

Sincronización En Lazo Abierto De Redes Con Diferente Estructura De Conexión [★]

Adriana, Ruiz-Silva, ^{*} Juan Gonzalo, Barajas-Ramírez, ^{*}
Jonatan, Peña-Ramírez, ^{**} Joaquín, Álvarez-Gallegos. ^{**}

^{*} Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A. C.,
División de Matemáticas Aplicadas, Camino a la Presa San José 2055,
Col. Lomas 4a Secc. C.P. 78216, San Luis Potosí, S.L.P., México.
(e-mail: adriana.ruiz,jgbarajas@ipicyt.edu.mx).

^{**} Centro de Investigación Científica y Educación Superior de
Ensenada, Departamento De Electrónica y Telecomunicaciones,
Carretera Tijuana-Ensenada No. 3918, Zona Playitas, C.P. 22860,
Ensenada, Baja California, México.
(e-mail: jpena,jqalvar@cicese.mx)

Resumen: En este trabajo se investiga el surgimiento de comportamiento común entre un grupo de redes formadas por nodos idénticos pero con estructuras de conexión diferentes. Para logra sincronización completa se usa una señal de forzamiento externa, la cual se aplica solo corto periodo de tiempo, a este esquema le llamamos sincronización en lazo abierto. La novedad de este enfoque es que las redes están desacopladas una vez que la señal de forzamiento es retirada, sin embargo se preserva su comportamiento sincronizado. En esta contribución nos acotamos al caso de redes de tres nodos con conexiones direccionadas e investigamos numéricamente el surgimiento de sincronización en lazo abierto.

Keywords: Sincronización, esquema de lazo-abierto, redes dinámicas.

1. INTRODUCCIÓN

Una red dinámica compleja es un conjunto de subsistemas interconectados formando un grafo, en el cual cada nodo es una unidad funcional con su propia dinámica y cada enlace representa interacción entre ellos. Un tema de interés en el estudio de red dinámicas es el surgimiento de autoorganización entre los estados de sus subsistemas; de los fenómenos autoorganizados, el más estudiado es la sincronización. El fenómeno de sincronización se puede definir como el proceso donde dos o más sistemas dinámicos ajustan su movimiento a un comportamiento común a medida que el tiempo avanza hacia el infinito Boccaletti *et al.* (2002). Este fenómeno puede aparecer de manera espontánea presentándose tanto en sistemas naturales, como en sistemas hechos por el hombre, donde independientemente de su naturaleza los sistemas sincronizan sus ritmos a través un canal que les permite transferir información entre ellos Pikovsky *et al.* (2003).

En los últimos años el estudio de sistemas modelados como redes ha tomado gran relevancia para la comunidad científica. En particular el surgimiento de sincronización

en redes de nodos idénticos acoplados de manera lineal, simétrica y difusiva. Generalmente el fenómeno de sincronización en redes dinámicas se define en términos de tener una evolución dinámica idéntica de las variables de estado en cada uno de los nodos de la red, por lo tanto, se suele llamar sincronización completa. Para evaluar la estabilidad del comportamiento síncrono en una red, dos aspectos son importantes, por un lado la naturaleza de los nodos aislados y por el otro la estructura de conexión entre ellos. En este sentido suponiendo un acoplamiento simétrico y difusivo suficientemente fuerte la red dinámica logra asintóticamente la sincronización completa de sus nodos Wang and Chen (2002); Chen *et al.* (2015). En la literatura, es posible encontrar extensiones sobre el análisis de sincronización en sistemas interconectados, donde se consideran variantes del modelo como conexiones ponderadas, dependientes del tiempo, o dirigidas. Estas variantes pueden ser interpretadas como cambios en la matriz de acoplamiento que describe el grafo de conexión de la red. Más aun, es posible considerar que las conexiones son funciones de acoplamiento no lineal Boccaletti *et al.* (2002); Arenas *et al.* (2008). Sin embargo, son pocos los trabajos que abordan el problema de sincronización para múltiples redes acopladas Boccaletti *et al.* (2014).

En esta contribución extendemos la metodología de sincronización en lazo abierto, propuesta por Peña-Ramírez

[★] Durante este trabajo A. Ruiz-Silva recibió becas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. 424195) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

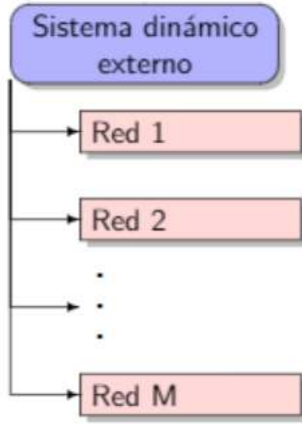


Figura 1. Esquemático para la sincronización en lazo abierto de subredes.

et al. (2015), al caso de redes con nodos idénticos y acoplamiento diferentes. El resultado principal de este trabajo es mostrar que diferentes redes no acopladas entre sí, pueden lograr un comportamiento común después de ser expuestas a una señal de sincronización durante un periodo suficientemente largo. En primera instancia aseguramos que cada red aislada se sincroniza a su propia solución de sincronización, de modo que cuando todas las subredes son expuestas a la misma señal de sincronización las diferencias entre sus comportamientos desaparecen, luego cuando la señal de sincronización es retirada las redes aisladas se mueven al unisono. En términos generales, buscamos resolver el problema de sincronizar M subredes de N nodos bajo un esquema de sincronización en lazo abierto donde la señal de sincronización se aplica solo por un tiempo corto a un solo nodo de la red. La novedad del trabajo presentado aquí es que la señal de sincronización proviene de un sistema externo que no requiere ninguna información de la dinámica o estructura de las redes interconectadas para lograr la sincronización. En este trabajo, acotamos nuestro estudio al caso de subredes direccionadas compuestas por tres sistemas dinámicos donde solamente se aplica la señal de sincronización a uno de ellos.

El resto de la contribución se organiza como sigue: el modelo de red dinámica y su sincronización es presentado en la sección 2. En la sección 3 se presenta el diseño de sincronización el lazo abierto para el caso de subredes con tres células beta con diferentes estructuras de acoplamiento. Las simulaciones numéricas presentadas en la sección 4, son utilizadas para ilustrar la efectividad del algoritmo de sincronización propuesto. Para terminar la contribución en la sección 5, se presentan comentarios finales y conclusiones.

2. DESCRIPCIÓN DE SUBREDES DINÁMICAS

Consideremos un conjunto de M redes desacopladas, donde cada una de ellas esta conformada por N_k nodos

idénticos, a su vez, cada nodo es un sistema dinámico n -dimensional descrito por

$$\dot{x}_i^{[k]}(t) = f(x_i^{[k]}(t)) \quad (1)$$

donde el subíndice indica el número de nodo en la subred y el superíndice indica a que subred corresponde en la red. La variable $x_i^{[k]}(t) = [x_{i1}^{[k]}(t), \dots, x_{in}^{[k]}(t)]^T \in \mathbf{R}^n$ es el estados del i -ésimo nodo de la k -ésima subred; la función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es la función no lineal que describe la dinámica de los nodos.

Suponga que una subred es la conexión de varios de los nodos (1) en una estructura descrita por la matriz Laplaceana $A^{[k]} = \{a_{ij}^{[k]}\} \in \mathbf{R}^{N_k \times N_k}$. De modo que cada subred se describe por:

$$\dot{x}_i^{[k]}(t) = f(x_i^{[k]}(t)) + g^{[k]} \sum_{j=1}^{N_k} a_{ij}^{[k]} \Gamma^{[k]} x_j^{[k]}(t), \quad (2)$$

para $i = 1, 2, \dots, N_k$ y $k = 1, 2, \dots, M$. La constante $g^{[k]} > 0$ representa una fuerza uniforme de acoplamiento; la matriz de acoplamiento externa de la k -ésima subred $\mathbf{A}^{[k]}$ es constante y suma cero por renglón, para la cual, si existe una conexión entre los nodos i y j , entonces $a_{ij}^{[k]} > 0$, de otra manera $a_{ij}^{[k]} = 0$ ($i \neq j$). Los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}^{[k]}$ satisfacen las restricciones de acoplamiento difusivo, es decir, $a_{ii}^{[k]} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{N_k} a_{ij}^{[k]}$ para $\forall i$. La matriz de acoplamiento interno de la k -ésima subred $\Gamma^{[k]} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es constante de cero-uno y describe cuales variables de estados se conectan de nodo a nodo.

Para cada subred dinámica (2), la sincronización completa se logra cuando todos sus nodos evolucionan al unisono. Esto se puede expresar como pedir que en el límite conforme $t \rightarrow \infty$ exista una solución tal que

$$x_1^{[k]}(t) = x_2^{[k]}(t) = \dots = x_{N_k}^{[k]}(t) = s^{[k]}(t) \quad (3)$$

donde $s^{[k]}(t) \in \mathbf{R}^n$ es llamada la solución de sincronización de la k -ésima subred. Una forma de interpretar la solución de sincronización es como la solución de la subred donde cualquier nodo evoluciona igual que cualquier otro nodo. En este caso, para un acoplamiento difusivo el segundo término derecho de (2) es igual a cero, entonces tenemos $\dot{s}^{[k]}(t) = f(s^{[k]}(t))$. Sincronización completa de (2), quiere decir que la solución (3) es asintóticamente estable Chen *et al.* (2015).

Para determinar el surgimiento de sincronización completa primero definimos los errores de cada nodo respecto de su solución de sincronización: $e_i^{[k]}(t) = x_i^{[k]}(t) - s^{[k]}(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N_k$. A partir de estos errores, linealizando sobre $s^{[k]}(t)$ se puede obtener la siguiente función variacional del error

$$\dot{e}_i^{[k]}(t) = Df(s^{[k]}(t))e_i^{[k]}(t) + g^{[k]} \sum_{j=1}^{N_k} a_{ij}^{[k]} \Gamma^{[k]} e_j^{[k]}(t) \quad (4)$$

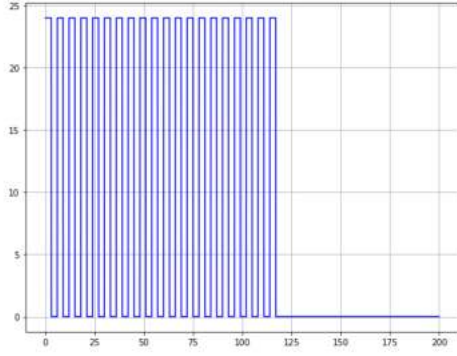


Figura 2. Tren de pulsos con $\alpha = 24$, $T = 6$, $\tau = 3$ y $t_{fin} = 120$.

donde $Df(\cdot)$ es la matriz Jacobiana de $f(\cdot)$ evaluada en $s^{[k]}(t)$. Bajo la suposición que la matriz $\mathbf{A}^{[k]}$ es diagonalizable de modo que se puede usar un cambio de coordenadas para reescribir (4) como un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo

$$\dot{\varepsilon}_i^{[k]}(t) = [Df(s^{[k]})(t) + g^{[k]} \lambda_i^{[k]} \Gamma^{[k]}] \varepsilon_i^{[k]}(t) \quad (5)$$

con $i = 1, 2, \dots, N_k$, donde $\lambda_i^{[k]}$ son los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}^{[k]}$. Si además, los eigenvalores de $\mathbf{A}^{[k]}$ se pueden ordenar como $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{N_k}$. Entonces, la estabilidad de la solución (3) puede ser establecida mediante la función de Lyapunov $V(\varepsilon_i^{[k]}) = \varepsilon_i^{[k]\top} \mathbf{P} \varepsilon_i^{[k]}$ con $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ como se describe en el siguiente resultado Wang and Chen (2002a).

Lemma 1. Para la k -ésima subred (2), suponga que existen una matriz $\mathbf{P} > 0$, dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tal que

$$[Df(s^{[k]}) + d\Gamma^{[k]\top} \mathbf{P} + \mathbf{P}[Df(s^{[k]}) + d\Gamma^{[k]}] \leq -\tau \mathbf{I}_n \quad (6)$$

para toda $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbf{I}_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz unitaria. Si además

$$g^{[k]} \lambda_2^{[k]} \leq \bar{d} \quad (7)$$

entonces el estado sincronizado (3) es exponencialmente estable.

Considere que M subredes con topología de conexión diferentes se conectan mediante una señal de sincronización generada por un sistema dinámico externo que se conecta como se muestra en la Figura 1, cuya ecuación de estados se describe por

$$\dot{x}_i^{[k]}(t) = f(x_i^{[k]}(t)) + g^{[k]} \sum_{j=1}^{N_k} a_{ij}^{[k]} \Gamma^{[k]} x_j^{[k]}(t) + B c_s(t), \quad (8)$$

donde $B \in \mathbf{R}^n$ es un vector de entradas, y $c_s(t) \in \mathbf{R}$ es una señal escalar de sincronización generada como se indica en la siguiente sección.

Un aspecto particular de la conexión propuesta es que $c_s(t)$ esta activada solo por un periodo de tiempo pequeño

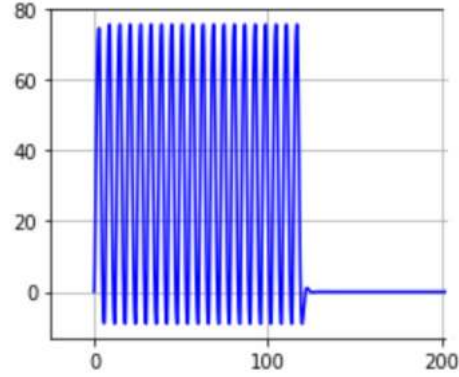


Figura 3. Señal de sincronización $c_s(t)$ generada por (10).

después del cual su valor es cero. En esta contribución consideramos subredes con diferentes estructuras de conexión las cuales después de que las subredes están expuestas a la misma señal de sincronización por un tiempo suficientemente largo cuando la señal se desvanece cada subred siguen la solución de sincronización. A este fenómeno se le llama sincronización en lazo abierto Peña-Ramírez *et al.* (2015).

3. DISEÑO DE SINCRONIZACIÓN

En esta contribución utilizamos una señal externa de sincronización similar a la utilizada en Peña-Ramírez *et al.* (2015). En particular, consideramos que la señal de sincronización es producida por un tren de impulsos $p(t)$ de la siguiente forma:

$$p(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \text{mod}(t, T) \leq \tau \text{ y } \text{mod}(t, T) < t_{fin} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (9)$$

donde α es la amplitud del pulso, $\text{mod}(a, b)$ es el sobrante de la división de a entre b , T es el periodo del tren de impulsos, $\tau < T$ es la duración de encendido del pulso y t_{fin} es la duración de la señal de sincronización. La forma del tren de pulsos utilizado en esta investigación es similar al presentado en la Figura 2.

El sistema que genera la señal de sincronización (Figura 3) surge de pasar el tren de pulsos por un sistema asintóticamente estable de segundo orden descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.8 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p(t), \quad (10)$$

$$c_s(t) = [5, 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

En este trabajo para investigar la sincronización de lazo abierto nos limitamos a nodos que son modelos del comportamiento eléctrico de la célula beta Pernarowski (1998):

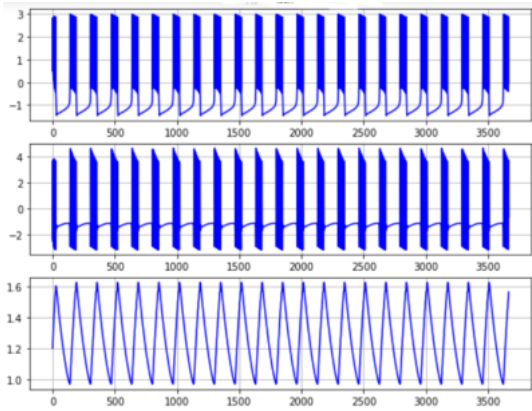


Figura 4. Dinámica de la célula beta (12).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{a}{3}x_1(t)^3 + aux_1(t)^2 + (1 - a(u^2 - \eta^2))x_1(t) \\ &\quad -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - \frac{a}{3})x_1(t)^3 + aux_1(t)^2 - a(u^2 - \eta^2)x_1(t) \\ &\quad -2x_1(t) - x_2(t) - 3, \\ \dot{x}_3(t) &= \gamma(\beta(x_1(t) - u_b) - x_3(t)).\end{aligned}\quad (12)$$

Donde $a = 0.25$, $\eta = 0.75$, $u = 1.5$, $\beta = 4.0$, $u_b = -0.954$, $\gamma = 0.0025$, $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^\top \in \mathbf{R}^3$, con $x_1(t)$ asociado al voltaje de la membrana; $x_2(t)$ con las concentraciones de iones y $x_3(t)$ es la variable lenta de cambio de concentraciones. El comportamiento de modelo de células beta se presenta en la Figura 4.

Así mismo, nos enfocamos en subredes de tres nodos para las cuales solamente se aplica la señal de sincronización a un solo nodo en la red. En este sentido los nodos pueden ser conectados en las formas mostradas en la Figura 5. En particular, consideramos que la señal de sincronización $c_s(t)$ se aplica solo en la primer coordenada $x_1(t)$.

Un aspecto importante a considerar es la controlabilidad de la red expuesta a la señal de sincronización. En particular, la controlabilidad estructural de las subredes en la Figura 5 se pueden establecer fácilmente en el caso de sistemas lineales directamente de los pesos de las conexiones, esto es Chen (2017):

Para la cadena dirigida controlada desde la raíz, la matriz de controlabilidad estructural es $\mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{21}\ell_{32} \end{bmatrix}$, la cual es de rango pleno, es decir la subred es controlable.

$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{21} & 0 \\ 0 & \ell_{31} & 0 \end{bmatrix}$ corresponde a la cadena dirigida y controlada desde el centro, la cual no es controlable. Finalmente, cerrando la cadena con enlaces bidireccionales la

matriz de controlabilidad es $\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{21} & \ell_{23}\ell_{31} \\ 0 & \ell_{31} & \ell_{32}\ell_{21} \end{bmatrix}$ la cual

es controlable bajo la condición de que $\ell_{23}\ell_{31}^2 \neq \ell_{32}\ell_{21}^2$. Por otro lado, la controlabilidad del nodo se puede es-

tablecer, al menos localmente, mediante el Jacobiano de (12), que es:

$$J(x_1(t)) = \begin{bmatrix} a(x_1(t)) & 1 & 1 \\ b(x_1(t)) & -1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde $a(x_1(t)) = -ax_1(t)^2 + 2aux_1(t) + (1 - a(u^2 - \eta^2))$, y $b(x_1(t)) = 3(1 - \frac{a}{3})x_1(t)^2 + 2aux_1(t) - a(u^2 - \eta^2)$. Donde la acción de control solo entra en la primer coordenada, es decir, $B = [1, 0, 0]^\top$. Entonces, la matriz de controlabilidad local tiene la forma:

$$C_\beta(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 1 & a(x_1(t)) & a(x_1(t))^2 + b(x_1(t)) + \gamma\beta \\ 0 & b(x_1(t)) & a(x_1(t))b(x_1(t)) - b(x_1(t)) \\ 0 & \gamma\beta & \gamma\beta a(x_1(t)) - \gamma\beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde por construcción tenemos rango pleno, esto significa que el modelo de célula beta es controlable, al menos localmente, desde la primer coordenada.

Es importante notar que aunque sepamos que la subred es estructuralmente controlable y los nodos son localmente controlables, no es suficiente para determinar que la red resultante lo sea Chen (2017). Para establecer la controlabilidad de nuestro arreglo de células beta como una cadena direccionada controlada desde la raíz se obtiene una matriz de controlabilidad para la variable de estados $[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^\top$ a partir de: $\tilde{B} = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^\top$ y el Jacobiano de la cadena controlada desde la raíz es:

$$\tilde{A}_{cr} = \begin{bmatrix} J(x_1(t)) & 0 & 0 \\ \tilde{\alpha}_1 & J(x_1(t), x_4(t)) & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & J(x_4(t), x_7(t)) \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde $\tilde{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \ell_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \ell_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J(x_1(t), x_4(t)) = J(x_4(t)) + [x_4(t), 0, 0]^\top$ y $J(x_4(t), x_7(t)) = J(x_7(t)) + [x_7(t), 0, 0]^\top$.

Por otro lado, el Jacobiano de la cadena controlada desde el centro esta dada por:

$$\tilde{A}_{cc} = \begin{bmatrix} J(x_1(t)) & 0 & 0 \\ \tilde{\alpha}_1 & J(x_1(t), x_4(t)) & 0 \\ \tilde{\alpha}_2 & 0 & J(x_4(t), x_7(t)) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Cabe remarcar que la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}_c = [\tilde{B}, \tilde{A}_{cr}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}_{cr}^8\tilde{B}]$ para la cadena de celulas beta controladas desde la raíz y desde el centro es de rango completo. En este sentido, en los ejemplos numéricos presentados en la siguiente sección utilizamos dos redes de estructura diferente pero que son controlables desde la señal de sincronización, razón por la cual surge la sincronización de lazo abierto entre ellas a pesar de su diferencia estructural.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para ilustrar el surgimiento de sincronización en lazo abierto, realizamos el experimento que se muestra en

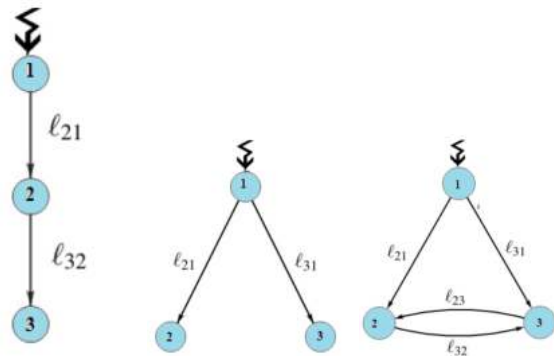


Figura 5. Redes de tres nodos con una sola entrada.

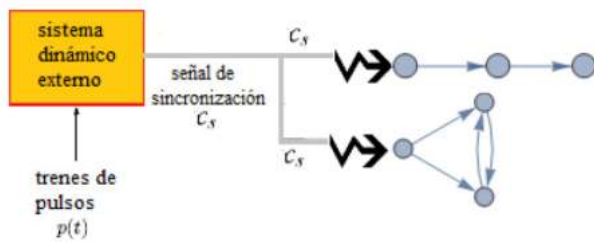


Figura 6. Experimento numérico de sincronización de lazo abierto con diferentes estructuras.

la Figura 6. Donde el sistema externo y la señal de sincronización son los descritos en (9)-(10), mientras los nodos son células betas idénticas descritas por (12). Aquí la fuerzas de acoplamiento entre los nodos son iguales $l_{21} = l_{31} = l_{32} = 2.5$, con lo que se satisface la condición de sincronización de las subredes descrita en (7).

El estudio numérico que se muestra en la Figura 7 se realizó de la siguiente forma: Durante los primeros 1000 instantes la señal de sincronización en lazo abierto esta apagada. Internamente cada subred se sincroniza, luego se aplica la señal de sincronización. Posteriormente, se activa la señal de sincronización por 2000 instantes. Al remover la señal de sincronización los estados todos los nodos de las subredes terminan con sincronización completa. Al terminar

5. COMENTARIOS FINALES

En esta contribución se presenta el resultado de ampliar los experimentos de sincronización en lazo abierto descritos en Peña-Ramírez *et al.* (2015) al caso de redes de nodos idénticos. Mostramos que para redes controlables en las cuales la señal de sincronización llega a todos los nodos de las subredes este mismo fenómeno puede observarse. Más aún, inclusive si los arreglos de las subredes son estructuralmente diferentes la sincronización de lazo abierto sigue presentandose. El resultado presentado aquí es preliminar ya que se enfoca en redes de nodos idénticos de tamaño tres en arreglos específicos, actualmente trabajamos en encontrar soluciones para el problema general en cuanto al tamaño y la estructura.

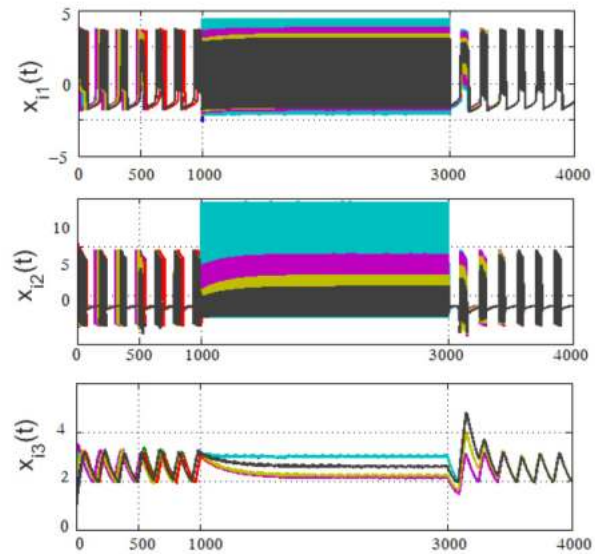


Figura 7. Estados de las células beta de ambas subredes en sincronización de lazo abierto.

REFERENCIAS

- Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., and Zhou, C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93–153, 2008.
- Boccaletti, S., Bianconi, G., Criado, R., Del Genio, C. I., Gómez-Gardenes, J., Romance, M., Sendina-Nadal, I., Wang, Z., and Zanin M. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 544(1), 1–122, 2014.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., and Zhou, C. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2), 1–101, 2002.
- Chen, G. Pinning control and controllability of complex dynamical networks, *Int. J. Autom. Comput.*, 14(1), 1–9, 2017.
- Chen, G., Wang, X., and Li, X. *Fundamentals of complex networks: models, structures and dynamics*, Blackwell Publ. Wiley, Shanghai, China, 2015.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Boston USA, 2003.
- Peña-Ramírez, J., Alvarez-Aguirre, A., Nuñez Pérez, R. F., and Álvarez, Jq. Open-loop synchronization: uncoupled oscillators may show synchronized motion, *IFAC-PapersOnLine*, (48-18), 251–256, 2015.
- Pernarowski, M., Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet *SIAM J. Appl. Math.*, 58(5), 1667–1687, 1998.
- Wang X. F. and Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(1), 187–192, 2002.
- Wang X. F. and Chen G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(1), 54–62, 2002.