controlador robusto con salida retroalimentada, junto con un campo de repulsión basado en fuerza. El controlador robusto está dedicado a asegurar convergencia a cero del error de seguimiento del modelo nominal, y simultáneamente compensar las no linealidades no modeladas. La fuerza

de repulsión actúa si  $h < 0.5\delta_1$ , donde  $\delta_1 > 0$  está relacionada con la zona de amortiguamiento definida como constante. Como únicamente disponemos de mediciones de la posición relativa  $h$  y de la aceleración vertical  $\ddot{y}$  del VANT, estimamos las variables desconocidas  $\dot{h}$  y  $\ddot{z}_d$  mediante un OBST (Davila et al. (2005)), suponiendo que  $K(h)$  también se conoce parcialmente. Una vez que hemos obtenido  $\dot{h}$  y  $\ddot{z}_d$ , procedemos a diseñar un controlador basado en retroalimentación de la salida junto con un planificador de trayectoria. Este planificador nos permite llevar la aeronave a la zona de amortiguamiento y aterrizarla muy suavemente sobre la plataforma. La trayectoria  $h_r$  la hemos obtenido usando una *curva de Bézier* de quinto grado, permitiéndonos planificar el tiempo de aterrizaje.

### 3.1 Reconstrucción de las variables desconocidas

Definiendo los errores de sincronización como  $h_1 = z - z_d$  y  $h_2 = \dot{z} - \dot{z}_d$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= h_2 \\ \dot{h}_2 &= y_2 - \ddot{z}_d. \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $y_2 = \ddot{z}$  es, de hecho, una señal medible. Entonces, para estimar las variables faltantes  $h_2$  y  $\ddot{z}_d$ , usamos el siguiente observador (Davila et al. (2005, 2006)):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}}_1 &= \hat{h}_2 + \beta \left| h_1 - \hat{h}_1 \right|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}[h_1 - \hat{h}_1] \\ \dot{\hat{h}}_2 &= y_2 + \alpha \text{sgn}[h_1 - \hat{h}_1] \\ \tau \dot{\hat{w}} &= -\hat{w} + \alpha \text{sgn}[h_1 - \hat{h}_1] \end{aligned} \quad (8)$$

donde las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser seleccionadas, tal que:

$$\alpha > \bar{z}_2; \quad \beta > \frac{(1 + \zeta)(\alpha + \bar{z}_2)}{(1 - \zeta)} \sqrt{\frac{2}{(\alpha - \bar{z}_2)}}; \quad (9)$$

para alguna  $\zeta \in (0, 1)$ . Definiendo los errores de observación como  $e_{o_1} = h_1 - \hat{h}_1$  y  $e_{o_2} = h_2 - \hat{h}_2$ , obtenemos, de las dos primeras ecuaciones (7) y (8), las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{o_1} &= e_{o_2} - \beta |e_{o_1}|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}[e_{o_1}]; \\ \dot{e}_{o_2} &= -\ddot{z}_d - \alpha \text{sgn}[e_{o_1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Como las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se seleccionaron de acuerdo a (9), podemos asegurar que  $e_{o_1}$  y  $e_{o_2}$  convergen asintóticamente a cero en tiempo finito (para detalles consultar las secciones III y IV de Davila et al. (2005)). Por otro lado, si fijamos el paso de integración,  $\zeta$ , del método numérico, tal que  $0 < \zeta < \tau \ll 1$ , entonces podemos asegurar que  $\hat{w} \rightarrow -\ddot{z}_d$  en un tiempo finito, siempre que  $\tau \rightarrow 0$  Davila et al. (2006). Esto es, existe una  $T_0 > 0$ , tal que  $\hat{h}_2(t) = \dot{h}(t)$  y  $\hat{w}(t) = -\ddot{z}_d(t)$ , para toda  $t > T_0$ .

La desventaja de este observador basado en super-twisting es que necesitamos saber, por lo menos, una estimación del valor de la constante  $\bar{z}_2$ . Sin embargo, podemos superar este obstáculo seleccionando la constante  $\alpha$  suficientemente grande. De forma similar, para

construir  $\ddot{z}_d$ , necesitamos seleccionar  $\tau$  y  $\zeta$  suficientemente pequeñas, dependiendo de la frecuencia natural de  $\ddot{z}_d$ .

### 3.2 Ley de control robusta

Puesto que podemos recuperar las variables  $\dot{h}$  y  $\ddot{z}_d$  en tiempo finito, proponemos un esquema de control robusto conveniente para asegurar que  $h_1$  y  $h_2$  convergen asintóticamente a cero. Antes de continuar, introduciremos la siguiente proposición que nos ayudará en los desarrollos subsecuentes.

**Proposición 1:** Consideremos el siguiente sistema incierto de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p; \\ \dot{p} &= b(x, t)u + \phi(t); \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $q$  y  $p \in R$  son los estados,  $x = [q, p]^T$ ,  $u \in R$  es la entrada del sistema, y  $b(x, t)$  y  $\phi(t) \in R$  son funciones parcialmente conocidas. Supongamos que:

P1) Existe  $\underline{b} > 0$  y  $\bar{b} > 0$ , tal que  $\underline{b} \leq b(x, t) \leq \bar{b}$ , para  $t \geq 0$ .

P2)  $|\phi(t)| \leq \bar{\phi}(t) < \infty$  para toda  $t \geq 0$ .

Consideremos el siguiente controlador:

$$u = \frac{1}{\bar{b}}(v_d + \zeta) \quad (12)$$

$$v_d = -s_{a/2}(e_q + e_p) - s_a(e_p) + \ddot{q}_d \quad (13)$$

donde  $e_q = q - q_d$ ,  $e_p = p - \dot{q}_d$ , y  $q_d$  es la trayectoria continua y acotada de referencia, con primera y segunda derivada también continuas y acotadas, y el control auxiliar  $\zeta$  definido como:

$$\zeta = -\lambda_0 \xi - \frac{\lambda_1 \xi (\|v_d\| + \bar{\phi}(t))}{k \exp(-\lambda_2 t) + \|\xi\|}, \quad (14)$$

con:

$$\xi(t) = p(t) - p(0) - \int_0^t v_d(s) ds, \quad (15)$$

donde los parámetros  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, k\}$  son estrictamente positivos con  $\lambda_1 \bar{b} / \bar{b} > 1$ . Entonces, el sistema en lazo cerrado (11) y (12) asegura que los errores de seguimiento,  $e_q$  y  $e_p$ , convergen asintóticamente a cero.

**Demostración:** De (11) y (12), podemos expresar el sistema en lazo cerrado como:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= v_d + \left( \frac{b(x, t)}{\bar{b}} - 1 \right) v_d + \frac{b(x, t)}{\bar{b}} \zeta + \phi(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora, a partir de la definición de (15), es fácil ver que podemos expresar la ecuación anterior de forma más breve como:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p; \\ \dot{p} &= v_d + \xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Antes de continuar con el análisis de estabilidad del sistema anterior, primero demostramos que  $\xi$  converge a

cero. Para esto, debemos destacar que la variable  $\xi$ , dada en (15), también puede ser expresada como:

$$\xi(t) = \int_0^t \left( \frac{b(x(s), s)}{\bar{b}} z(s) + \left( \frac{b(x(s), s)}{\bar{b}} - 1 \right) v_d(s) + \phi(x(s), s) \right) ds. \quad (18)$$

De hecho, se puede justificar simplemente integrando la segunda ecuación de (16) y la definición (15). De la suposición P3, debemos enfatizar que  $\xi$  puede ser calculado en línea con la ecuación (15). Una vez que hemos definido la nueva representación del sistema (17), procedemos a probar que el controlador virtual  $z$  (14) hace que las variables  $\xi$  y  $\dot{\xi}$  converjan asintóticamente a cero. Para esto, sustituimos (14) en la derivada con respecto al tiempo de  $\xi$ , dada en la ecuación (18), lo que nos lleva a:

$$\dot{\xi} = -\lambda_0 b^+(t)\xi - \lambda_1 b^+(t)\xi \left( \frac{|v_d| + \bar{\phi}(t)}{k \exp(-\lambda_2 t) + |\xi|} \right) + (b^+(t) - 1) v_d + \phi(x, t) \quad (19)$$

donde:

$$b^+(t) = \frac{b(x, t)}{\bar{b}}$$

Entonces, para analizar el comportamiento de la variable auxiliar  $\xi$ , empleamos la función de Lyapunov  $V = \xi^2/2$ , cuya derivada respecto al tiempo alrededor de las trayectorias de (19) puede ser acotada por arriba como:

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_0 \bar{b}}{\bar{b}} \xi^2 + \frac{(-\bar{\lambda}_1 + 1) \xi^2 W(t)}{k \exp(-\lambda_2 t) + |\xi|} + \frac{k \exp(-\lambda_2 t) |\xi| W(t)}{k \exp(-\lambda_2 t) + |\xi|}.$$

donde  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 \bar{b}/\bar{b}$ , y  $W(t) = |v_d| + \bar{\phi}(t) \leq \bar{W}$ . Entonces, seleccionando  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 \bar{b}/\bar{b} > 1$ , y usando P1, obtenemos que la siguiente desigualdad:

$$\dot{V} \leq -\frac{2\lambda_0 \bar{b}}{\bar{b}} V + k \bar{W} \exp(-\lambda_2 t), \quad (20)$$

se cumple. A partir de la última desigualdad, es fácil concluir que  $V$  converge exponencialmente a cero (ver el Apéndice). Entonces, la variable  $|\xi|$  también converge exponencialmente a cero. Ahora, como  $v_d$  (13) y  $\bar{\phi}(t)$  están acotadas, entonces  $\dot{\xi}$  está acotada (ver (19)), implicando que  $\xi$  es uniformemente continua con  $\xi \rightarrow 0$ , siempre que  $t \rightarrow \infty$ . Consecuentemente, de acuerdo al lema de Barbalat, podemos concluir que  $\dot{\xi} \rightarrow 0$ , siempre que  $t \rightarrow \infty$ .

Finalmente, después de sustituir (13) en la ecuación (17), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{e}_q &= e_p; \\ \dot{e}_p &= -s_{a/2}(e_q + e_p) - s_a(e_p) + \dot{\xi} \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\dot{\xi}$  está acotada y converge a cero. Además, como  $|\xi|$  converge exponencialmente a cero, tenemos que  $\int_0^\infty |\xi(s)| ds \leq M < \infty$ . Consecuentemente, de acuerdo al Lema 1, tenemos que  $(e_q, e_p) \rightarrow 0$ , siempre que  $t \rightarrow \infty$ .

## Ecuación dinámica de sincronización:

Sustituyendo la ecuación del sistema VANT (1) en la ecuación (7), obtenemos la siguiente ecuación de sincronización

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= h_2; \\ \dot{h}_2 &= K(h)u - \Phi(t), \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\Phi(t) = g - \ddot{z}_d(t)$  y  $K(h) = K_g(h)/m$ . Ahora, para proponer el control  $u$  para asegurar que  $(h_1, h_2) \rightarrow 0$ , siempre que  $t \rightarrow \infty$ , suponemos que conocemos  $\underline{k}$ ,  $\bar{k}$  y  $\bar{\Phi}$ , tal que:

$$|\Phi(t)| \leq \bar{\Phi}(t); \quad \underline{k} \leq K(h) < \bar{k}.$$

Para lograr esto, introducimos la proposición principal de este trabajo.

**Proposición 2:** Consideremos el sistema (22), en lazo cerrado con:

$$u = \frac{1}{\bar{k}}(-s_{a/2}(h_1 + \hat{h}_2 - h_r - \dot{h}_r) - s_a(\hat{h}_2 - \dot{h}_r) + \ddot{h}_r + \zeta), \quad (23)$$

donde  $h_r$  es una curva de Bézier,  $\hat{h}_2$  y  $\hat{w}$  evoluciona de acuerdo al sistema de ecuaciones en (8), restringido a (9), y  $\zeta$  propuesta como:

$$\zeta = -\lambda_0 \xi - \frac{\lambda_1 \xi (\|v_d\| + \bar{\Phi})}{k \exp(-\lambda_2 t) + \|\xi\|}, \quad (24)$$

con:

$$v_d = -s_{a/2}(h_1 + \hat{h}_2 - h_r - \dot{h}_r) - s_a(\hat{h}_2 - \dot{h}_r) + \ddot{h}_r,$$

y  $\bar{\Phi}(t) = |g + \hat{w}|$ , :

$$\xi(t) = \hat{h}_2 - \int_0^t v_d(s) ds. \quad (25)$$

Si las constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  satisfacen  $\lambda_1 \bar{k}/\bar{k} > 1$ , entonces para cualquier condición inicial  $(h_1, h_2)$  podemos asegurar que los errores  $h_1$  y  $h_2$  convergen asintóticamente a cero.

Demostración: ver el Apéndice.

## Planificación de la trayectoria de referencia $h_r$ :

Para aterrizar el VANT sobre la plataforma móvil, empleamos una trayectoria basada en una curva de Bézier (Sira-Ramirez and Agrawal (2004)). Proponemos la siguiente trayectoria para llevar a la aeronave, de cualquier condición inicial  $h_0 = h(t_0) > 0$ , a la zona de amortiguamiento  $h_f = h(t_f) = \delta_1 > 0$  con  $\delta_1$  suficientemente pequeña, y  $t_f \gg t_0$  fijada convenientemente. Esto es, definimos  $h_r(t)$  como:

$$h_r(t) = h_0 + \rho(t, t_0, t_f)(h_f - h_0), \quad (26)$$

donde  $\rho(t, t_0, t_f)$  es la curva de Bézier seleccionado, el cual satisface las siguientes condiciones:

$$\rho(t_0, t_0, t_f) = 0; \quad \rho(t_f, t_0, t_f) = 1,$$

donde un número finito de las derivadas con respecto al tiempo de  $\rho(t, t_0, t_f)$  son puestas en cero en los tiempos de inicio y terminación de la maniobra,  $t_0$  y  $t_f$  (para detalles por favor ver Sira-Ramirez and Agrawal (2004)). Para asegurar que  $h > 0$  para todo momento, y que el controlador  $u$  se apaga cuando el VANT alcanza la zona

de amortiguamiento, fijamos a este, para fines prácticos, como:

$$\Theta = \left\{ \mathbf{h} = (h, \dot{h}) : (h^2 + 0.2\dot{h}^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1.1\delta_1 \right\}.$$

Entonces, establecemos la estrategia de control práctico como:

$$u = \frac{\mu}{k}(v_d + u_r + \zeta), \quad (27)$$

donde  $v_d$  y  $\zeta$  han sido definidas en la Proposición 2,  $\mu$  es una función que actúa como un apagador y se define como:

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{h} \in \Theta \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases},$$

y  $u_r$  es la fuerza de repulsión definida como:

$$u_r = -\frac{d}{dh}U_{rep}(h), \quad (28)$$

con su correspondiente potencial definido como:

$$U_{rep}(h) = \begin{cases} \frac{\delta_0^3}{2} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{\delta_0^2} \right)^2 & ; \text{ si } h < \delta_0 \text{ y } \dot{h} < 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases},$$

donde  $\delta_0 = 0.5\delta_1$ . Debemos hacer notar que la fuerza de repulsión  $U_{rep}$  asegura que  $h \geq 0$ . Omitimos la prueba de estabilidad del sistema (1) en lazo cerrado con el control (27), porque imita a la de la Proposición 1.

#### 4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para evaluar la efectividad de la ley de control que hemos propuesto, diseñamos y ejecutamos un experimento numérico, en el que perturbamos a la aeronave con un viento cruzado. Para tal efecto, fijamos los parámetros físico como  $m = 0.25Kg$ ,  $D_0 = 1$  y  $l_0 = 5$ , y las ganancias del controlador, dado en(12) to (14) como:

$$\underline{k} = 4; \quad \bar{k} = 4.5; \quad a = 3; \\ \lambda_0 = 3; \quad \lambda_1 = 2.2; \quad \lambda_2 = 0.5,$$

y las ganancias del OBST como:

$$\alpha = 0.5; \quad \beta = 3; \quad \tau = 0.1.$$

Fijamos las condiciones iniciales como  $(h, \dot{h}) = (20.5, 0)$ , los parámetros de la *curva de Bézier* como  $(t_0, t_f) = (0, 30)$ , y simulamos el movimiento horizontal de la plataforma,  $z_d$ , y el efecto del viento cruzado,  $\Delta$ , como:

$$z_d(t) = 0.25 \sin(t/2) \cos(t/2) ; \quad \frac{\Delta(t)}{m} = 0.2 \sin^2(t/4) + 0.25.$$

El resultado de este experimento los mostramos en la figura 2, en donde podemos ver que el VANT alcanza la zona de amortiguamiento después de transcurridos 27 segundos y la velocidad estimada coincide con la velocidad real después de transcurridos 5 segundos. También podemos ver en la gráfica donde mostramos la acción del control, que la fuerza de repulsión solo actúa cuando  $t \in [27.45, 27.55]$  segundos. Consecuentemente, podemos afirmar que nuestro enfoque de control efectivamente aterriza a la aeronave sobre la plataforma, con un desempeño aceptable. Debemos hacer notar que hay un pequeño error

entre  $h$  y  $h_r$ . Este error se puede explicar porque el control  $v_d$  está basado en una saturación, que tiene el inconveniente de tener un tiempo significativo de convergencia. Sin embargo, si el tiempo  $t_f - t_0$  es suficientemente grande, entonces podemos mejorar el error de seguimiento.

**Comentario 1:** Hacemos mención que la función signo la implementamos de la siguiente forma:

$$\text{sign}(x) = \frac{x}{|x| + 10^{-3}},$$

con paso de integración  $10^{-4}$ .

#### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, propusimos una estrategia de control para el aterrizaje suave de una VANT sobre una plataforma móvil. La estrategia de control la diseñamos suponiendo que el modelo VANT es parcialmente conocido, mientras que su posición relativa a la plataforma y la aceleración de esta siempre están disponibles. Nuestro enfoque de control para el aterrizaje se basa en el diseño de un control robusto con salida retroalimentada, junto con una fuerza de repulsión. El controlador robusto consta de dos acciones: una basada en funciones de saturación, y la otra es un integrador lineal. El primero de estos controla el modelo nominal del sistema y garantiza la realización de la tarea de seguimiento de trayectoria, y el segundo compensa las incertidumbres parcialmente conocidas. Adicionalmente, introducimos una fuerza de repulsión al controlador para garantizar que la aeronave siempre se encuentre por encima de la plataforma, y únicamente trabaja dentro de una pequeña vecindad (zona de amortiguamiento). Empleamos un OBST para estimar la velocidad relativa de la aeronave y la aceleración de la plataforma. Seleccionamos como trayectoria de referencia para el vehículo aéreo una *curva de Bézier*, encargada de llevar el sistema de desde cualquier condición inicial hacia la zona de amortiguamiento en un tiempo previamente definido. Para evaluar la efectividad de nuestro método de control, realizamos una simulación numérica consistente en aterrizar la aeronave cuando esta está siendo perturbada por un viento cruzado. Finalmente, el análisis de estabilidad lo realizamos basándonos en el método de Lyapunov.

#### 6. APÉNDICE

**Demostración de la desigualdad (20):** Primero, multiplicando ambos lados de (20) por  $\exp(\bar{\lambda}t)$ , obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(V \exp(\bar{\lambda}t)) = \exp(\bar{\lambda}t) \left( \dot{V} + \bar{\lambda}V \right) \leq k\bar{W} \exp(-(\lambda_2 - \bar{\lambda})t),$$

donde  $\bar{\lambda} = 2\lambda_0 b/\bar{b}$ . Por simplicidad suponemos que  $\lambda_2 \neq \bar{\lambda}$ . Integrando ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos:

$$V \exp(\bar{\lambda}t) - V(0) \leq k\bar{W} \left| \frac{1 - \exp(-(\lambda_2 - \bar{\lambda})t)}{\lambda_2 - \bar{\lambda}} \right|,$$

lo que nos lleva a que, después de álgebra simple, a la siguiente desigualdad:

$$V \leq \exp(-\bar{\lambda}t)V(0) + \left| \frac{\exp(-\bar{\lambda}t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 - \bar{\lambda}} \right|.$$

De lo anterior, concluimos que  $V$  converge exponencialmente a cero. Podemos demostrar el en el que  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$  de forma similar.

**Demostración de la Proposición 2:** Por simplicidad, realizamos la desmotración suponiendo que  $h_r = 0$ . Puesto que  $\hat{h}_2$  y  $\hat{w}$  son estimados por el OBST (8), con sus correspondientes ganancias satisfaciendo la condición (9), podemos concluir que  $(\hat{h}_2, \hat{w})$  converge en tiempo finito a  $(h_2, -\ddot{z}_d)$ . Esto es:

$$\hat{h}_2 = h_2 + e_{o_2}(t); \quad \ddot{z}_d = -\hat{w} + \eta_w(t);$$

con  $\eta_h(t)$  y  $\eta_w(t)$  acotados, tal que  $\eta_h(t) \rightarrow 0$  y  $\eta_w(t) \rightarrow 0$ , siempre que  $t \geq T_*$ , siendo  $T_*$  finito. Bajo estas condiciones, es fácil ver que las trayectorias del sistema (23) en lazo cerrado con (22) no escapa al infinito para todo  $t \geq T_*$ . Más aún, después de  $t \geq T_*$ , las señales  $u$ ,  $v_d$ ,  $\xi(t)$ , y  $\bar{\Phi}(t)$  dadas en :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{k}(v_d + \zeta); \\ v_d &= -s_{a/2}(h_1 + h_2) - s_a(h_2); \\ \xi(t) &= h_2 - \int_0^t v_d(s)ds; \\ \bar{\Phi}(t) &= |g - \ddot{z}_d|. \end{aligned} \quad (29)$$

donde  $z$  está definida en (24). Como las señales de arriba coinciden con la expresión dada en la Proposición 1, con  $\lambda_1 \frac{k}{\bar{k}} > 1$ , entonces podemos asegurar que  $h_1$  y  $h_2$  converge a cero, siempre que  $t \rightarrow \infty$ .

## REFERENCES

- Davila, J., Fridman, L., and Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE transactions on automatic control*, 50(11), 1785–1789.
- Davila, J., Fridman, L., and Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10), 1251–1262.
- Herissé, B., Hamel, T., Mahony, R., and Russotto, F.X. (2012). Landing a vtol unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. *IEEE Transactions on robotics*, 28(1), 77–89.
- Marconi, L., Isidori, A., and Serrani, A. (2002). Autonomous vertical landing on an oscillating platform: an internal-model based approach. *Automatica*, 38(1), 21–32.
- Sanchez-Cuevas, P., Heredia, G., and Ollero, A. (2017). Characterization of the aerodynamic ground effect and its influence in multirotor control. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2017.
- Sira-Ramirez, H. and Agrawal, S.K. (2004). *Differentially flat systems*, volume 17. CRC Press.

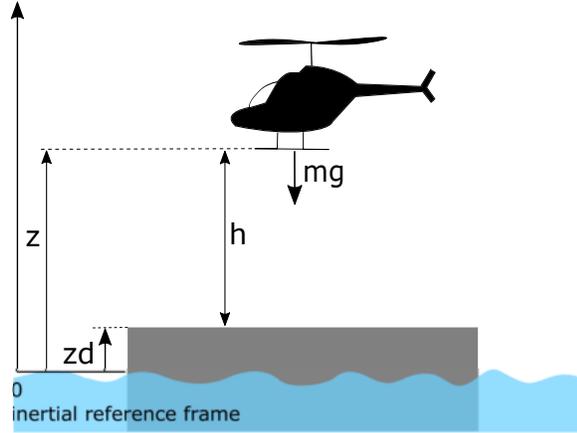


Fig. 1. Maniobra de aterrizaje del VANT sobre una plataforma móvil.

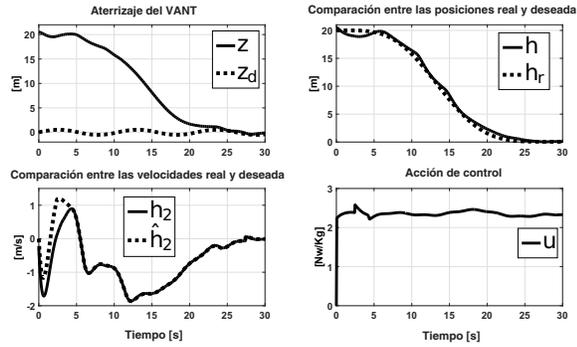


Fig. 2. Respuesta en lazo cerrado del VANT perturbado por un viento cruzado cuando sigue la trayectoria para aterrizar sobre la plataforma móvil, con un tiempo programado de 30 segundos.