

# Sincronización de redes de sistemas caóticos de Lorenz y Chen utilizando formas Hamiltonianas

Juan Luis Vázquez Gutiérrez\* DidierLópez-Mancilla\*\*

\* Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de los Lagos,  
Enrique Díaz de León 1144, Col. Paseos de la Montaña, C.P. 47460,  
Lagos de Moreno, Jalisco. (e-mail: ing.juan.l.21@gmail.com).

\*\*

---

Resumen: Este trabajo contribuye al tema de la sincronización de redes de sistemas caóticos idénticos. Inicialmente, los sistemas caóticos de Lorenz y Chen se expresan en forma Hamiltoniana. Hacer esto nos permite observar características particulares del sistema, ya que el sistema se divide en una parte conservativa y una parte disipativa. Esto ayuda a diseñar una ley de control optimizada que nos permite sincronizar redes de sistemas caóticos idénticos. En particular, la técnica de Acoplamiento a Modelos se utiliza para el diseño de la ley de control, pero se realiza una optimización en el diseño con una ley de control basada en la parte conservativa de los sistemas caóticos de Lorenz y Chen expresados en forma Hamiltoniana. Esto nos da un nuevo punto de vista en el diseño de los controladores utilizados para lograr la sincronización entre redes de sistemas caóticos idénticos, lo que simplifica los cálculos que se realizan para obtener una ley de control útil. Se presentan algunas simulaciones numéricas.

*Keywords:* Control de Sistemas No Lineales, Sincronización de Sistemas, Sistemas Caóticos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es un fenómeno observado en muchas disciplinas científicas, se refiere en general al fenómeno por el cual ocurren dos o más cosas al mismo tiempo. En Strogatz (2003), podemos encontrar varios ejemplos de este fenómeno. Desde la publicación del trabajo de Pecora y Carroll (1990) "Synchronization in Chaotic Systems", se ha generado mucho interés en el tema de la sincronización de sistemas caóticos, ya que se creía que los sistemas caóticos desafiaban la sincronización. El uso de leyes de control ayuda a resolver el problema de la sincronización entre redes de sistemas caóticos, como se muestra en Mancilla y Cahuich (2018). Uno de los objetivos de este trabajo es simplificar las leyes de control que se obtienen mediante Acoplamiento a Modelos que se utilizan para lograr la sincronización de redes de sistemas caóticos idénticos, utilizando formas generalizadas Hamiltonianas para encontrar las leyes de control.

Los sistemas de Lorenz y Chen se pueden expresar en una forma Hamiltoniana, como se muestra en los trabajos de Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000); Posadas-Castillo et al. (2014), para dividir los sistemas originales en una función conservativa, disipativa y un vector desestabilizante. En este trabajo, se usa una analogía al método de Acoplamiento a Modelos para obtener una ley de control, basada solo en la parte conservativa del sistema en forma Hamiltoniana.

Para expresar un sistema en forma Hamiltoniana, debemos considerar una función de energía, donde el gradiente de la función de energía se usa como un vector de estado para

transformar los sistemas. También hay otros artículos como López-Mancilla et al. (2005) en los que se usan formas Hamiltonianas de sistemas caóticos para aplicaciones en comunicación.

El objetivo de este trabajo es lograr la sincronización entre los nodos de redes compuestas de sistemas caóticos idénticos, dispuestos en una topología de anillo con 6 nodos, utilizando una analogía a la ley de control general del método de Acoplamiento a Modelos, basado en la parte conservativa de una forma Hamiltoniana de los sistemas de Lorenz y Chen. Tomando provecho de la estructura de esta transformación, solo se usa la parte conservativa para encontrar una ley de control, considerando que la parte disipativa del sistema tenderá a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, y la función desestabilizante depende de las variables de estado. El hecho de utilizar solo una parte del sistema en una forma Hamiltoniana para el diseño de una ley de control, simplifica los cálculos utilizados para obtenerla, minimiza el tiempo de cómputo para la simulación y permite una posible implementación física. Cabe mencionar que los sistemas que conforman la red no son modificados, se usa solamente la parte conservativa de los sistemas en forma Hamiltoniana para encontrar una ley de control.

En la Sección 2, se explican los conceptos básicos del método de Acoplamiento a Modelos y la forma general de obtener una ley de control basada en la parte conservativa de un sistema expresado en forma Hamiltoniana generalizada. En la sección 3 se expone el tema principal, presentando las leyes de control obtenidas para lograr la sincronización de las redes de sistemas caóticos de Lorenz y

Chen. La sección 4 muestra las simulaciones numéricas de la aplicación de las leyes de control y la sección 5 contiene las conclusiones generales de este trabajo.

## 2. LEY DE CONTROL USANDO ACOPLAMIENTO A MODELOS DE FORMAS HAMILTONIANAS PARA SINCRONIZAR REDES

Considerando un sistema autónomo  $n$ -dimensional

$$\dot{x} = f(x), \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

se puede escribir en una forma Hamiltoniana generalizada con la siguiente forma:

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x} + S(x) \frac{\partial H}{\partial x} + F(x) \quad (2)$$

donde  $H(x)$  denota una función de energía suave que es globalmente definida positiva en  $\mathbb{R}^n$ . El vector de columna del gradiente de  $H(x)$ , se denota por  $\frac{\partial H}{\partial x}$ , se supone que existe en todas partes. Para la elección de  $H(x)$ , las funciones de energía cuadráticas son utilizadas con frecuencia, con la forma:

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T M x \quad (3)$$

con  $M$  siendo una matriz simétrica definida positiva. Las matrices cuadradas,  $J(x)$  y  $S(x)$ , dentro de la expresión (2) satisfacen, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , las siguientes propiedades que muestran la estructura de administración de energía del sistema son:

$$J(x) + J^T(x) = 0, \quad S(x) = S^T(x) \quad (4)$$

El campo vectorial  $J(x) \frac{\partial H}{\partial x}$  exhibe la parte conservativa del sistema y también se conoce como la parte sin trabajo. La matriz  $S(x)$  es, en general, una matriz simétrica que representa la parte que presenta el trabajo o la parte disipativa del sistema. Para ciertos sistemas, la matriz  $S(x)$  es semi-definida negativa o definida negativa. En tales casos, el campo vectorial se conoce como la parte disipativa del sistema. Si  $S(x)$  es definida positiva, o semi-definida positiva, representa la parte desestabilizadora global, semi-global y local del sistema.  $F(x)$  representa un campo vectorial localmente desestabilizante, podemos encontrar más información en Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000).

Dada una red con  $N$  sistemas caóticos idénticos como nodos, expresados en forma Hamiltoniana generalizada, se puede expresar la red por

$$\dot{x}_i = J(x_i) \frac{\partial H}{\partial x_i} + S(x_i) \frac{\partial H}{\partial x_i} + F(x_i) \quad x_i(t) \in \mathbb{R}^n \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

donde cada  $\dot{x}_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  es un sistema caótico dentro de la red,  $n$  es el orden del sistema de ecuaciones que describe cada sistema. Definiendo un nodo  $\dot{x}_j$  donde  $j \neq i$ , que también pertenece a la misma red, el objetivo de una ley de control para sincronizar cada nodo dentro de la red debe cumplir la siguiente condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0 \quad (6)$$

lo que nos indica que los estados entre los nodos  $x_i$  y  $x_j$  convergen.

El sistema (5) puede expresarse como una planta en forma Hamiltoniana generalizada de la siguiente manera:

$$P_H : \begin{cases} \dot{x}_i = J(x_i) \frac{\partial H(x_i)}{\partial x_i} + S(x_i) \frac{\partial H(x_i)}{\partial x_i} + F(x_i) \\ + g(x_i) u_{Hi} \\ y_i = h(x_i). \end{cases} \quad (7)$$

Si consideramos que los sistemas  $x_i$  son parte de una red, podemos proponer modelos con tal que  $i \neq j$  con a forma:

$$M_H : \begin{cases} \dot{x}_j = J(x_{Mj}) \frac{\partial H(x_{Mj})}{\partial x_{Mj}} + S(x_{Mj}) \frac{\partial H(x_{Mj})}{\partial x_{Mj}} \\ + F(x_{Mj}) + g_M(x_{Mj}) u_{HMj} \\ y_{Mj} = h(x_{Mj}). \end{cases} \quad (8)$$

El problema de Acoplamiento a Modelos nos dice que dada una planta  $P$  y un modelo  $M$ , alrededor de sus respectivos puntos de equilibrio  $x^o$  y  $x_M^o$  y un punto  $x_E^o$ , el problema de Acoplamiento a Modelos es encontrar una ley de control  $u(t)$ , tal que  $y_E \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El modelo  $M$  es el maestro y la planta  $P$  actúa como el esclavo en una configuración maestro-esclavo. En el método de Acoplamiento a Modelos se propone un sistema auxiliar, que contiene los dos sistemas que se pretenden sincronizar mediante una ley de control  $u(t)$ . El sistema auxiliar se basa en la planta  $P$  y el modelo  $M$  y se expresa como  $E$ . La salida del sistema auxiliar  $E$  es la diferencia de las salidas de  $P$  y  $M$ , esto significa que cuando el resultado es 0 los sistemas  $P$  y  $M$  están sincronizados, como se explica en López-Mancilla (2005).

Tomando como referencia Mancilla y Cahuich (2018), la ley de control para lograr la sincronización entre los estados de los nodos de una red usando acoplamiento a modelos, esta dada por

$$u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{ij} \quad (9)$$

La matriz de acoplamiento de una red describe las conexiones entre los nodos que la conforman. En acoplamiento a modelos para redes, el subíndice  $i$  indica qué nodo se toma como planta, el subíndice  $j$  indica qué nodo se usa como modelo. Los valores de  $a_{ij}$  se toman de la matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , si existe una conexión entre un nodo  $i$  y un nodo  $j$ , el elemento  $a_{ij} = 1$  en caso contrario  $a_{ij} = 0$ .

Los valores de  $u_{ij}$  estan dados por:

$$u_{ij} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x_i)} (V_{ij} - L_f^r h(x_i) + L_f^r h(x_j) + L_g L_f^{r-1} h(x_j) u_j) \quad (10)$$

Esta ley de control se puede obtener a partir del sistema auxiliar que se plantea en el método de acoplamiento a

modelos. Es importante notar que la ley de control (10) es basada en los sistemas completos.

Teniendo en cuenta que la parte disipativa del sistema será cero a medida que el tiempo tiende hacia el infinito y la función desestabilizante depende de las variables de estado, las partes disipativa y desestabilizante del sistema en forma Hamiltoniana, no se consideran parte del sistema cuando aplicamos Acoplamiento a Modelos para encontrar una ley de control que logre la sincronización entre un modelo y una planta. De tal manera que la planta y modelo que se usan para plantear un sistema auxiliar están dados por:

$$P_J : \begin{cases} \dot{x}_i = J(x_i) \frac{\partial H(x_i)}{\partial x_i} + g(x_i) u_{Hi} \\ y_i = h(x_i) \end{cases} \quad (11)$$

$$M_J : \begin{cases} \dot{x}_{Mj} = J(x_{Mj}) \frac{\partial H(x_{Mj})}{\partial x_{Mj}} + g_M(x_{Mj}) u_{HMj} \\ y_j = h(x_{Mj}) \end{cases} \quad (12)$$

En base a las ecuaciones (11) y (12) se puede plantear un sistema auxiliar con la forma :

$$E_{Jij} : \begin{cases} \dot{x}_{Eij} = f_{Eij}(x_{Eij}) + g(x_{Eij}) u_{Hi} + g_M(x_{Eij}) u_{HMj} \\ y_{Eij} = h_{Eij}(x_{Eij}) \end{cases} \quad (13)$$

Donde

$$\begin{aligned} x_{Eij} &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}) \\ f_{Eij}(x_{Eij}) &= \begin{pmatrix} J(x_i) & 0 \\ 0 & J(x_{Mj}) \end{pmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_{Eij}} \\ g_M(x_{Eij}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_{Mj}) \end{pmatrix} \\ g(x_{Eij}) &= \begin{pmatrix} g(x_i) \\ 0 \end{pmatrix} \\ h_{Eij}(x_{Eij}) &= h(x_i) - h(x_{Mj}). \end{aligned} \quad (14)$$

$H(x_i)$  y  $H(x_{Mj})$  son las funciones de energía propuestas para los sistemas  $P_J$  y  $M_J$  en forma Hamiltoniana. La función de energía del sistema auxiliar es  $H_E(x_{Eij}) = H(x_i) + H(x_{Mj})$ . Con la propuesta de los nuevos sistemas y haciendo una analogía de la ecuación (9), la ecuación para encontrar una ley de control para sincronizar redes de sistemas caóticos idénticos usando formas Hamiltonianas queda como:

$$u_{Hi} = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{Hij} \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} u_{Hij} &= \frac{1}{L_g L_{f_{Eij}}^{r-1} h_{Eij}(x_{Eij})} (V_{Hij} - L_{f_{Eij}}^r h_{Eij}(x_{Eij}) \\ &+ L_{g_M} L_{f_{Eij}}^{r-1} h_{Eij}(x_{Eij}) u_{HMj}) \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. LEYES DE CONTROL PARA LOS SISTEMAS CAÓTICOS DE LORENZ Y CHEN

Para calcular las leyes de control basadas en la parte conservativa de los sistemas en forma Hamiltoniana generalizada, se usan las ecuaciones (15) y (16). Para el cálculo de las constantes de  $V_{Hij}$ , se usa el método de ubicación de polos.

#### 3.1 Ley de Control para una red en topología de anillo de sistemas caóticos de Lorenz

Basado en Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000) la forma Hamiltoniana de un sistema de Lorenz, con una función de energía  $H(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right]$  es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} -\sigma^2 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ r x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Utilizando solo la parte conservativa de la forma Hamiltoniana, se proponen las plantas  $P_J$  y modelos  $M_J$  como:

$$P_J : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{i1} \\ 0 & x_{i1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H(x_i)}{\partial x_i} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{Hi} \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (18)$$

$$M_J : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{Mj1} \\ \dot{x}_{Mj2} \\ \dot{x}_{Mj3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{Mj1} \\ 0 & x_{Mj1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H(x_{Mj})}{\partial x_{Mj}} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{HMj} \\ y_j = x_{Mj1} \end{cases} \quad (19)$$

Dados  $P_J$  y  $M_J$  los sistemas auxiliares  $E_{Jij}$  queda como:

$$E_{Jij} : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \\ \dot{x}_{Mj1} \\ \dot{x}_{Mj2} \\ \dot{x}_{Mj3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma & 0 & -x_{Mj1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{Mj1} & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{Hi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{HMj} \\ y_{Eij} = x_{i1} - x_{Mj1} \end{array} \right. \quad (20)$$

Calculando las derivadas de Lie necesarias a partir del sistema auxiliar (20), donde el grado relativo se considera como  $r = 2$  y sustituyendo los valores de las derivadas de Lie en (16) la ley de control para la sincronización es:

$$u_{Hi} = \left( \frac{1}{2} - \frac{2c_1}{\sigma} \right) (x_{i1} - x_{Mj1}) - c_2 (x_{i2} - x_{Mj2}) + x_{i1}x_{i3} - x_{Mj1}x_{Mj3} + u_{HMj} \quad (21)$$

### 3.2 Ley de Control para una red en topología de anillo de sistemas caóticos de Chen

Basado en Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez (2000) la forma Hamiltoniana de un sistema de Chen con una función de energía  $H(x) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]$  es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} -a & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (22)$$

donde  $k = a - \frac{c}{2}$ , usando solo la parte conservativa de la forma Hamiltoniana, una planta  $P_H$ , modelo  $M_H$  y un sistema auxiliar  $E_H$ , se proponen como:

$$P_H : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_{i1} \\ 0 & x_{i1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{Hi} \\ y_i = x_{i1} \end{array} \right. \quad (23)$$

$$M_H : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{Mj1} \\ \dot{x}_{Mj2} \\ \dot{x}_{Mj3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -x_{Mj1} \\ 0 & x_{Mj1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{HMj} \\ y_j = x_{Mj1} \end{array} \right. \quad (24)$$

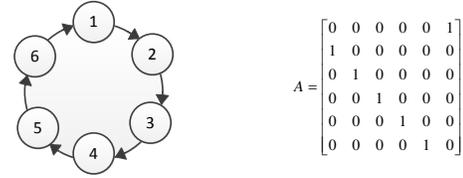


Figura 1. Grafo de una red de Anillo con 6 nodos y su matriz de adyacencia.

$$E_H : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \\ \dot{x}_{Mj1} \\ \dot{x}_{Mj2} \\ \dot{x}_{Mj3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & -x_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & -x_{Mj1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{Mj1} & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{Hi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{HMj} \\ y_{Eij} = x_{i1} - x_{Mj1} \end{array} \right. \quad (25)$$

Calculando las derivadas de Lie necesarias, donde el grado relativo se considera  $r = 2$ , sustituyendo los valores de las derivadas de Lie en (16), la ley de control para la sincronización de dos sistemas caóticos de Chen es:

$$u_{Hi} = \left( k - \frac{c_1}{k} \right) (x_{i1} - x_{Mj1}) - c_2 (x_{i2} - x_{Mj2}) + x_{i1}x_{i3} - x_{Mj1}x_{Mj3} + u_{HMj} \quad (26)$$

## 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, las simulaciones numéricas de los sistemas se presentan utilizando las leyes de control obtenidas en la sección 3. Las simulaciones se realizan usando un algoritmo de Runge-Kuta de cuarto orden, programado en MatLab  $\text{\textcircled{R}}$ . Se utilizó una topología de anillo con seis nodos para los dos ejemplos presentados en este trabajo, como se muestra en la Fig.1.

El sistema de Lorenz exhibe una dinámica caótica con los parámetros  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ . Se usaron los mismos parámetros para todos los nodos de la red.

En la Fig. 2 podemos ver la gráfica del espacio de estados entre los nodos de la red en topología de anillo de sistemas caóticos de Lorenz. En la parte superior izquierda se muestra un acercamiento de como los estados convergen usando la ley de control. En la Fig. 3 se puede apreciar la gráfica de sincronía entre los estados, en la cual se puede apreciar que están a cuarenta y cinco grados, lo que indica que se logra la sincronización entre los nodos de la red.

El sistema Chen exhibe una dinámica caótica con los parámetros  $a = 35$ ,  $b = 3$  y  $c = 28$ . Se usaron los mismos parámetros para todos los nodos de la red.

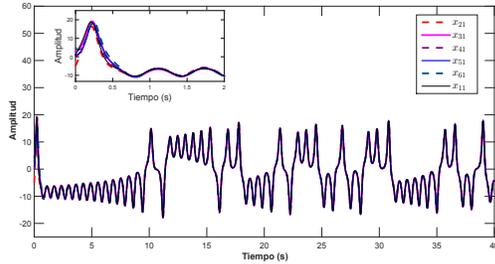


Figura 2. Gráfica de los estados  $x_{i1}$  contra el tiempo en una red de sistemas caóticos de Lorenz con topología de Anillo.

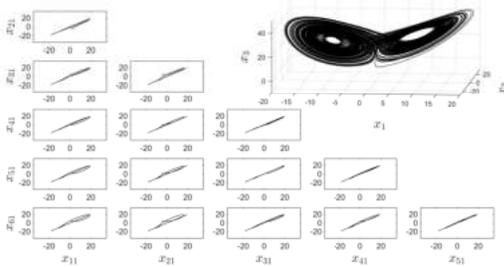


Figura 3. Gráficas de sincronización entre los estados  $x_{i1}$  de la red de sistemas caóticos de Lorenz.

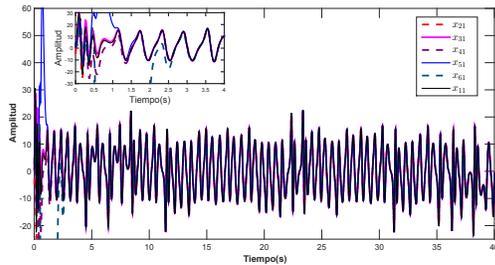


Figura 4. Gráfica de los estados  $x_{i1}$  contra el tiempo en una red de sistemas caóticos de Chen con topología de Anillo.

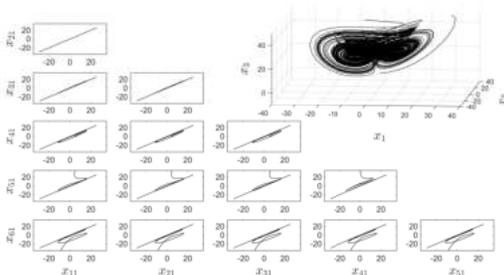


Figura 5. Gráficas de sincronización entre los estados  $x_{i1}$  de la red de sistemas caóticos de Chen.

En la Fig. 4 podemos ver la gráfica del espacio de estados entre los nodos de la una red en topología de anillo de sistemas caóticos de Chen. En la parte superior izquierda se muestra un acercamiento de como los estados convergen usando la ley de control. En la Fig. 5 se puede apreciar la gráfica de sincronía entre los estados, en la cual se puede

apreciar que están a cuarenta y cinco grados, lo que indica que se logra la sincronización entre los nodos de la red.

## 5. CONCLUSIONES

En base a las simulaciones, se puede concluir que las leyes de control obtenidas para la sincronización de las redes de los sistemas caóticos de Lorenz y Chen en topología de estrella se logra. El método de Acoplamiento a Modelos se utiliza para obtener las leyes de control basadas en la parte conservativa de la forma Hamiltoniana generalizada. Hacer esto nos brinda una ley de control optimizada, simplificando los cálculos que se hacen en el método original. Los sistemas de Lorenz y Chen fueron elegidos por el hecho de que las formas Hamiltonianas de los sistemas ya se habían obtenido en otros trabajos y por ser sistemas clásicos. Dado que las leyes de control son relativamente simples, se puede realizar una posible implementación física para futuros trabajos.

## REFERENCIAS

- López-Mancilla, D., Cruz-Hernández, C., y Posadas-Castillo, C. (2005). A modified chaos-based communication scheme using Hamiltonian forms and observer. *Journal of Physics: Conference Series*, 23(1), 267–275. doi:10.1088/1742-6596/23/1/028.
- López-Mancilla, D. (2005). *Sincronización de Osciladores Caóticos Perturbados con Aplicación a Sistemas de Comunicaciones*. Ph.D. thesis, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada.
- Mancilla, D.L. y Cahuich, G.L. (2018). Sincronización de osciladores caóticos por acoplamiento a modelos en redes de topología estrella. *Pistas Educativas*, 38(120).
- Pecora, L.M. y Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8), 821–824. doi:10.1103/PhysRevLett.64.821.
- Posadas-Castillo, C., Garza-González, E., Diaz-Romero, D.A., Alcorta-García, E., y Cruz-Hernández, C. (2014). Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators: Hamiltonian systems approach. *Journal of Applied Research and Technology*, 12(4), 782–791. doi:10.1016/S1665-6423(14)70094-X.
- Sira-Ramirez, H. y Cruz-Hernandez, C. (2000). Synchronization of chaotic systems: a generalized hamiltonian systems approach. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, 2(5), 1381–1395. doi:10.1109/ACC.2000.876602.
- Strogatz, S.H. (2003). *Sync: how order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*. HYPERION, New York, 1 edition.