

Control MIMO por HOSM para Sistemas con Grado Relativo 2

Angel Mercado-Uribe and Jaime A. Moreno

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Coyoacán, Ciudad de México, 04510, México.
(Email addresses: joseangelmu814@gmail.com, JMorenoP@ii.unam.mx)*

Resumen: En este artículo se provee un controlador homogéneo discontinuo capaz de estabilizar el origen de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas en tiempo finito, rechazando perturbaciones acotadas acopladas. Asimismo, se construye la función de Lyapunov que permite asegurar la estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado. Los resultados son presentados para sistemas con grado relativo 1 y 2. Adicionalmente, se realizarán simulaciones para un sistema de dos entradas y dos salidas con grado relativo 2.

Palabras clave: Control Homogéneo, Control Robusto, Control por Modos Deslizantes

1. INTRODUCCIÓN

Una de las principales tareas de control es regulación en un sistema [Khalil (2002)], es decir que la salida de un sistema físico vaya a una referencia deseada.

Considere por ejemplo un sistema de Una Entrada y Una Salida (SISO, por sus siglas en inglés) en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g(t, x) [u + \rho(t)]\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la variable de control, $g(t, x) > g_{min} > 0 \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de control y $\rho(t)$ es una perturbación acoplada.

El objetivo de control consiste en estabilizar el origen del sistema (1), rechazando la perturbación $\rho(t)$. Es muy conocido que si la perturbación está acotada por $|\rho(t)| < c \|x\|_2$ un controlador estático lineal es capaz de realizar la tarea para ganancias apropiadas del controlador. Sin embargo, el principal problema aparece cuando la perturbación es no desvaneciente en el origen, ya que ningún control estático continuo es capaz de rechazarla [Khalil (2002)].

Uno de los controladores clásicos para lidiar con perturbaciones acopladas son los controladores por modos deslizantes. Los primeros controladores de este tipo fueron los controladores por Modos Deslizantes de Primer Orden (FOSM) [Utkin (1992)], los cuales permiten estabilizar el origen de un sistema con una salida de grado relativo uno, rechazando perturbaciones acotadas. Posteriormente se desarrollaron los controladores por Modos Deslizantes de Alto Orden (HOSM) [Fridman y Levant (2002); Levant (2005); Fridman *et al.* (2015)], los cuales son capaces de estabilizar el origen del sistema (1) en tiempo finito, rechazando perturbaciones acotadas.

Es importante mencionar que la mayoría de los resultados de controladores FOSM y HOSM han sido obtenidos para el caso SISO [Levant (2010)]. Sin embargo, en ocasiones se pueden presentar problemas con Múltiples Entradas y

Múltiples Salidas (MIMO). En la mayoría de los trabajos de HOSM para el caso MIMO se asume que la matriz de coeficientes de entrada es conocida Levant (2010). Por ejemplo, en Polyakov *et al.* (2015, 2014) se presenta una elegante estrategia para diseñar controladores HOSM para el caso SISO y MIMO, mediante la construcción de una función de Lyapunov implícita y resolviendo una desigualdad matricial. Sin embargo, requiere que la matriz de coeficientes de entrada sea constante y conocida.

En [Levant (2010); Levant y Dvir (2014); Levant (2014)] se presentan controladores HOSM capaces de estabilizar el origen de un sistema MIMO. En este caso se asume que la matriz de coeficientes de entrada $g(t, x)$ es incierta y variante con el tiempo. Sin embargo, se considera que se conoce una aproximación de la misma $G(t, x)$, la cual es suficientemente buena, satisfaciendo la desigualdad $\|(G(t, x) - g(t, x))G^{-1}(t, x)\|_1 \leq p < 1$. Asimismo, no se presenta una función de Lyapunov que permita asegurar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

En este trabajo se busca presentar un controlador HOSM capaz de estabilizar el origen de un sistema de dos entradas con dos salidas de grado relativo 1 y 2, construyendo una función de Lyapunov homogénea. En este caso la matriz de coeficientes se asume variante en el tiempo y de magnitud totalmente incierta, conociendo únicamente los signos de sus elementos y su determinante. Asimismo, es importante resaltar que este resultado puede ser extendido a grados relativos diferentes y arbitrarios.

2. PRELIMINARES

Sea el vector $x \in \mathbb{R}^n$, se define el operador de dilatación $\Delta_\epsilon^r := (\epsilon^{r_1} x_{1,2}, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$, $\forall \epsilon > 0$, donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ es el vector de pesos. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto vectorial $F(x) \subset \mathbb{R}^n$) es llamado \mathbf{r} -homogéneo de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad $V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m V(x)$ se cumple (o $f(\Delta_\epsilon^r x) =$

$\epsilon^m \Delta_\epsilon^r f(x)$, $F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^r F(x)$, [Bacciotti y Rosier (2005)], [Moreno (2016)]. Suponga que el vector \mathbf{r} y la dilación Δ_ϵ^r están fijados. La norma homogénea es definida

por $\|x\|_{\mathbf{r},p} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, para cualquier $p \geq 1$. Asimismo, recordamos la siguiente propiedad de funciones homogéneas continuas

Lema 1. (Andrieu *et al.* (2008), Moreno (2016)). Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas continuas, con pesos $\mathbf{r} = (2, \dots, r_n)$ y grados m , con $\gamma(x) \geq 0$, tal que se cumple

$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}$, entonces, existe un número real λ^* tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y algún $c > 0$, $\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m$.

El lema 1 es extendido a funciones discontinuas:

Lema 2. Cruz-Zavala y Moreno (2017) Let $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ be two lower (respectively, upper) semicontinuous single-valued \mathbf{r} -homogeneous functions of degree $m > 0$. Suppose that $\gamma(x) \geq 0$ (resp. $\gamma(x) \leq 0$) on \mathbb{R}^n . If $\eta(x) > 0$ (resp. $\eta(x) < 0$) for all $x \neq 0$ such that $\gamma(x) = 0$, then there is a constant $\lambda^* \in \mathbb{R}$ and a constant $c > 0$ such that for all $\lambda \geq \lambda^*$ and for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\eta(x) + \lambda\gamma(x) \geq c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m$$

$$\left(\text{resp. } \eta(x) + \lambda\gamma(x) \leq -c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m \right).$$

Recordamos que para sistemas homogéneos, la estabilidad local implica estabilidad global y su grado de homogeneidad l determina el tipo de estabilidad [Bacciotti y Rosier (2005)]: (i) $l < 0$ implica estabilidad en tiempo finito, (ii) $l = 0$ estabilidad exponencial, (iii) $l > 0$ estabilidad racional.

2.1 Notación

A lo largo de este artículo se usará la siguiente notación. Para una variable real variable $z \in \mathbb{R}$ y un número real $p \in \mathbb{R}$, el símbolo $[z]^p = |z|^p \text{sign}(z)$ es la potencia signada p de z . De acuerdo a esto, se tiene que $[z]^0 = \text{sign}(z)$, $\frac{d}{dz}[z]^m = m|z|^{m-1}$ y $\frac{d}{dz}|z|^m = m[z]^{m-1}$. Note que $[z]^2 = |z|^2 \text{sign} z \neq z^2$, y si p es un número impar entonces $[z]^p = z^p$, mientras que si p es par se tiene $|z|^p = z^p$. Más aún $[z]^p [z]^q = |z|^{p+q}$, $[z]^p [z]^0 = |z|^p$ y $[z]^0 [z]^p = |z|^p$.

2.2 Planteamiento del Problema

Considerese un sistema MIMO en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,j} &= x_{i,j+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n_i - 1, \\ \dot{x}_{i,n_i} &= g_i(t, x) [u + \rho(t)], \quad y_i = x_{i1} \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ son los estados, siendo n_i el grado relativo de x_i , $y \in \mathbb{R}^m$ son las salidas, $u \in \mathbb{R}^m$ son las variables de control, g_i corresponde al canal de entrada, la cual puede no ser continua con signos constantes y conocidos pero magnitud incierta y. Asimismo, el término $\rho(t) \in \mathbb{R}^m$ representa incertidumbres y/o perturbaciones acopladas a cada control. Asimismo, se define la matriz de coeficientes de entrada como

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}, \quad g_i \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (3)$$

El objetivo de control es estabilizar el origen del sistema (2) en tiempo finito, rechazando el vector de perturbaciones acotadas $\rho(t)$. Para lograr lo anterior, se busca diseñar un controlador HOSM.

Para el diseño del controlador para $m = 2$, se parte de las siguiente suposición:

Suposición 1. El determinante de la matriz G es de signo constante y $|\det(G)| \geq \bar{g} > 0$ y la fracción definida por $\frac{g_{11}}{g_{21}}$ resulta en un valor constante.

Es importante mencionar que la Suposición 1 puede ser sustituida por la siguiente

Suposición 2. El determinante de la matriz G es de signo constante y $|\det(G)| \geq \bar{g} > 0$ y la fracción definida por $\frac{g_{22}}{g_{12}}$ resulta en un valor constante.

Permitiendo conservar la estructura del controlador. Sin embargo, en este trabajo se tomará la Suposición 1, siendo análogo el resultado considerando la Suposición 2 ya que siempre es posible cambiar la posición de los controladores en el análisis. También es importante mencionar que las suposiciones anteriores se encuentran consideradas para el caso de $m = 2$. Sin embargo, en general la condición necesaria es que la matriz G puede sea triangularizable utilizando una transformación lineal.

Asimismo, es importante resaltar que la Suposición 1 se hace asumiendo el controlador u_1 principal, mientras que en la Suposición 2 se asume el controlador u_2 principal. Sin embargo, esto es indiferente, ya que sin pérdida de generalidad siempre se puede trabajar con el controlador u_1 como principal. Por lo mismo, a lo largo del trabajo se trabajará bajo la Suposición 1.

3. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección, se presenta el controlador por Modos Deslizantes (SM) capaz de estabilizar el origen del sistema (2) en tiempo finito, compensando perturbaciones acotadas acopladas. El controlador es presentado para el caso ($m = 2, n = 1$) y ($m = 2, n = 2$). Sin embargo, es fácil observar que este resultado se puede extender para el caso de $m = 2$ y n arbitrario.

3.1 Controlador FOSM

En este caso se considera el sistema de dos salidas de grado relativo 1 y dos entradas. Bajo estas condiciones, el sistema (2) queda definido como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= g_1 [u + \rho_1(t)], \\ \dot{x}_{2,1} &= g_2 [u + \rho_2(t)], \end{aligned} \quad (4)$$

donde la matriz G corresponde a

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

De esta forma, es posible formular el siguiente teorema:

Teorema 1. Considere el sistema (4) un vector de perturbaciones $\rho(t)$ acotado por $\bar{\rho}$, i.e. $\|\rho(t)\|_\infty \leq L$ y satisfaciendo la Suposición 1. Entonces, para cualquier $\alpha \geq 1$ la ley de control

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_{u_1} [k_{1u_1} [x_{1,1}]^\alpha + k_{2u_1} [x_{2,1}]^\alpha]^0 \\ u_2 &= -k_{u_2} [k_{1u_2} [x_{1,1}]^\alpha + k_{2u_2} [x_{2,1}]^\alpha]^0 \end{aligned} \quad (5)$$

estabiliza el origen del sistema (2) en tiempo finito, a pesar de la perturbación $\rho(t)$, para cualquier $k_{u_1} > \bar{\rho}$ suficientemente grande, $|k_{u_2}| > \bar{\rho}$, ganancias $k_{1u_1}, k_{2u_1}, k_{1u_2}, k_{2u_2} \in \mathbb{R}$, tal que las siguientes condiciones sean satisfechas

$$\begin{aligned} \text{C1.} \quad & \text{sign}(k_{1u_1}) = \text{sign}(g_{11}) \text{ y } \text{sign}(k_{2u_1}) = \text{sign}(g_{21}) \\ \text{C2.} \quad & \frac{1}{g_{11}} \det(G) \left[k_{2u_2} - \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} k_{1u_2} \right] k_{u_2} > 0 \end{aligned}$$

Es importante recordar que las condiciones presentadas en el Teorema 1 se está considerando el controlador u_1 como principal bajo la Suposición 1. Sin embargo, es fácil probar que es posible utilizar el control u_2 bajo la Suposición 2 y obtener un resultado análogo.

Asimismo, note que la construcción de los controladores u_1 y u_2 es realizada mediante una combinación lineal de controladores que estabilizarían los subsistemas desacoplados y es importante aclarar los aspectos que aparecen en las condiciones del Teorema. La primera condición C1 asegura que la ley de control u_1 va en la dirección correcta para estabilizar el origen del subsistema \dot{x}_1 . En la segunda condición C2 es importante notar que el determinante de la matriz G no puede ser cero, lo cual asegura que el sistema sea controlable. Asimismo, el término $\left[k_{2u_2} - \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} k_{1u_2} \right]$ puede verse como el determinante de la matriz de ganancias del controlador, la cual debe ser distinto de cero, lo que significa que las leyes de control son linealmente independientes, es decir $u_1 \neq \text{cte } u_2$. Asimismo, es posible ver que la selección de ganancias depende tanto de la dirección de los canales de entrada como la dirección de los controladores.

3.2 Controlador HOSM

En este caso se considera el sistema de dos salidas de grado relativo 2 y dos entradas. Bajo estas condiciones, el sistema (2) queda definido como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= x_{1,2}, \\ \dot{x}_{1,2} &= g_1 [u + \rho_1(t)], \\ \dot{x}_{2,1} &= x_{2,2}, \\ \dot{x}_{2,2} &= g_2 [u + \rho_2(t)], \end{aligned} \quad (6)$$

donde la matriz G conserva su estructura y corresponde a

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

De esta forma, es posible formular el siguiente teorema:

Teorema 2. Considere el sistema (6) un vector de perturbaciones $\rho(t)$ acotado por $\bar{\rho}$, i.e. $\|\rho(t)\|_\infty \leq \bar{\rho}$ y satisfaciendo la Suposición 1. Entonces, para cualquier $\alpha \geq 2$ la ley de control

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_{u_1} [k_{1u_1} u_{1,1} + k_{2u_1} u_{2,2}]^0, \\ u_2 &= -k_{u_2} [k_{1u_2} u_{1,1} + k_{2u_2} u_{2,2}]^0, \\ u_{1,1} &= [x_{1,2}]^\alpha + k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}}, \\ u_{2,2} &= [x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

estabiliza el origen del sistema (2) en tiempo finito, a pesar de la perturbación $\rho(t)$, para cualquier $k_{u_1} > \bar{\rho}$ suficientemente grande, $|k_{u_2}| > \bar{\rho}$, $k_1, k_3 > 0$ y ganancias $k_{1u_1}, k_{2u_1}, k_{1u_2}, k_{2u_2} \in \mathbb{R}$, tal que las siguientes condiciones son satisfechas

$$\begin{aligned} \text{C1.} \quad & \text{sign}(k_{1u_1}) = \text{sign}(g_{11}) \text{ y } \text{sign}(k_{2u_1}) = \text{sign}(g_{21}), \\ \text{C2.} \quad & \frac{1}{g_{11}} \det(G) \left[k_{2u_2} - \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} k_{1u_2} \right] k_{u_2} > 0 \end{aligned}$$

Notese que el Teorema 2 rescata las mismas condiciones que en el caso del Teorema 1 y básicamente conserva sus propiedades. Lo anterior es debido que los controladores tienen la misma estructura general, ya que la única diferencia reside en el grado relativo de las salidas y esto último únicamente repercute en el diseño de los controladores individuales. De esta forma, es posible ver la extensión para un grado relativo arbitrario.

4. FUNCIÓN DE LYAPUNOV

En esta sección se probará que los teoremas 1 y 2 son válidos, por medio de una función de Lyapunov homogénea suave. Para lo anterior, únicamente se mostrará para el Teorema 2. Sin embargo, la prueba del Teorema 1 es análoga.

Considere el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \\ 0 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{11} & g_{21} \\ 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= x_{1,2} \\ \dot{x}_{1,2} &= -g_{11} k_{u_1} [k_{1u_1} u_{1,1} + k_{2u_1} u_{2,2}]^0 - g_{12} k_{u_2} [k_{1u_2} u_{1,1} + k_{2u_2} u_{2,2}]^0 \\ \dot{x}_{2,1} &= x_{2,2} \\ \dot{x}_{2,2} &= -g_{21} k_{u_1} [k_{1u_1} u_{1,1} + k_{2u_1} u_{2,2}]^0 - g_{22} k_{u_2} [k_{1u_2} u_{1,1} + k_{2u_2} u_{2,2}]^0, \\ u_{1,1} &= [x_{1,2}]^\alpha + k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}}, \\ u_{2,2} &= [x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Basados en la función de Lyapunov para controladores homogéneos por modos deslizantes (caso SISO) presentada en [Cruz-Zavala y Moreno (2017)], se propone la función candidata de Lyapunov de grado de homogeneidad $p \geq 2$.

$$V(x) = V_1(x_{1,1}, x_{1,2}) + \beta V_2(x_{2,1}, x_{2,2}),$$

donde

$$V_1 = \frac{2}{p} |x_{1,1}|^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{p} |x_{1,2}|^p + k_1^{p-1} [x_{1,1}]^{\frac{p-1}{2}} x_{1,2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) k_1^p |x_{1,1}|^{\frac{p}{2}},$$

$$V_2 = \frac{2}{p} |x_{2,1}|^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{p} |x_{2,2}|^p + k_3^{p-1} [x_{2,1}]^{\frac{p-1}{2}} x_{2,2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) k_3^p |x_{2,1}|^{\frac{p}{2}},$$

las cuales se pueden probar positivas definidas, utilizando la desigualdad de Young. Derivando la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema, se obtiene

$$\dot{V} = \left[[x_{1,1}]^{\frac{p-2}{2}} x_{1,2} + \frac{p-1}{2} k_1^{p-1} |x_{1,1}|^{\frac{p-3}{2}} x_{1,2} \left[x_{1,2} + k_1 [x_{1,1}]^{\frac{1}{2}} \right] \right] + \beta \left[[x_{2,1}]^{\frac{p-2}{2}} x_{2,2} + \frac{p-1}{2} k_3^{p-1} |x_{2,1}|^{\frac{p-3}{2}} x_{2,2} \left[x_{2,2} + k_3 [x_{2,1}]^{\frac{1}{2}} \right] \right] - k_{u_1} \frac{g_{11}}{k_{1u_1}} \left[[x_{1,2}]^{p-1} + k_1^{p-1} [x_{1,1}]^{\frac{p-1}{2}} \right] + \frac{g_{21}}{g_{11}} \beta \left[[x_{2,2}]^{p-1} + k_3^{p-1} [x_{2,1}]^{\frac{p-1}{2}} \right] \times \left[[x_{1,2}]^\alpha + k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \right] + \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} \left[[x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \right] - k_{u_2} \left[g_{12} \left[[x_{1,2}]^{p-1} + k_1^{p-1} [x_{1,1}]^{\frac{p-1}{2}} \right] + g_{22} \beta \left[[x_{2,2}]^{p-1} + k_3^{p-1} [x_{2,1}]^{\frac{p-1}{2}} \right] \right] \times \left[k_{1u_2} \left[[x_{1,2}]^\alpha + k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \right] + k_{2u_2} \left[[x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \right] \right]^0$$

donde es posible ver que si la condición C_1 del Teorema 2 se cumple, es decir

$$\begin{aligned} \text{sign}(k_{1u_1}) &= \text{sign}(g_{11}) & \alpha &= p-1 \\ \text{sign}(k_{2u_1}) &= \text{sign}(g_{21}) & \beta &= \frac{k_{2u_1} g_{11}}{k_{1u_1} g_{21}} \end{aligned}$$

donde bajo la Suposición 1 el parámetro β es constante, el tercer término es de signo negativo y puede dominar para k_{u_1} suficientemente grande. Este término se hace cero en el conjunto

$$S_1 = \left\{ [x_{1,2}]^\alpha + k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} = -\frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} \left[[x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \right] \right\},$$

o bien

$$S_1 = \left\{ x_{1,2} = - \left[k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} u_{2,2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

En este conjunto, se tiene

$$\dot{V}|_{S_1} = \left[- [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} \left[k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} u_{2,2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{2} k_1^\alpha |x_{1,1}|^{\frac{p-3}{2}} \left[k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} u_{2,2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \times \left[\left[k_1^\alpha [x_{1,1}]^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} u_{2,2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - k_1 [x_{1,1}]^{\frac{1}{2}} \right] \right] + \beta \left[[x_{2,1}]^{\frac{p-2}{2}} x_{2,2} + \frac{\alpha}{2} k_3^\alpha |x_{2,1}|^{\frac{p-3}{2}} x_{2,2} \left[x_{2,2} + k_3 [x_{2,1}]^{\frac{1}{2}} \right] \right] - \frac{k_{u_2} k_{2u_1}}{k_{1u_1} g_{21}} (g_{11} g_{22} - g_{21} g_{12}) \left[k_{2u_2} - \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} k_{1u_2} \right]^0 |u_{2,2}|$$

donde es posible ver que el último término es negativo si la condición C_2 del Teorema 2, es decir

$$\frac{1}{k_{1u_1}} (g_{11} g_{22} - g_{21} g_{12}) \left[k_{2u_2} - \frac{k_{2u_1}}{k_{1u_1}} k_{1u_2} \right]^0 k_{u_2} > 0$$

y puede dominar para k_{u_2} suficientemente grande. Asimismo, este término sólo se hace cero en el conjunto

$$S_2 = \left\{ [x_{2,2}]^\alpha + k_3^\alpha [x_{2,1}]^{\frac{\alpha}{2}} = 0 \right\},$$

o bien

$$S_2 = \left\{ x_{2,2} = -k_3 [x_{2,1}]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

En este conjunto, se tiene

$$\dot{V}|_{S_1 \cup S_2} = -k_1 |x_{1,1}|^{\frac{p-1}{2}} - \beta k_3 |x_{2,1}|^{\frac{p-1}{2}},$$

lo cual es negativo para $k_1, k_3 > 0$.

5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Considerese el sistema MIMO, de dos entradas y dos salidas representado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 + 2 \sin(t) & -3 - \sin(t) \\ 0 & 0 \\ 2 + \sin(t) & 5 + \cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \rho_1(t) \\ u_2 + \rho_2(t) \end{bmatrix}$$

Para este sistema se consideran como condiciones iniciales $x(0) = [0,5, 0,1, 0,5, 0,2]$. Se consideran las perturbaciones $\rho_1(t) = \sin(2t)$ y $\rho_2(t) = 1,5 \cos(t)$, las cuales se encuentran acotadas por 1,5. Asimismo, se utiliza un controlador en la forma de (7), para lo cual es necesario escribir la matriz G que corresponde a

$$G = \begin{bmatrix} 4 + 2 \sin(t) & -3 - \sin(t) \\ 2 + \sin(t) & 5 + \cos(3t) \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es $\det(G) = 26 + 15 \sin(t) + 4 \cos(3t) + 2 \sin(t) \cos(t) + \sin^2(t) > 0$. De esta forma, se propone el controlador

$$u_1 = -10 \left[0,5 \left[[x_{1,2}]^2 + x_{1,1} \right] + 0,5 \left[[x_{2,2}]^2 + x_{2,1} \right] \right]^0,$$

$$u_2 = -5 \left[0,5 \left[[x_{1,2}]^2 + x_{1,1} \right] + \left[[x_{2,2}]^2 + x_{2,1} \right] \right]^0,$$

el cual satisface las condiciones del Teorema 2.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando el programa de Matlab Simulink, utilizando el método de Euler con tiempo de muestro de 1×10^{-5} [s].

En las Figuras 1-2, el comportamiento de los estados es presentado. En las Figuras es posible observar que todos los estados convergen a cero en tiempo finito a pesar de la presencia de las perturbaciones. Nótese que todos los estados convergen en aproximadamente el mismo tiempo. Esto puede ser debido a la estructura del controlador.

Por otro lado en las Figuras 3-4, las señales de control son presentadas. Nuevamente aprecia el efecto del chattering que es un fenómeno clásico de los controladores HOSM. Sin embargo, es posible ver que la señal filtrada convergen las perturbación acoplada de cada señal de control.

Es interesante mencionar que aunque las condiciones presentadas en los Teoremas 1 y 2 son obtenidas utilizando una función de Lyapunov y por ende sólo es posible asegurar suficiencia de las mismas, cuando no se cumplen las condiciones el estado diverge a $\pm\infty$ en simulaciones.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un controlador por modos deslizantes, capaz de estabilizar en tiempo finito el

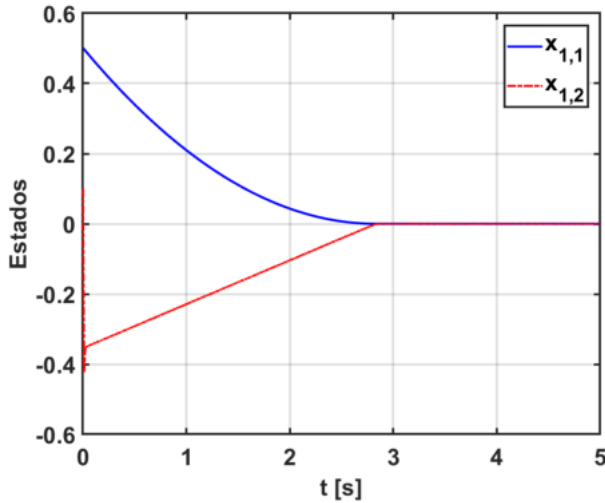


Figura 1. Comportamiento de los estados $x_{1,1}$ y $x_{1,2}$

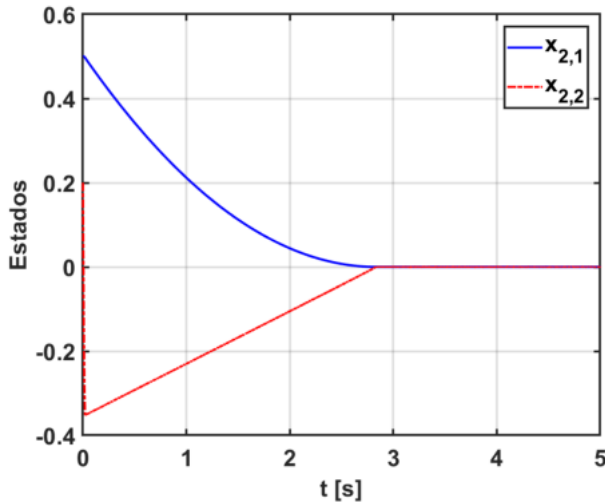


Figura 2. Comportamiento de los estados $x_{2,1}$ y $x_{2,2}$

origen de un sistema MIMO lineal. Aunque el resultado se presenta para dos salidas con grado relativo 2, el resultado puede ser extendido para un sistema de dos salidas con grado relativo arbitrario.

Todas la pruebas fueron realizadas usando funciones de Lyapunov homogéneas suaves. Es posible construir la función de Lyapunov del sistema en lazo cerrado del controlador MIMO, utilizando una combinación lineal de las funciones de Lyapunov para el caso SISO.

ACKNOWLEDGEMENTS

Los autores agradecen el apoyo económico de PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN110719; Fondo de Colaboración II-FI UNAM, en el Proyecto IISGBAS-100-2015; CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), proyecto 241171. Asimismo, los autores quieren agradecer el apoyo económico de CONACYT, CVU 705765.

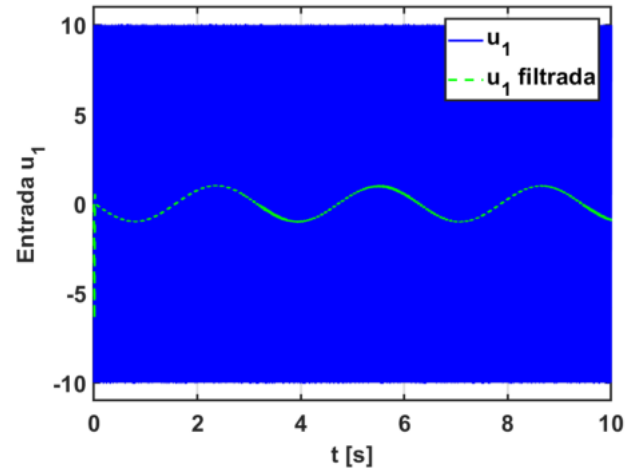


Figura 3. Comportamiento de la señal de control u_1

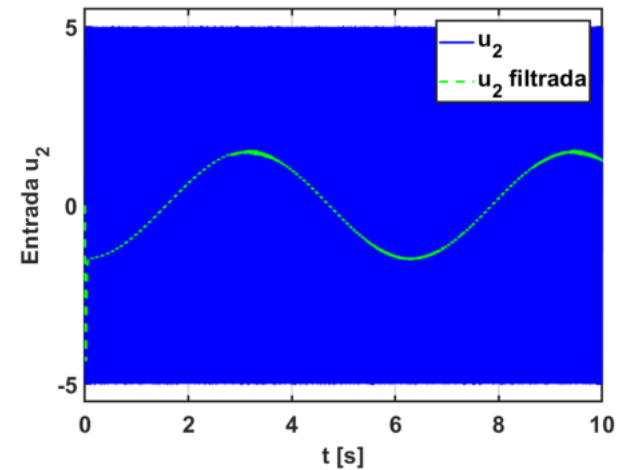


Figura 4. Comportamiento de la señal de control u_2

REFERENCIAS

- Andrieu, V., L. Praly y A. Astolfi (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Control Optim.* **47**(4), 1814–1850.
- Bacciotti, A. y L. Rosier (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, 2nd ed.. New York.
- Cruz-Zavala, E. y J.A. Moreno (2017). Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach. *Automatica* **80**, 232–238.
- Fridman, L., J.A. Moreno, B. Bandyopadhyay, S. Kamal y A. Chalanga (2015). *Continuous Nested Algorithms: The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers*. Vol. 24.
- Fridman, L. y A. Levant (2002). *Sliding mode in control engineering*. Marcel Dekker, Inc. High Order Sliding Modes.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 3rd ed.
- Levant, A. (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1812–1816.
- Levant, A. (2010). Gain-scheduled high-order mimo sliding mode control. In: *49th IEEE Annual Conference*

- on Decision and Control*. Atlanta, USA.
- Levant, A. (2014). Finite-time stabilization of uncertain mimo systems. In: *53rd IEEE Annual Conference on Decision and Control*. California, USA.
- Levant, A. y Y. Dvir (2014). Accelerated high-order mimo sliding mode control. In: *13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*. Nantes, France.
- Moreno, J.A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. In: *55th IEEE Annual Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA.
- Polyakov, A., D. Efimov y W. Perruquetti (2014). Sliding mode control design for mimo systems: Implicit Lyapunov function approach. In: *2014 European Control Conference (ECC)*. Strasbourg, France.
- Polyakov, A., D. Efimov y W. Perruquetti (2015). Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function method. *Automatica* **51**(1), 332–340.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Verlag.