

Swing-up y Estabilización en un Solo Paso del Péndulo de Rueda Inercial Usando Control Integral Discontinuo

Diego Gutiérrez-Oribio*, Ángel Mercado-Uribe**,
Jaime A. Moreno** y Leonid Fridman*

* Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, Mexico, (e-mail: diegutio2007@hotmail.com, lfridman@unam.mx)

** Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, Mexico, (e-mail: joseangelm814@gmail.com, JMorenoP@ingen.unam.mx).

Resumen: En este trabajo, se diseña un control integral discontinuo de tercer orden para realizar robustamente, el *swing-up* y la estabilización en tiempo finito de la posición de arriba del sistema de Péndulo de Rueda Inercial (RWP de sus siglas en inglés), a pesar de la presencia de incertidumbres y perturbaciones no desvanecientes. El algoritmo de control produce una señal de control continua, reduciendo el efecto de *chattering* usual en los controles por modos deslizantes. Los resultados teóricos del artículo se verifican experimentalmente en el sistema real.

Palabras clave: Modos Deslizantes de alto orden, Estabilidad en tiempo finito, Sistema Péndulo de Rueda inercial.

1. INTRODUCCIÓN

El Péndulo de Rueda Inercial (RWP de sus siglas en inglés) fue presentado por primera vez en Spong y Vidyasagar (1989) y es un sistema simple que presenta un área amplia para la investigación en la teoría de control. Históricamente, hay dos problemas principales que se han estudiado:

- El *swing-up*: Diseño de un control que lleve al péndulo de la posición de abajo, a la posición de arriba.
- La *estabilización*: Diseño de un control que mantenga los estados en el origen (el péndulo en la posición de arriba).

El problema del *swing-up* se ha estudiado principalmente usando el control basado en energía, desarrollado en Aström y Furuta (2000) (ver Andrievsky (2011) y Spong *et al.* (2001)); este tipo de controladores suministran energía al péndulo hasta que llega a una región cerca de la posición de arriba. Después es necesario cambiar a un control estabilizante, por ejemplo, el control linealizante por retroalimentación (Moreno-Valenzuela y Aguilar-Avelar (2017); Spong *et al.* (2001)), los modos deslizantes (Andrievsky (2011), Gutiérrez-Oribio *et al.* (2018), Iriarte *et al.* (2013)), y el control basado en pasividad con

interconexión y amortiguamiento (Ortega *et al.* (2002), Srinivas y Behera (2008)).

La mayoría de los trabajos de estabilización transforma al sistema a una representación local, debido a que el control que usan tiene una singularidad cuando el péndulo pasa por la horizontal. Debido a esto, no se puede considerar el problema de diseño de un control que resuelva los dos problemas, el *swing-up* y la estabilización, en un solo paso.

Por lo tanto, una alternativa para solucionar esto, es usar una representación global del RWP, como son los trabajos de Olfati-Saber (2001), Ryalat y Laila (2016) y Ye *et al.* (2008). Estos artículos diseñan un solo controlador que es capaz de realizar el *swing-up* y la estabilización (Olfati-Saber (2001) y Ye *et al.* (2008) usando backstepping y Ryalat y Laila (2016) usando el moldeo de energía), mostrando simulaciones de sus resultados. El problema es que se requiere un torque para su realización no aceptable para un experimento con el sistema real (esto último fue dicho en (Moreno-Valenzuela y Aguilar-Avelar, 2017, Capítulo 8)). Mas aún, estos trabajos no consideran la existencia de incertidumbres y o perturbaciones en el sistema, un paso importante para el diseño de un control robusto, lo cual es un objetivo de este trabajo.

Para rechazar un tipo de perturbaciones (Lipschitz continuas), una alternativa es usar algoritmos por Modos Deslizantes Continuos (Chalanga *et al.* (2013); Edwards y Shtessel (2016); Laghrouche *et al.* (2017); Moreno (2016, 2018)), asumiendo que la dinámica del actuador sea suficientemente rápida. El primer algoritmo de este tipo fue el Super-Twisting (Levant (1993, 1998); Seeber y Horn (2017)). Después siguieron los algoritmos basados en el Super-Twisting, como el Twisting Continuo (Mendoza-Ávila *et al.* (2017); Torres-González *et al.* (2017)) y los algoritmos Integrales Discontinuos (Moreno (2016), Moreno (2018)). Todos estos controladores se conforman de una parte estática homogénea que provee convergencia en tiempo finito para el sistema nominal, y una parte integral discontinua que rechaza teóricamente la perturbación Lipschitz. Estos algoritmos por modos deslizantes homogéneos producen una señal de control continua, por lo que el efecto del chattering debido a la discontinuidad y la discretización, es fuertemente atenuada.

En este trabajo, el problema del swing-up y la estabilización del RWP en un solo paso, es considerado. Se presenta una transformación para el sistema, con la cual se obtiene una representación global. Entonces, un Control Integral Discontinuo de Tercer Orden (3-DIA de sus siglas en inglés) se propone para resolver el problema.

El diseño de ganancias del 3-DIA se realizó para incrementar el dominio de atracción del origen (el péndulo en la posición de arriba), encerrando la posición de abajo del péndulo. El 3-DIA produce una señal de control continua y asegura teóricamente convergencia exacta en tiempo finito a la posición de arriba, desde un conjunto de condiciones iniciales que incluyen la posición de abajo. También, el 3-DIA es insensible a la presencia de perturbaciones Lipschitz. Para ilustrar los resultados obtenidos, se realizaron experimentos comparando el controlador propuesto con un algoritmo lineal.

La estructura del trabajo es la siguiente. El sistema en lazo cerrado del RWP con el 3-DIA, el planteamiento del problema y el resultado principal se presentan en la Sección 2. Los experimentos realizados en el sistema real, junto con la comparación con el control lineal, se muestran en la Sección 3. Finalmente se dan las conclusiones del trabajo en la Sección 4.

Notación: Se define la función $[\cdot]^\gamma := |\cdot|^\gamma \text{sign}(\cdot)$, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADO PRINCIPAL

Considere el sistema RWP mostrado en la Fig. 1. Se describe un péndulo rotando en un plano vertical, con pivote montado en una base estacionaria. El pivote de la rueda está acoplado al péndulo. Los ejes de rotación del péndulo y la rueda son paralelos entre sí. La rueda está actuada por el torque τ [Nm]. El vector de estados es $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, donde x_1 [rad] es el ángulo entre la posición de arriba y el péndulo medido en dirección

antihoraria ($x_1 = 0$ para la posición de arriba del péndulo), x_2 [rad/sec] es la velocidad angular del péndulo, x_3 [rad] es la posición angular de la rueda y x_4 [rad/sec] es la velocidad angular de la rueda.

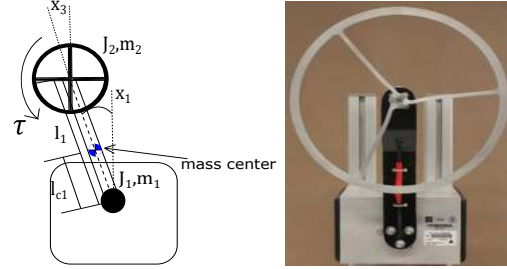


Figura 1. Péndulo de Rueda Inercial.

La dinámica del sistema fue presentada en Spong y Vidyasagar (1989) y puede ser descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{d_{22}W \sin(x_1) + d_{12}b_2x_4 - d_{12}\tau}{D}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{-d_{21}W \sin(x_1) - d_{11}b_2x_4 + d_{11}\tau}{D},\end{aligned}\quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned}d_{21} &= d_{12} = d_{22} = J_2, \\ d_{11} &:= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1 + J_2, \\ D &:= d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} > 0, \\ \bar{m} &:= m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \quad W = \bar{m}g.\end{aligned}$$

Es fácil de obtener los puntos de equilibrio x^* del sistema (1), los cuales son

$$x^* = [n\pi, 0, p, 0]^T, \quad p \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

En este trabajo no se va a considerar el estado x_3 (posición de la rueda) como un objetivo de control y solo se controlarán los otros tres estados del sistema.

Definiendo el siguiente cambio de coordenadas global (similar al usado en Olfati-Saber (2001))

$$\begin{aligned}z_1 &:= d_{11}x_2 + d_{12}x_4, \\ z_2 &:= x_1, \\ z_3 &:= x_2,\end{aligned}\quad (3)$$

se puede reescribir el sistema como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= W \sin(z_2), \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= \frac{d_{22}\bar{m}g \sin(z_2) + b_2(z_1 - d_{11}z_3) - d_{12}\tau}{D}.\end{aligned}\quad (4)$$

Ahora, si se hace el control τ como

$$\tau = \frac{d_{22}W \sin(z_2) + b_2(z_1 - d_{11}z_3) - D\nu}{d_{12}}, \quad (5)$$

el sistema finalmente se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= W \sin(z_2), \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= \nu + \varphi(t),\end{aligned}\quad (6)$$

donde $\varphi(t)$ son las incertidumbres/perturbaciones supuestas en el sistema, tipo Lipschitz, *i.e.* $|\dot{\varphi}(t)| \leq L$.

Se presenta el 3-DIA escrito como

$$\begin{aligned}\nu &= -k_3 \left[[z_3]^{\frac{4}{2}} + k_2^{\frac{4}{2}} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^{\frac{4}{2}} k_1^{\frac{4}{3}} z_1 \right]^{\frac{1}{4}} + \zeta \\ \dot{\zeta} &= -k_{I1} \left[z_1 + k_{I2} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_{I3} [z_3]^{\frac{4}{2}} \right]^0,\end{aligned}\quad (7)$$

el cual es una extensión integral del controlador estático presentado en Cruz-Zavala y Moreno (2017). Note que debido a que la función discontinua *sign* se encuentra en el integrador, la señal de control generada es continua.

El sistema en lazo cerrado de (6) con el controlador (7) y la nueva variable $z_4 = \zeta + \varphi(t)$ es

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= W \sin(z_2), \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -k_3 \left[[z_3]^{\frac{4}{2}} + k_2^{\frac{4}{2}} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^{\frac{4}{2}} k_1^{\frac{4}{3}} z_1 \right]^{\frac{1}{4}} + z_4 \\ \dot{z}_4 &= -k_{I1} \left[\left[z_1 + k_{I2} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_{I3} [z_3]^{\frac{4}{2}} \right]^0 + [-\bar{L}, \bar{L}] \right],\end{aligned}\quad (8)$$

donde $\bar{L} = \frac{L}{k_{I1}}$.

Definición 1. Sea el vector $x \in \mathbb{R}^n$, su operador de dilatación se define como $\Delta_\epsilon^r := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$, $\forall \epsilon > 0$, donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $\mathbf{r}$ es el vector de pesos. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto de vectores $F(x) \subset \mathbb{R}^n$) se llama $\mathbf{r}$ -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$, si la identidad $V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m V(x)$ se cumple (o $f(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^r f(x)$, $F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^r F(x)$) Bacciotti y Rosier (2005), Moreno (2016).

Observación 1. Cerca del origen, el sistema (8) es homogéneo de grado $m = -1$ y pesos $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (4, 3, 2, 1)$. Debido a propiedades de homogeneidad Levant (2005), las precisiones teóricas de los estados después del transitorio son $|z_1| < \Delta_1 \bar{\tau}^4$, $|z_2| < \Delta_2 \bar{\tau}^3$, $|z_3| < \Delta_3 \bar{\tau}^2$ y $|z_4| < \Delta_4 \bar{\tau}$, donde $\Delta_i > 0$ con $i = 1, \dots, 5$ y $\bar{\tau}$ como tiempo de muestreo.

Realizando un análisis de los puntos de equilibrio z^* del sistema (8) sin tomar en cuenta la acción integral z_4 , resulta en

$$z^* = [-k_1^{-\frac{4}{3}} [n\pi]^{\frac{4}{3}}, n\pi, 0]^T, \quad n \in \mathcal{Z}, \quad (9)$$

y los puntos de equilibrio en las coordenadas originales x^* son

$$x^* = [n\pi, 0, p, -d_{12}^{-1} k_1^{-\frac{4}{3}} [n\pi]^{\frac{4}{3}}]^T, \quad p \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathcal{Z}. \quad (10)$$

Se puede notar que los puntos de equilibrio (10) del RWP se ven afectados por el valor de la ganancia k_1 del 3-DIA, en comparación con los puntos de equilibrio originales del sistema (2), esto se muestra en la Fig. 2. Como resultado, el 3-DIA puede empezar a actuar desde la posición de

abajo del péndulo con velocidades iguales a cero, que en un principio era un punto de equilibrio del RWP con entrada cero.

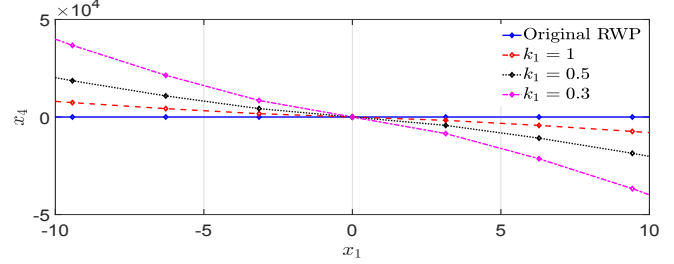


Figura 2. Puntos de equilibrio del RWP en función de k_1 .

Definiendo el nuevo vector de estados $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ para el sistema (6), el objetivo de este trabajo es estabilizar en tiempo finito el punto de equilibrio $z = [0, 0, 0]^T$, empezando desde la posición de abajo del péndulo $x_1 = z_2 = \pm\pi$ con velocidades igual a cero, usando el 3-DIA como entrada de control ν , a pesar de la presencia de perturbaciones tipo Lipschitz $\varphi(t)$. Debido a la Eq. (3) los estados originales x_1, x_2, x_4 alcanzarán el origen también.

Teorema 1. El origen del sistema (6) es localmente estable en tiempo finito, sin tomar en cuenta la posición de la rueda, cuando el control τ toma la forma de (5) y (7), y el conjunto de ganancias k_i , con $i = 1, 2, 3$, se escogen apropiadamente. Los puntos $x = [\pi, 0, 0]^T$ y $x = [-\pi, 0, 0]^T$, pertenecen a la región de atracción.

Prueba. Considere una función candidata de Lyapunov homogénea (con $m \geq 7$)

$$\begin{aligned}V_3 &= \gamma_2 V_2 + \frac{2}{m} |z_3|^{\frac{m}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m-2}{4}} z_3 + \\ &\quad \left(1 - \frac{2}{m} \right) k_2^{\frac{m}{2}} \left| [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right|^{\frac{m}{4}} + \frac{1}{m} \gamma_3 |z_4|^m,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_1 - k_\xi [z_4]^4, \quad \dot{\xi}_1 = W \sin(z_2) - 4k_\xi |z_4|^3 \dot{z}_4, \\ k_\xi &= k_3^{-4} k_2^{-\frac{4}{2}} k_1^{-\frac{4}{3}}, \\ V_2 &= \frac{4}{m} \gamma_1 |\xi_1|^{\frac{m}{4}} + \frac{3}{m} |z_2|^{\frac{m}{3}} + k_1^{\frac{m-3}{3}} [\xi_1]^{\frac{m-3}{4}} z_2 + \\ &\quad \left(1 - \frac{3}{m} \right) k_1^{\frac{m}{3}} |\xi_1|^{\frac{m}{4}},\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young, es fácil de mostrar que la función V_3 es positiva definida para cualquier constante positiva γ_1, γ_2 and γ_3 . Su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (8) está dada por

$$\dot{V}_3 = F_1(z) + k_{I1} F_2(z, L), \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1 &= \gamma_2 F_{k_{12}}(z) + k_3 G_{k_3}(z) + F_{k_3}(z), \\
G_{k_3} &= - \left[[z_3]^{\frac{m-2}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m-2}{4}} \right] \times \\
&\quad \left[\left[[z_3]^{\frac{4}{2}} + k_2^{\frac{4}{2}} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^{\frac{4}{2}} k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_3^{-4} [z_4]^4 \right]^{\frac{1}{4}} - k_3^{-1} z_4 \right] \\
F_{k_3} &= k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m-6}{4}} \left[\frac{4}{3} |z_2|^{\frac{1}{3}} z_3 + k_1^{\frac{4}{3}} W \sin(z_2) \right] \times \\
&\quad \left(\frac{m-2}{4} \right) \left[z_3 + k_2 \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{2}{4}} \right] \\
F_{k_{12}} &= \left[\gamma_1 [\xi_1]^{\frac{m-4}{4}} + \left(\frac{m-3}{4} \right) k_1^{\frac{m-3}{3}} |\xi_1|^{\frac{m-7}{4}} \left[z_2 + k_1 [\xi_1]^{\frac{3}{4}} \right] \right] \times \\
&\quad W \sin(z_2) + \left[[z_2]^{\frac{m-3}{3}} + k_1^{\frac{m-3}{3}} [\xi_1]^{\frac{m-3}{4}} \right] z_3 \\
F_2 &\in - \left[\left[\xi_1 + k_{I2} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_{I3} [z_3]^{\frac{4}{2}} + k_\xi [z_4]^4 \right]^0 + [-\bar{L}, \bar{L}] \right] \times \\
&\quad \left[-4\gamma_2 k_\xi \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - (m-2) k_\xi k_2^{\frac{m-2}{2}} k_1^{\frac{4}{3}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m-6}{4}} \times \right. \\
&\quad \left. \left[z_3 + k_2 \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{2}{4}} \right] + \gamma_3 [z_4]^{m-4} \right] |z_4|^3.
\end{aligned}$$

El término $\sin(z_3)$ en el sistema (6) puede verse como z_3 usando la aproximación de Taylor y despreciando los términos de alto orden, ya que pueden ser dominado cerca del origen. Considerando esto, puede probarse que la derivada de la función candidata de Lyapunov es negativa definida cerca del origen y puede concluirse que el origen del sistema (8) es local y asintóticamente estable. Además, por propiedades de homogeneidad Levant (2005), el origen es localmente estable en tiempo finito y por la Eq. (3), el origen del sistema (1) es localmente estable en tiempo finito (esta prueba analítica se muestra en Gutiérrez-Oribio *et al.* (2018), donde se provee la forma del diseño de ganancias del 3-DIA).

La principal ventaja de la transformación de coordenadas (3) es que obtenemos una representación global del sistema (1). Como resultado, se puede estimar una región de atracción para mostrar si los puntos de interés en el espacio de estados están encerrados en ella. Esto no puede hacerse usando la transformación presentada en Spong *et al.* (2001) debido a que solo es válida localmente.

Hay que notar que resolver analíticamente la función de Lyapunov y su derivada para obtener un conjunto de ganancias del 3-DIA que estabilicen el origen del sistema lejos de él, es una tarea difícil. Por lo tanto, se pueden obtener las ganancias usando un método numérico. Primero, se obtienen puntos sobre las superficies de nivel de la función de Lyapunov, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
V_3 &= \gamma_2 V_2 + \frac{2}{m} |z_3|^{\frac{m}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m-2}{4}} z_3 + \\
&\quad \left(1 - \frac{2}{m} \right) k_2^{\frac{m}{2}} \left[[z_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 \right]^{\frac{m}{4}} + \frac{1}{m} \gamma_3 |z_4|^m = C,
\end{aligned} \tag{12}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Para realizar esto, se puede tomar ventaja de que la función de Lyapunov es homogénea. Por lo tanto, se toman valores de $\bar{z}$ sobre la esfera unitaria, *i.e.*, $||\bar{z}|| = 1$:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \\ \bar{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\psi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\psi) \\ \cos(\phi) \cdot \sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$. Ahora, ya que la función de Lyapunov satisface la propiedad de homogeneidad

$$V_3(\Delta_\epsilon \bar{z}) = \epsilon^m V_3(\bar{z}) = C, \tag{14}$$

podemos trasladar los puntos de la esfera unitaria a superficies de nivel $V_3(z) = C$ como

$$\epsilon = \left(\frac{C}{V(\bar{z})} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = \begin{bmatrix} \epsilon^4 \bar{z}_1 \\ \epsilon^3 \bar{z}_2 \\ \epsilon^2 \bar{z}_3 \\ \epsilon \bar{z}_4 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Ya que los puntos z se encuentran ahora sobre superficies de nivel de la función de Lyapunov, se obtiene la derivada (11) de estos puntos para diferentes valores de C .

En la Fig. 3 se muestran las superficies de nivel para ganancias $\gamma_1 = 0.6$, $\gamma_2 = 20$, $\gamma_3 = 0.0001$, $m = 7$, $k_1 = 0.55$, $k_2 = 2.3$, $k_3 = 12.7$, $k_{I1} = 0.15$, $k_{I2} = k_{I3} = 0$ y $L = 0$ (caso nominal) en el plano $z_1 - z_2$. Las superficies de nivel de color azul muestran que todos los puntos dentro de ella tienen derivada negativa. Esto quiere decir que las trayectorias que empiezan dentro de ellas, convergerán al origen. Mientras que las de color rojo, son puntos cuya derivada es no negativa, por lo que no se asegura estabilidad dentro de ellas. Por otro lado, se muestran los puntos de equilibrio del sistema: el origen (estable), y los dos mas cercanos (inestables); y los puntos de interés donde el péndulo se encuentra en la posición de abajo con velocidades cero (los cuales se muestran dentro de la estimación de la región de atracción y ese era uno de los objetivos).

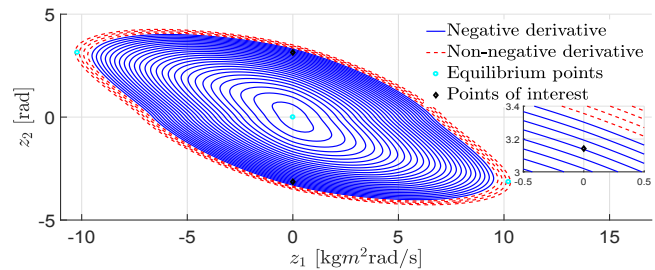


Figura 3. Superficies de nivel con la elección de ganancias dada.

Por lo tanto, se prueba a que nivel de superficie de la función V_3 , su derivada $\dot{V}_3$ es negativa definida, y se concluye que el origen del sistema (8) es local y asintóticamente estable, obteniendo una estimación de la región de atracción donde los puntos de interés estén dentro. Además, por propiedades de homogeneidad cerca

del origen Levant (2005), el origen es local y estable en tiempo finito. Finalmente por (3), el origen del sistema (1) es local y estable en tiempo finito.

Ahora, se considera el caso cuando la constante de Lipschitz de la perturbación $\varphi(t)$ es $L \neq 0$. La constante encontrada con la cual la derivada de la función de Lyapunov se hace no negativa con las ganancias anteriormente dichas, es $L = 0.14$. Esto concuerda con la condición $k_{I1} > L$ para la estabilidad local en tiempo finito mostrada en Gutiérrez-Oribio *et al.* (2018). ■

Observación 2. En la prueba, es posible ver que el origen del sistema (8) es estable en tiempo finito. Por lo tanto, el punto $(x_1, x_2, x_4) = 0$ en el sistema (1) es estable en tiempo finito también y la acción integral ζ converge al negativo de la perturbación $\varphi(t)$. El estado no controlado x_3 tiende a un valor constante debido a que x_4 converge a cero y se mantiene ahí para todo tiempo futuro.

3. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Para ilustrar el desempeño del algoritmo presentado, se realizaron simulaciones y experimentos en el sistema RWP descrito en (1). Los parámetros del sistema se obtuvieron con un algoritmo de identificación fuera de línea, y están dados por $\bar{m}=0.22[\text{kgm}]$, $d_{11}=0.0479[\text{kgm}^2]$, $J_2=0.0027[\text{kgm}^2]$, $b_2=0.015[\text{Ns/m}^2]$ y $g=9.81[\text{m/s}^2]$.

Los experimentos se realizaron en el sistema RWP real mostrado en la Fig. 1. Este sistema fue desarrollado en el Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik de TU Graz, Austria. Los experimentos se hicieron en Matlab Simulink sobre una tarjeta de adquisición de datos conectada al sistema.

El sistema RWP real solamente cuenta con la información de las posiciones x_1, x_3 , por lo que se implemento un diferenciador exacto y robusto de segundo orden Levant (2008) para obtener un estimado de las velocidades x_2, x_4 para el control.

También, es importante señalar que la señal de control τ se convirtió en una señal de voltaje usando la expresión $V = -0.2778\tau + 3.6 \times 10^{-5}x_4$. Esta señal está saturada entre $[-0.9, 0.9][\text{V}]$ y, después de una etapa de potencia, se conecta a un motor de $12[\text{V}]$ que es el que actúa en el sistema.

El control (5), la transformación (3) y el 3-DIA descrito por (7) con $k_1 = 0.55$, $k_2 = 2.3$, $k_3 = 13$, $k_{I1} = 0.15$, $k_{I2} = k_{I3} = 0$, fueron implementados en el sistema RWP real. Esto usando el método de integración de Runge-Kutta de paso fijo y un tiempo de muestreo de $1 \times 10^{-4}[\text{s}]$ y una condición inicial de $x_0 = [\pi, 0, 0, 0]^T$.

También se probó el mismo control lineal $\nu = -Kz$ con $K = [3.1623, 9.0792, 5.3064]$, el control (5) y la transformación (3). La condición inicial usada fue de $x_0 = [0.5, 0, 0, 0]^T$.

Los resultados se muestran en las Figs. 4-6. El 3-DIA puede compensar algunas incertidumbres tipo Lipshitz

propias de las dinámicas no modeladas del sistema real. También lleva a los estados al origen desde la posición de abajo del péndulo, usando una señal de control continua y saturada (debido a que el voltaje es el control real, como puede verse en la Fig. 6). El control lineal solo puede llevar a los estados alrededor del origen y con una condición inicial cerca de él, debido a que no puede contrarrestar las mismas incertidumbres que el 3-DIA.

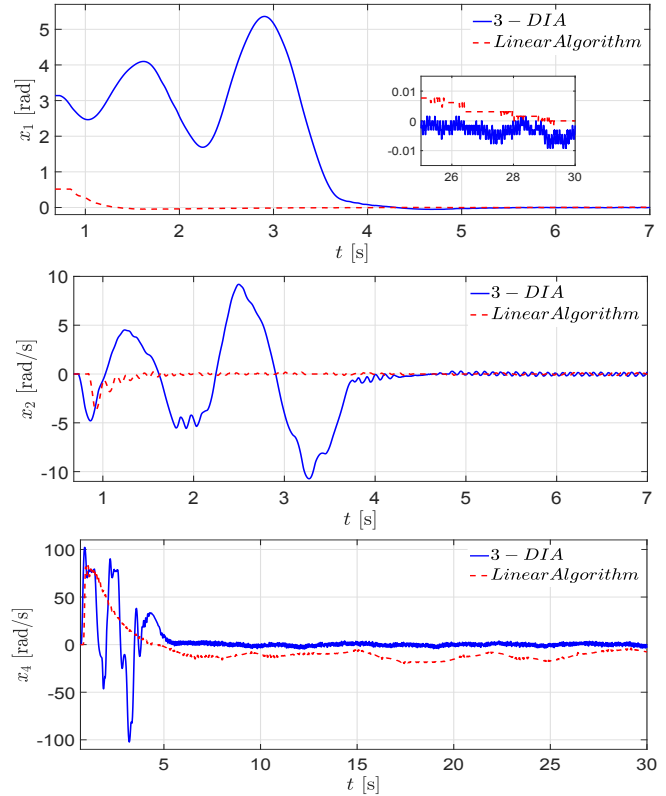


Figura 4. Trayectorias de los estados en los experimentos.

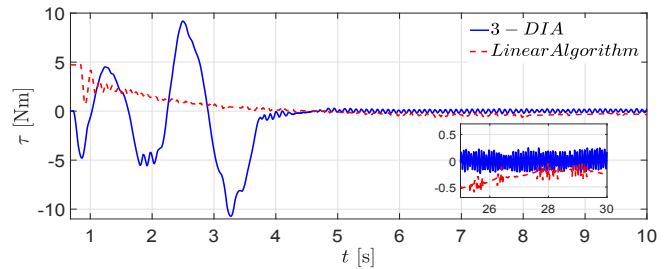


Figura 5. Señal de control en los experimentos.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo, se considera el problema del swing-up y la estabilización en un solo paso del sistema RWP. Se utiliza una representación global del sistema y el 3-DIA para solucionar los dos problemas. El diseño de las ganancias del controlador se realizó para inflar la región de atracción del origen e incluir los puntos donde la

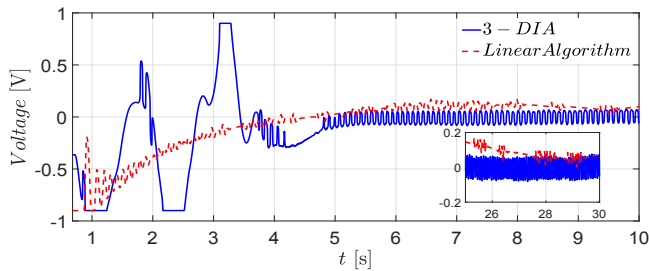


Figura 6. Señal de control de voltaje en los experimentos.

posición del péndulo esta abajo y las velocidades son cero. La señal de control generada es continua y asegura convergencia teórica local en tiempo finito al origen a pesar de la presencia de incertidumbres/perturbaciones tipo Lipschitz en el sistema. Se realizaron experimentos para ilustrar el comportamiento del control propuesto y compararlo con un control lineal.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología): Proyectos 241171, 282013, CVU's 624679 y 705765; PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) IN115419 y IN110719; Fondo de Colaboración del II-FI UNAM IISGBAS-100-2015.

REFERENCIAS

- Andrievsky, B.R. (2011). Global stabilization of the unstable reaction-wheel pendulum. *Automation and Remote Control* **72**(9), 1981–1993.
- Aström, K.J. y K. Furuta (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* **36**, 287–295.
- Baccioti, A. y L. Rosier (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, 2nd ed.. New York.
- Chalanga, A., S. Kamal y B. Bandyopadhyay (2013). Continuous integral sliding mode control: A chattering free approach. In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Taipei, Taiwan.
- Cruz-Zavala, E. y J.A. Moreno (2017). Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach. *Automatica* **80**, 232–238.
- Edwards, C. y Y.B. Shtessel (2016). Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica* **65**, 183–190.
- Gutiérrez-Oribio, D., A. Mercado-Urbe, J.A. Moreno y L. Fridman (2018). Stabilization of the reaction wheel pendulum via a third order discontinuous integral sliding mode algorithm. In: *16th International workshop on Variable Structure Systems*. Graz, Austria.
- Iriarte, R., L.T. Aguilar y L. Fridman (2013). Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum. *Journal of the Franklin Institute* **350**, 92–106.
- Laghrouche, S., M. Harmouche y Y. Chitour (2017). Higher order super-twisting for perturbed chains of integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(7), 3588–3593.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* **58** pp. 1247–1263.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica* **41**(5), 823–830.
- Levant, A. (2008). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control* **76**(9/10), 924–941.
- Mendoza-Ávila, J., J.A. Moreno y L. Fridman (2017). An idea for lyapunov function design for arbitrary order continuous twisting algorithm. In: *IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control*. Melbourne, Australia.
- Moreno, J.A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. In: *International Workshop on Variable Structure Systems*. Nanjing, China.
- Moreno, J.A. (2018). *Discontinuous Integral Control for Systems with relative degree two*. Chapter 8 In: *Julio Clempner, Wen Yu (Eds.)*, New Perspectives and Applications of Modern Control Theory; in Honor of Alexander S. Poznyak.. Springer International Publishing.
- Moreno-Valenzuela, J. y C. Aguilar-Avelar (2017). *Motion Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer. Mexico.
- Olfati-Saber, R. (2001). Global stabilization of a flat underactuated system: The inertia wheel pendulum. In: *40th IEEE Conference on Decision and Control*. Florida, USA.
- Ortega, R., M.W. Spong, F. Gomez-Estern y G. Blankenstein (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(8), 1218–1233.
- Ryalat, M. y D.S. Laila (2016). A simplified ida-pbc design for underactuated mechanical systems with applications. *European Journal of Control* **27**, 1–16.
- Seeber, R. y M. Horn (2017). Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting. *Automatica* **84**, 241–243.
- Spong, M.W., P. Corke y R. Lozano (2001). Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica* **37**, 1845–1851.
- Spong, M.W. y M. Vidyasagar (1989). *Robot dynamics and control*. Wiley. New York.
- Srinivas, K.N. y L. Behera (2008). Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum. *International Journal of Systems Science* **39**(12), 1165–1177.
- Torres-González, V., T. Sánchez, L. Fridman y J.A. Moreno (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica* **80**, 119–126.
- Ye, H., G.P. Liu, C. Yang y W. Gui (2008). Stabilisation designs for the inertia wheel pendulum using saturation techniques. *International Journal of Systems Science* **39**(12), 1203–1214.