

## Sincronización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales mediante un controlador dinámico.

Juan Pablo Flores-Flores and Rafael Martínez-Guerra\*

Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360 CDMX,  
México (e-mail: {jflores, rguerra}@ctrl.cinvestav.mx).

**Resumen:** En este trabajo se presenta un controlador de tipo dinámico para la sincronización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. La metodología utilizada para el diseño del controlador parte de la existencia de un elemento primitivo diferencial. El análisis de estabilidad del controlador propuesto hace uso de la teoría espectral y la teoría de semigrupos, dado que el error de sincronización evoluciona en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Para demostrar la efectividad del controlador, se presentan los resultados numéricos de la sincronización generalizada de dos sistemas Gray-Scott.

**Palabras Clave:** Controlador dinámico, elemento primitivo diferencial, sincronización generalizada, sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

### 1. INTRODUCCION

Normalmente, para controlar un sistema no lineal se busca compensar las no linealidades de dicho sistema. Tal compensación se puede realizar de diferentes maneras. Una de ellas, es hallando una representación alterna del sistema, misma que facilite el diseño de un controlador. En este trabajo, utilizaremos el llamado elemento primitivo diferencial para generar un mapeo que permita hallar la ya mencionada representación alterna del sistema no lineal. Anteriormente, este concepto ha sido utilizado en problemas de dimensión finita, (vea [1],[2],[3]). En particular, Martínez-Guerra *et al.* resolvieron el problema de sincronización generalizada de sistemas caóticos, tanto en el caso entero como en el fraccional.

El elemento primitivo diferencial es objeto de estudio del álgebra diferencial, (vea [4]). Dadas sus características, este puede ser utilizado para generar un mapeo o transformación cuya primer componente es precisamente el elemento primitivo diferencial. A través de este mapeo, es posible hallar una representación equivalente conocida como forma canónica de observabilidad generalizada. Esta representación es particularmente útil para atacar el problema de sincronización generalizada.

La sincronización es un fenómeno que sucede cuando el comportamiento de dos o más sistemas es igual transcurrido un tiempo. La sincronización puede ocurrir naturalmente o de manera forzada. La sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de estudio desde 1990, cuando se demostró la posibilidad de sincronizar sistemas caóticos, (vea [5]). Pecora y Carroll demostraron que era posible lograr la sincronización

de sistemas idénticos, también conocida como sincronización idéntica. Para ello era necesario un acoplamiento unidireccional (configuración maestro-esclavo) que satisficiera ciertas propiedades geométricas. No obstante, tales propiedades no siempre se satisfacen, tal que es necesario el uso de algún tipo de controlador, [6],[7],[8]. Con ayuda de un controlador, además de resolver el inconveniente de las propiedades geométricas, es posible incluso sincronizar sistemas estrictamente diferentes. En tal caso, se habla de sincronización generalizada.

El concepto de sincronización generalizada fue inicialmente propuesto para estudiar la sincronización de sistemas estrictamente diferentes. En este trabajo, la definición de sincronización generalizada utilizada se basa en la existencia de un mapeo o transformación  $H$ , tal que el estado del sistema maestro  $\mu$  y el del sistema esclavo  $\nu$  satisfacen  $H(\nu) = \mu$ . Esta definición fue introducida en [2]. Debido a la existencia de una relación entre los sistemas, el concepto de sincronización generalizada toma relevancia en cuestiones prácticas, dado que es casi imposible construir dos sistemas completamente idénticos. Además, es fácil notar que este concepto es una generalización, pues si el mapeo  $H$  coincide con la identidad, hablamos de sincronización idéntica, (vea [9]).

En [2] se sincronizaron sistemas estrictamente diferentes haciendo uso del ya mencionado elemento primitivo diferencial. No obstante, los sistemas considerados ahí son sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. En este trabajo se mostrará que es posible emplear una metodología similar para sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales. Para ello, es necesario tener en cuenta que la solución de los sistemas involucrados evoluciona en un espacio de Hilbert de dimensión infinita, tal que es necesario hacer un análisis de

\* Corresponding Author

estabilidad diferente al que normalmente se haría para sistemas en dimensión finita.

## 2. DEFINICIONES

A continuación se introducen algunas nociones básicas del algebra diferencial.

**Definición 1.** Un campo  $K$  dotado de un conjunto finito  $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  es denominado un *campo diferencial*, denotado como  $(K, \Delta)$ , si  $\partial_1, \dots, \partial_n$  son derivadas  $\partial_i : K \rightarrow K$  tales que

- 1)  $\partial_i(a+b) = \partial_i(a) + \partial_i(b)$
- 2)  $\partial_i(ab) = \partial_i(a)b + a\partial_i(b)$

Para todo  $a, b \in K$ .

Note que,  $(K, \Delta)$  es un *campo diferencial ordinario* si  $\Delta = \{\partial\}$  y un *campo diferencial parcial* si  $\Delta = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ .

**Definición 2.** Sean  $(L, \Delta_L)$  y  $(K, \Delta_K)$  campos diferenciales con  $\Delta_L = \{\partial_1^L, \dots, \partial_n^L\}$  y  $\Delta_K = \{\partial_1^K, \dots, \partial_n^K\}$  respectivamente. La extensión  $L/K$  es una *extensión de campo diferencial* si  $K \subset L$  y para  $i, 1 \leq i \leq n$ ,

$$\partial_i^K|_L = \partial_i^L$$

Por simplicidad, en lo que sigue  $(K, \Delta)$  será denotado únicamente como  $K$ .

**Definición 3.** Todo elemento  $a \in L$  se dice *diferencialmente algebraico sobre  $K$*  si satisface una ecuación algebraica diferencial cuyos coeficientes pertenecen a  $K$ . Si todo elemento de  $L$  es diferencialmente algebraico sobre  $K$ , la extensión de campo diferencial  $L/K$  se dice ser *diferencialmente algebraica*.

Sean  $u = (u_1, \dots, u_m)$  y  $y = (y_1, \dots, y_p)$  conjuntos de cantidades diferenciales. Un sistema dinámico puede ser definido como una extensión de campo diferencial  $K \langle u, y \rangle / K \langle u \rangle$  con entrada  $u$  y salida  $y$ , la cual es algebraicamente diferencial.

**Definición 4.** El elemento  $\zeta \in L$  es un *elemento primitivo diferencial* de la extensión de campo diferencial  $L/K$  tal que  $L$  es diferencialmente generado por  $\zeta$  y  $K$ , i.e.  $K \langle \zeta \rangle = L$ .

**Definición 5.** Considere dos sistemas dinámicos acoplados unidireccionalmente. Los sistemas están dados por

$$\Sigma_m := \begin{cases} \partial(\mu) = F_m(\mu, u_m) \\ y_m = h_m(\mu) \end{cases}$$

Y por

$$\Sigma_s := \begin{cases} \partial(v) = F_s(v, u_s(y_m, v)) \\ y_s = h_m(v) \end{cases}$$

Donde  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$  y  $v \in \mathbb{R}^{n_s}$ .  $F_m$  y  $F_s$  son polinomios de sus argumentos. Las funciones  $h_m$  y  $h_s$  son analíticas.

Los sistemas  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  están en un estado de *sincronización generalizada* si existe un elemento primitivo diferencial  $\zeta$  que genere el mapeo  $H : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ , con  $H = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$ , una

variedad algebraica  $N = \{(\mu, v) | \mu = H(v)\}$  y un conjunto compacto  $B \subset \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $N \subset B$ , tal que toda trayectoria con condiciones iniciales en  $B$  se aproxime a  $N$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Cuando la condición de sincronización generalizada se satisface, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H(v) - \mu\| = 0.$$

O equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta - \eta\| = 0.$$

Con  $\delta = \Phi_m(\mu)$  y  $\eta = \Phi_s(v)$ . La variable  $e(t)$  es conocida como error de sincronización y es solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$e_t = Ae \quad (1)$$

Donde  $A$  es algún operador lineal. La solución del sistema (1) evoluciona en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. De tal manera que para analizar la estabilidad del sistema, se recurre a la teoría de semigrupos y a la teoría espectral, [11], [12].

Considere el sistema lineal (1), donde  $A$  es algún operador lineal en un espacio de Hilbert  $E$ . La solución del sistema esta dada por

$$e(t) = S(t)e_0$$

Donde  $e(0) = e_0$  y  $S(t)$  es un semigrupo fuertemente continuo.

**Definición 6.** Una familia de operadores acotados  $S(t)$ , con  $t \geq 0$ , en un espacio de Hilbert  $E$ , se denomina un semigrupo fuertemente continuo si

- 1)  $S(0) = I$
- 2)  $S(t)S(s) = S(t+s)$
- 3)  $\lim_{s \rightarrow t} \|S(s)e - S(t)e\| = 0$

Para todo  $e \in E$  y para todo  $t, s \geq 0$ .

**Definición 7.** El semigrupo  $S(t)$  es exponencialmente estable si existen  $\infty > M \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que  $\|S(t)\| \leq M \exp(-\alpha t)$  para todo  $t \geq 0$ .

**Definición 8.** El sistema (1) es estable si el operador lineal  $A$  genera un semigrupo exponencialmente estable.

**Definición 9.** Un operador lineal  $A$  en un espacio de Hilbert  $E$  genera un semigrupo fuertemente continuo que satisface  $\|S(t)\| \leq M \exp(-\alpha t)$  si y sólo si  $A$  es cerrado, denso y  $Re(\lambda) < -\alpha$  para todo  $\lambda \in \sigma(A)$ . Donde  $\sigma(A)$  denota el espectro de  $A$ .

De lo anterior, es evidente que la estabilidad exponencial de  $S(t)$  depende principalmente de  $\alpha$ . Sin embargo, la estabilidad exponencial del sistema (1) puede ser determinada directamente del llamado radio espectral del semigrupo. Para ello, consideremos la siguiente relación

$$r(S(t)) = \exp(\alpha_0 t)$$

Donde  $\alpha_0$  y  $r(S(t))$  se definen a continuación.

**Definición 10.** El límite de crecimiento de un semigrupo fuertemente continuo es

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha \mid \|S(t)\| \leq M \exp(\alpha t), \forall t \geq 0, 1 \leq M < \infty \}$$

**Definición 11.** El radio espectral de  $S(t)$  para algún  $t > 0$  es

$$r(S(t)) = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(S(t)) \}$$

Donde  $\sigma(S(t))$  es el espectro del semigrupo y está dado por

$$\sigma(S(t)) \setminus \{0\} = \{ \exp(\lambda t) \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

Por lo tanto, si el radio espectral  $r(S(t)) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $Re(\lambda) \leq -\alpha_0 < 0$  para todo  $\lambda \in \sigma(A)$  y por lo tanto el sistema (1) es asintóticamente estable.

### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A continuación se presenta una metodología basada en el elemento primitivo diferencial para la sincronización generalizada de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. Considere dos sistemas en una configuración maestro-esclavo. El sistema maestro está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= L_m \mu + N_m(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n_m} \\ y_m &= h_m(\mu) \end{aligned} \quad (2)$$

Con condiciones iniciales  $\mu(0) = \mu_0$ . Por su parte, el sistema esclavo es

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= L_s v + N_s(v), \quad v \in \mathbb{R}^{n_s} \\ y_s &= h_s(v) \end{aligned} \quad (3)$$

Con condiciones iniciales  $v(0) = v_0$ .  $L_m$  y  $L_s$  son operadores lineales diferenciales,  $N_m$  y  $N_s$  son términos no lineales. Las funciones  $h_m$  y  $h_s$  son funciones analíticas.  $\mathbb{R}^{n_m}$  y  $\mathbb{R}^{n_s}$  denotan el espacio  $n$ -dimensional del sistema maestro y esclavo respectivamente.

Definamos ahora un elemento primitivo diferencial para cada sistema como una combinación lineal tal que para el sistema maestro tenemos

$$\delta = \sum_i \alpha_i \mu_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \langle u \rangle$$

Mientras que para el sistema esclavo

$$\eta = \sum_i \beta_i v_i + \sum_j \gamma_j u_j, \quad \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{R} \langle u \rangle$$

Sin pérdida de generalidad, se considera la entrada del sistema maestro  $u_m = 0$ . Por lo tanto, la entrada del sistema esclavo  $u_s$  es denotada simplemente como  $u$ . A partir de cada elemento primitivo diferencial se generan las siguientes transformaciones

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} \delta \\ \partial \delta / \partial t \\ \vdots \\ \partial^{n-1} \delta / \partial t^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_s = \begin{pmatrix} \eta \\ \partial \eta / \partial t \\ \vdots \\ \partial^{n-1} \eta / \partial t^{n-1} \end{pmatrix}$$

Estas, satisfacen  $\Phi_m(\mu) = \delta$  y  $\Phi_s(v) = \eta$ . De tal manera que los sistemas maestro y esclavo pueden ser representados respectivamente como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_j}{\partial t} &= \delta_{j+1} \\ \frac{\partial \delta_n}{\partial t} &= \mathcal{L}_m(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \end{aligned} \quad (4)$$

Y como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_j}{\partial t} &= \eta_{j+1} \\ \frac{\partial \eta_n}{\partial t} &= \mathcal{L}_s(\eta_1, \dots, \eta_n, u_{t_0}, \dots, u_{t_{n-1}}) + u_{t_n} \end{aligned} \quad (5)$$

Para  $1 \leq j \leq n-1$  y donde  $u_{t_i} = \partial^i u / \partial t^i$ .

Sea el error de sincronización

$$e(t) = \delta(t) - \eta(t) \quad (6)$$

Luego, de (4) y (5) tenemos que

$$\begin{aligned} e_{j,t} &= e_{j+1} \\ e_{n,t} &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_{t_n} \end{aligned} \quad (7)$$

Nuevamente, para  $1 \leq j \leq n-1$  y donde  $e_{k,t} = \partial e_k / \partial t$ .

El controlador dinámico es obtenido a partir del siguiente sistema extendido equivalente

$$\begin{aligned} e_{j,t} &= e_{j+1} \\ e_{n,t} &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_{t_n} \\ u_{t_j} &= u_{t,j+1} \\ u_{t_n} &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s + \sum_{i=1}^n K_i e_i, \quad k_i > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Por lo tanto, en lazo cerrado, el sistema (7) es

$$e_t = A e \quad (9)$$

Donde la matriz  $A$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \end{pmatrix}$$

Notemos que  $A$  es un operador lineal que genera el semigrupo

$$S(t) = \left\{ \exp(At) \mid \max_{\|e\|=1} \|Ae\| \leq R \in \mathbb{R}, \forall e \in E \right\}$$

Donde  $E$  es un espacio de Hilbert y

$$\exp(At) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Esta familia de operadores es fuertemente continua y satisface  $\exp(A(0)) = I$ ,  $\exp(A(t+s)) = \exp(At) \exp(As)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ . Por lo tanto, el semigrupo  $S(t)$  es un semigrupo fuertemente continuo. Así, tenemos que el sistema (9) es asintóticamente estable si el radio espectral  $r(\{\exp(At)\}) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

*Teorema 1.* Si existe un controlador dinámico, dado por (8), tal que el error de sincronización satisfice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H(v) - \mu\| = 0$$

Entonces, los sistemas (2) y (3) están en un estado de sincronización generalizada  $\square$

#### 4. EJEMPLO

El sistema de Gray-Scott es un modelo autocatalítico de dos reacciones irreversibles. Este modelo presenta caos espacio temporal. Sus patrones espaciales pueden ser observados en la naturaleza, (vea [13]). Tales patrones dependen de la cantidad de las sustancias involucradas en la reacción.

El sistema Gray-Scott está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= -XY^2 + \Gamma(1 - X) + D_X \nabla^2 X \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= XY^2 - (\Gamma + \Theta)Y + D_Y \nabla^2 Y \end{aligned} \quad (10)$$

Donde  $X$  y  $Y$  representan la concentración de sustrato y activador respectivamente. El operador  $\nabla^2$  denota el Laplaciano del sistema.  $\Gamma$  es la relación de alimentación,  $\Theta$  es la velocidad de reacción, mientras que  $D_X$  y  $D_Y$  son constantes de difusión.

Sean

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} &= -\mu_1 \mu_2^2 + \Gamma_m(1 - \mu_1) + D_{\mu_1} \nabla^2 \mu_1 \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial t} &= \mu_1 \mu_2^2 - (\Gamma_m + \Theta_m) \mu_2 + D_{\mu_2} \nabla^2 \mu_2 \\ y_m &= \mu_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -v_1 v_2^2 + \Gamma_s(1 - v_1) + D_{v_1} \nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= v_1 v_2^2 - (\Gamma_s + \Theta_s) v_2 + D_{v_2} \nabla^2 v_2 \\ y_s &= v_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Dos sistemas Gray-Scott. El primero es denominado como sistema maestro y el segundo como sistema esclavo.

El comportamiento de estos sistemas, en su caso unidimensional, puede ser observado en las figuras 1 y 2. Los patrones espaciales presentados por estos sistemas son completamente diferentes entre sí. Este comportamiento es influenciado por las condiciones iniciales así como por los parámetros del sistema y es ampliamente estudiado en la teoría de Turing, (vea [14]).

Sea  $\delta_1 = \mu_1$  elemento primitivo diferencial del sistema maestro, tal que

$$\Phi_m(\mu) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Por lo tanto, el sistema (11) puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} &= \delta_2 \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial t} &= -(\mu_2^2 + \Gamma_m) \frac{\partial \mu_1}{\partial t} - 2\mu_1 \mu_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial t} + D_{\mu_1} \frac{\partial \nabla^2 \mu_1}{\partial t} \\ &= \mathcal{L}_m(\mu) \end{aligned} \quad (14)$$

Por otro lado, para el sistema esclavo definamos  $\eta_1 = v_1 + u_1$  como su elemento primitivo diferencial. De tal manera que

$$\Phi_s(v) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Por lo tanto, tenemos que el sistema esclavo es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} &= \eta_2 \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} &= - (v_2^2 + \Gamma_s) \frac{\partial v_1}{\partial t} - 2v_1 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + D_{v_1} \frac{\partial \nabla^2 v_1}{\partial t} + u_3 \\ &= \mathcal{L}_s(v) + u_3 \end{aligned} \quad (16)$$

De (14) y (16) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial t} &= e_2 \\ \frac{\partial e_2}{\partial t} &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_3 \end{aligned} \quad (17)$$

Se propone el controlador dinámico obtenido a partir del siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} e_{1t} &= e_2 \\ e_{2t} &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_3 \\ u_{1t} &= u_2 \\ u_{2t} &= u_3 = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s + \sum_{i=1}^n k_i e_i \end{aligned} \quad (18)$$

Tal que en lazo cerrado tenemos

$$e_t = A e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

La estabilidad exponencial del sistema (19) puede ser determinada de la siguiente manera. Considere el espectro de la matriz  $A$  dado por

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda_1, \lambda_2\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \left( k_2 + \sqrt{-4k_1 + k_2^2} \right), -\frac{1}{2} \left( k_2 - \sqrt{-4k_1 + k_2^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

De tal manera que el radio espectral del semigrupo generado por  $A$  es

$$r(\{\exp(At)\}) = \sup \{ |\exp(\lambda_1 t)|, |\exp(\lambda_2 t)| \}$$

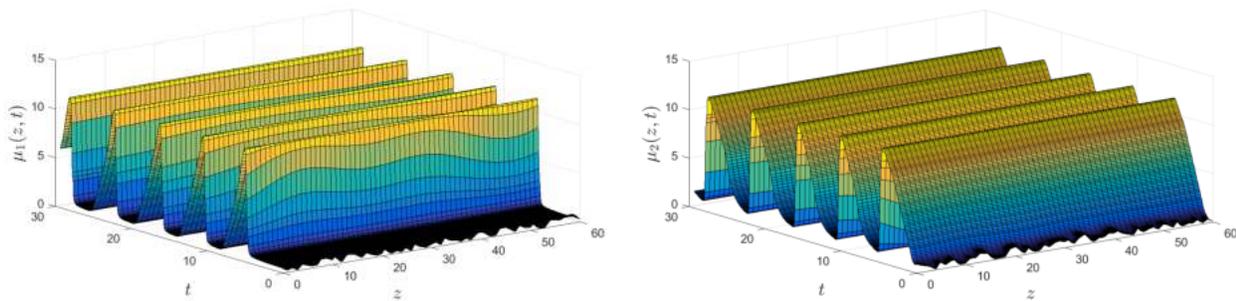


Figura 1. Sistema Gray-Scott maestro con relación de alimentación  $\Gamma_m = 0,09$ , velocidad de reacción  $\Theta = -0,01$  y constantes de difusión  $D_{\mu_1} = 0,63, D_{\mu_2} = 0,8$ .

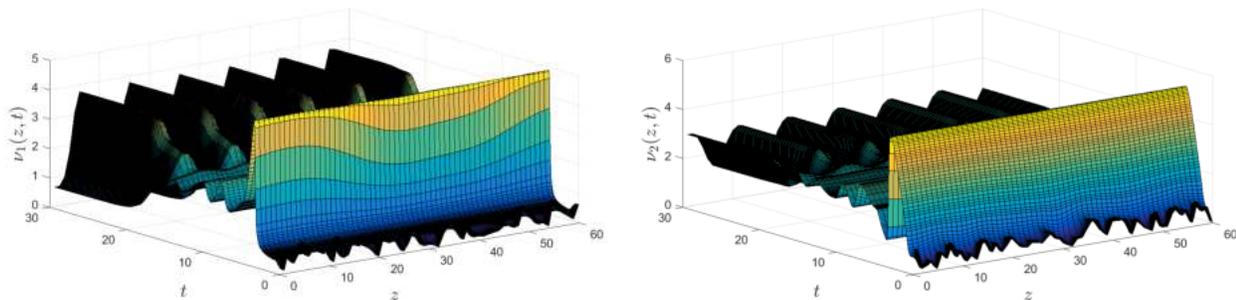


Figura 2. Sistema Gray-Scott esclavo con relación de alimentación  $\Gamma_m = 0,09$ , velocidad de reacción  $\Theta = -0,01$  y constantes de difusión  $D_{v_1} = 0,63, D_{v_2} = 0,8$ .

Es posible notar que si  $k_1, k_2 > 0$  entonces  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$  y por lo tanto  $r(\{\exp(At)\}) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, el sistema (19) es asintóticamente estable.

#### 4.1 Resultados Numéricos

La simulación numérica presentada a continuación considera sistemas de Gray-Scott unidimensionales. La discretización espacial se realizó haciendo uso del método de diferencias finitas.

Las condiciones iniciales para ambos sistemas son aleatorias. Por otro lado, los parámetros de los mismos fueron escogidos de la siguiente manera. Relación de alimentación  $\Gamma_m = \Gamma_s = 0,09$ , velocidad de reacción  $\Theta_m = \Theta_s = -0,01$  y constantes de difusión  $D_{\mu_1} = D_{v_1} = 0,63, D_{\mu_2} = D_{v_2} = 0,8$ . Las ganancias del controlador dinámico son  $k_1 = 200$  y  $k_2 = 500$ .

En la figura 3 es posible apreciar que el error de sincronización en cada punto del espacio discretizado tiende a cero, por lo tanto, es posible hablar de sincronización generalizada. Por otro lado, las figuras 4 y 5 muestran los patrones espaciales correspondientes a cada sistema, mismos que son iguales después de transcurrido un tiempo. Debemos notar que estos corresponden a las coordenadas transformadas de ambos sistemas, es decir, es posible visualizar esta sincronización gracias a los mapeos generados para ambos sistemas a partir de sus respectivos elementos primitivos diferenciales.

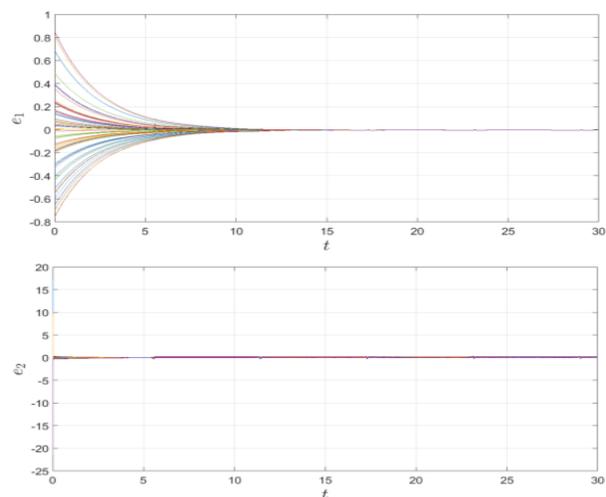


Figura 3. Error de sincronización en cada punto del espacio discretizado.

## 5. CONCLUSION

Se presentó un controlador dinámico para la sincronización generalizada de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales. El diseño del controlador dinámico se realizó en función de la existencia del denominador primitivo diferencial. El controlador dinámico fue empleado para resolver el problema de sincronización generalizada dado que es posible hallar un mapeo  $H = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$  que permite observar un comportamiento común de los sistemas involucrados. No

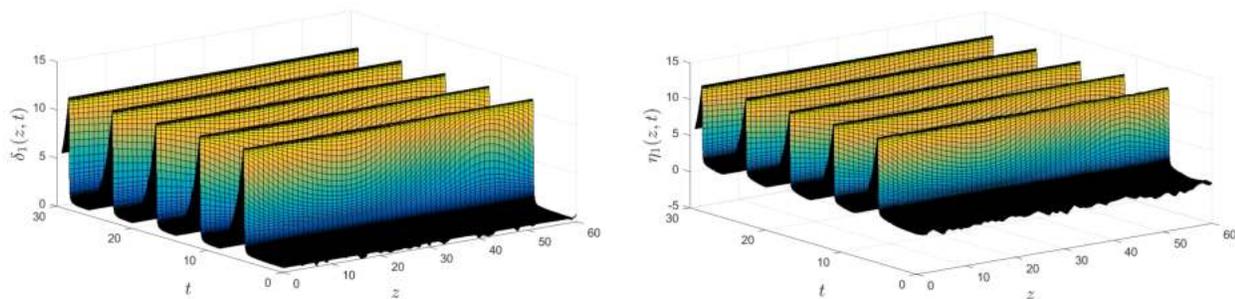


Figura 4. Sincronización generalizada de la concentración de sustrato.

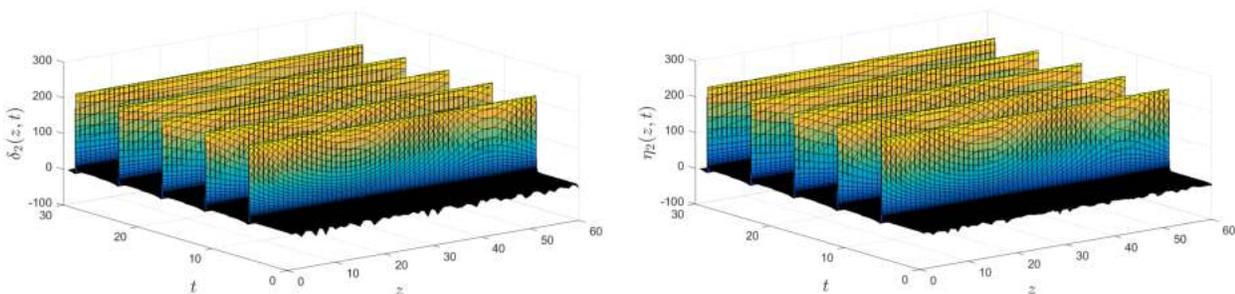


Figura 5. Sincronización generalizada de la concentración de activador.

obstante, el mismo podría ser utilizado para resolver cualquier otro problema de seguimiento de trayectoria. Por otro lado, se comprobó la estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado. Para dicho análisis se utilizaron algunos aspectos de la teoría de semigrupos y la teoría espectral, debido a que el error de sincronización evoluciona en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Tal análisis, proporciona un criterio para la elección de las ganancias del controlador. Finalmente, notemos que la metodología utilizada puede ser empleada para sincronizar sistemas estrictamente diferentes, no solo idénticos, como se hizo en este trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] M. Fliess, *Generalized controller canonical form for linear and nonlinear dynamics*, IEEE Transactions on Automatic Control 35 (9) (1990), pp. 994-1001.
- [2] R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho, G. C. Gómez-Cortés, *Synchronization of integral and fractional order chaotic systems: A differential algebraic and differential geometric approach with selected applications in real time.*, Springer, 2015.
- [3] R. Martínez-Guerra, C. A. Pérez-Pinacho, *Advances in Synchronization of Coupled Fractional Order Systems: Fundamentals and Methods*, Springer, 2018.
- [4] J. F. Ritt, *Differential algebra*, Vol. 33, American Mathematical Soc., 1950.
- [5] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. 64 (1990), pp. 821-824.
- [6] M. Yassen, *Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control*, Chaos, Solitons and Fractals 23 (1) (2005), pp. 131-140.
- [7] F. Chen, W. Zhang, *LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 67 (12) (2007), pp. 3384-3393.
- [8] H.-T. Yau, C.-S. Shieh, *Chaos synchronization using fuzzy logic controller*, Nonlinear analysis: Real world applications 9 (4) (2008), pp. 1800-1810.
- [9] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Physical Review E 51 (2) (1995), pp. 980.
- [10] R. Martínez-Guerra, J. Cruz-Victoria, R. González-Galan, R. Aguilar-Lopez, *A new reduced-order observer design for the synchronization of Lorenz systems*, Chaos, Solitons and Fractals 28 (2) (2006), pp. 511-517.
- [11] K. Morris, *Control of systems governed by partial differential equations*, The Control Theory Handbook, 2010.
- [12] M. Beck, *A brief introduction to stability theory for linear PDEs*, (2012).
- [13] P. Gray, S. Scott, *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: Isolates and other forms of multistability*, Chemical Engineering Science 38 (1) (1983), pp. 29-43.
- [14] A. Doelman, T. J. Kaper, P. A. Zegeling, *Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model*, Nonlinearity 10 (2) (1997), pp. 523.
- [15] L. Torres, G. Besançon, C. Verde, J.F. Guerrero-Castellanos, *Generalized synchronization of a class of spatiotemporal chaotic systems using nonlinear observers.*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 25(11) (2015), 1550149.