

Estabilización robusta de una grúa de 3DOF mediante técnicas Takagi-Sugeno^{*}

Santos-Estudillo, O.^{*} López-Estrada, F. R.^{*}
Gómez-Peñate, S.^{*} Domínguez-Zenteno, J.^{*}
Molina-Domínguez S.^{*}

^{} Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, TURIX-Dynamics Diagnosis and Control Group, Carretera Panamericana Km 1080, Cp 29050, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas (e-mail:{frlopez, sgomez}@ittg.edu.mx).*

Resumen: En este trabajo se desarrolla el diseño de un controlador para la estabilización del sistema de una grúa de tres grados de libertad (3DOF por sus siglas en inglés) representado por un modelo Takagi-Sugeno (TS). A partir de su representación multimodelo, se presenta el diseño de un controlador usando compensación paralela distribuida con desempeño robusto H_∞ ante perturbaciones en la entrada y en la salida. La condición de estabilidad y desempeño robusto están dadas por una desigualdad matricial lineal (LMI por sus siglas en inglés), deducidas a partir del enfoque de Lyapunov. Se presentan resultados de simulación que demuestran la aplicabilidad y el desempeño del controlador obtenido en presencia de perturbaciones externas en la entrada.

Keywords: Sistemas Takagi-Sugeno, Control robusto, grúa de 3DOF, Compensación paralela distribuida.

1. INTRODUCCIÓN

Las grúas son herramientas ampliamente usadas en el sector industrial. Son sistemas necesarios para el transporte de todo tipo de bienes de un punto a otro de forma eficiente y confiable. Debido a su versatilidad y fácil operación, son usadas para todo tipo de rubros; bodegas, plantas de energía, desembarcaderos, entre otros. Para fines de productividad, se espera que la grúa transporte la carga a su destino en el menor tiempo posible. No obstante, la aceleración y desaceleración de la grúa causa un balanceo en la carga, especialmente durante el levantamiento y descenso de esta. Además los factores como el viento, obstáculos o problemas severos como desajustes en actuadores, sensores o el sistema mismo suman perturbaciones que afectan el desempeño de la grúa y pueden resultar en accidentes, daños al operador, la carga o al mismo sistema. Por lo que es requerido entonces un control confiable de modo que el sistema funcione de forma eficiente, segura y que minimice las oscilaciones.

En la literatura gran parte de las investigaciones se han centrado en esquemas de control tradicionales que con-

sisten en técnicas lineales, e.g., los autores en Lee y Cho (2001) propusieron un control basado en el control de la posición de motor para controlar indirectamente la posición de la grúa mediante técnicas control difuso. A su vez en Chang y Chiang (2008) se presentó un método basado en datos que no requiere de un modelo dinámico complejo el cual considera datos de la posición del carro y ángulo de oscilación para reducir las oscilaciones. En el trabajo de Garrido et al. (2008) se propone un sistema de control antibalanceo mediante mediciones con un inclinómetro bidimensional en línea mientras que el control modulación de entrada es dividido en dos fases: movimiento en línea recta y cancelación de perturbaciones externas. En el trabajo de Almutairi y Zribi (2009) se presenta un esquema de control por modos deslizantes para regular la posición de la grúa y control de las oscilaciones en la carga. El desempeño de este sistema de lazo cerrado fue simulado usando MATLAB. En (Castillo et al., 2015) se explora la aplicación experimental de la metodología de diseño de una superficie óptima singular LQ a través del Toolbox de MATLAB en una grúa viajera. Recientemente, en Maghsoudi et al. (2017) se propone un esquema de control por modulación de entrada mejorado para un control de oscilaciones eficiente de una grúa viajera tridimensional con fricción el cual obtiene una mas alta reducción de oscilación al basar el modulador de entrada en el modelo completamente no lineal. A la vez, en Vu et al. (2017) se establece un control adaptativo el cual garantiza el seguimiento de posición deseada a sí como el control en las

^{*} Este trabajo fue cofinanciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través del programa de becas de posgrado de calidad y por el Tecnológico Nacional de México con el proyecto número 5400.19-P del programa de Apoyo a la Investigación Científica, Aplicada, Desarrollo Tecnológico e Innovación en los Programas Educativos de los Institutos Tecnológicos Federales y Centros 2019.

oscilaciones del cable de la carga. En Vu et al. (2017) se propone un control antioscilaciones adaptativo para grúas viajeras inciertas, presentando el modelo del sistema incluyendo sus incertidumbres y perturbaciones. El desempeño del algoritmo propuesto es verificado vía simulación en MATLAB. Más recientemente, en Abdullahi et al. (2018) se propone una nueva técnica por configuración de comandos adaptativa basados en la salida del sistema para una reducción efectiva de oscilaciones de una grúa bajo el efecto del levantamiento de carga y perturbación por viento.

Por otro lado, algunos autores han explorado el diseño de controladores robustos basados en técnicas multimodelos. Por ejemplo en Hilhorst et al. (2015) se propone un controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de orden reducido para sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) de tiempo discreto, validando sus resultados en una grúa viajera con longitud de cable variable. Los autores en Adeli et al. (2011) presentan un controlador híbrido incluyendo regulación de la posición y control de oscilaciones diseñado mediante técnicas de sistemas Takagi-Sugeno (T-S). En Zhao y Li (2015) se explora la estabilización de sistemas T-S difusos por medio de compensación paralela distribuida. De igual manera, Kiriakidis (2001) proponen una estabilización robusta de sistemas T-S considerando desigualdades matriciales bilineales. No obstante ninguno de los trabajos reportados se sometió a pruebas de desempeño en presencia de perturbaciones por parte señales desconocidas aditivas.

En este trabajo se presenta un enfoque para la estabilización robusta de una grúa de 3 grados de libertad (3DOF, por sus siglas en inglés) no lineal representado mediante un sistema T-S. El método usado en esta caso se conoce como compensación paralela distribuida (PDC). Una de las ventajas de este método es que las condiciones de diseño del control quedan en términos de desigualdades lineales matriciales (LMI's, por sus iniciales en inglés) gracias al uso de una representación en multimodelos lineales. El tiempo de respuesta en el posicionamiento del carro, nivel de reducción de balanceo en la carga y robustez ante ruido y señales desconocidas (presentadas como off-sets en la entrada) son tomados en cuenta para evaluar el desempeño del controlador. Los resultados de las simulaciones en MATLAB de las respuestas del sistema son analizados en el dominio del tiempo.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se describe la naturaleza del sistema de la grúa de forma general y se deriva su modelo matemático no lineal. En la Sección 3 se detalla el proceso de obtención de los submodelos y funciones de peso para la representación del sistema no lineal en su forma T-S. En la Sección 4 se presenta el desarrollo del controlador por medio de la solución de LMI's. Los resultados de simulación se presentan en la Sección 5 y se expone el desempeño del controlador aplicado al sistema de la grúa con presencia de ruido y falla de actuador en la entrada

y salida del sistema. Finalmente, las conclusiones del trabajo son presentadas en la Sección 6.

2. MODELO MATEMÁTICO DE UNA GRÚA DE 3DOF

El diagrama esquemático de una grúa viajera de 3DOF se muestra en la Figura 1. El carro se desliza a lo largo del riel horizontal al mismo tiempo que este es sostenido por dos patas. Una masa es suspendida de un cable unido al carro. La fuerza $F_x(t)$ se aplica al carro para moverlo a una distancia denotado como x . Este movimiento provoca que se forme un ángulo θ en el péndulo formado por la carga de masa m y el cable de longitud l cuyo valor puede cambiar mediante F_l . La posición de la carga (x_m, z_m) está dada por:

$$\begin{aligned} x_m &= x(t) + l(t) \sin \theta(t), \\ z_m &= -l(t) \cos \theta(t). \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones diferenciales que describen

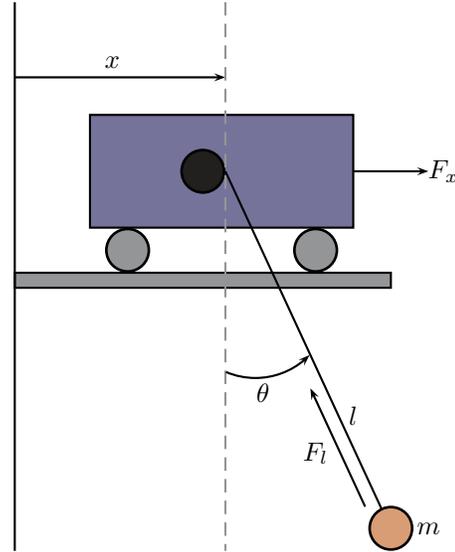


Figura 1. Esquema de una grúa de tres grados de libertad.

la dinámica del sistema se utiliza el método de Euler-Lagrange, tomando como base las deducciones publicadas en Almutairi y Zribi (2009). Las ecuaciones de energía cinética (K) y potencial (P) son:

$$K = \frac{1}{2} (M_x \dot{x}(t)^2 + M_l \dot{l}(t)^2) + \frac{m}{2} v_m^2, \quad (1)$$

$$P = mgl(t) (1 - \cos \theta(t)), \quad (2)$$

donde M_x es la suma de m y m_c , M_l equivale a m (Tabla. 1) y el análisis de la velocidad usando regla de senos y cosenos es:

$$\begin{aligned} v_m^2 &= \dot{x}(t)^2 + \dot{l}(t)^2 + \dot{\theta}(t)^2 l(t)^2 + 2\dot{x}(t)\dot{l}(t) \sin \theta(t) \\ &\quad + 2\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t). \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación de Lagrange está expresada como:

$$L = K - P, \quad (4)$$

y usando las ecuaciones (1), (2) y (3), la ecuación (4) se reescribe como:

$$L = \frac{1}{2} (M_x \dot{x}(t)^2 + M_l \dot{l}(t)^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}(t)^2 + \dot{l}(t)^2) \quad (5)$$

$$+ \dot{\theta}(t)^2 l(t)^2 + 2\dot{x}(t)\dot{l}(t) \sin \theta(t) + 2\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

$$+ mgl(t) (\cos \theta(t) - 1).$$

Las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange con respecto a la posición de la carga en el eje x y el eje z y el ángulo entre el cable y la normal pueden ser escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_x(t) - D_x \dot{q}_1, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_l(t) - D_l \dot{q}_2, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0, \quad (8)$$

donde $[q_1, q_2, q_3] = [x(t), l(t), \theta(t)]$. Desarrollando las ecuaciones presentadas en (6)-(8), se deducen las ecuaciones diferenciales no lineales siguientes:

$$(M_x + m) \ddot{x}(t) + m\ddot{l}(t) \sin \theta(t) + 2m\dot{l}(t) \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) - ml \sin \theta(t) \dot{\theta}(t)^2 + ml(t) \cos \theta(t) \ddot{\theta}(t) = F_x(t) - D_x \dot{x}(t), \quad (9)$$

$$(M_l + m) \ddot{l}(t) + m\ddot{x}(t) \sin \theta(t) - ml\dot{\theta}(t)^2 - mg \cos \theta(t) + mg = F_l(t) - D_l \dot{l}(t), \quad (10)$$

$$m\ddot{\theta}(t)l(t)^2 + m\ddot{x}(t)l(t) \cos \theta(t) + 2m\dot{\theta}(t)l(t)\dot{l}(t) + mgl(t) \sin \theta(t) = 0. \quad (11)$$

Los valores de cada parámetro se muestran en la Tabla 1, los cuales se tomaron de Petrehuş et al. (2013). Definiendo

Tabla 1. Descripción de parámetros

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Masa de la carga	m	1	Kg
Masa del carrito	m_c	2.49	Kg
Aceleración gravitatoria	g	9.81	m/s
Índice de amortiguamiento x	D_x	82	Kg/s
Índice de amortiguamiento z	D_l	100	Kg/s

un vector de estado, el cual contiene la posición en el eje x y el eje z así como sus respectivas velocidades, el ángulo formado por el cable y su velocidad angular, tal que $\xi(t) = [x(t), \dot{x}(t), l(t), \dot{l}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)]^T$, el vector de entrada como $\mathbf{u}(t) = [F_x(t), F_l(t)]^T$ y considerando $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$ debido a que se asume que los ángulos en la carga serán muy pequeños, el sistema queda representado en variables de estado de la siguiente manera:

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 D_x & 0 & m_1 D_l \xi_5 & m_4 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 D_x \xi_5 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_2 D_x}{\xi_3} & 0 & -\left(\frac{m_1 D_l \xi_5}{\xi_3} + \frac{2\xi_6}{\xi_3}\right) & \frac{-m_5 g}{\xi_3} & 0 \end{bmatrix} \xi(t),$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & -m_1 \xi_5 \\ 0 & 0 \\ -m_1 \xi_5 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -\frac{m_2}{\xi_3} & \frac{m_1 \xi_5}{\xi_3} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (12)$$

3. MODELO TAKAGI-SUGENO DE UNA GRÚA DE 3DOF

En esta sección se presenta un modelo TS para el modelo no lineal de una grúa de 3DOF presentada en la sección anterior. Los modelos TS describen a los sistemas no lineales mediante una colección de modelos lineales e invariantes en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés) interpolados mediante funciones no lineales conocidas como funciones de ponderación (Gómez-Peñate et al., 2018). La forma general de un modelo TS que describe un sistema dinámico no lineal en tiempo continuo es:

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i \xi(t) + B_i \mathbf{u}(t)), \quad (13)$$

$$y(t) = C \xi(t),$$

donde $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^b$ son los vectores de estado, entrada y salida respectivamente, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{b \times n}$ son matrices conocidas y r es el número de submodelos. En adelante se omitirá el factor temporal (t) para fines de simplicidad. De esta manera, el sistema (13) se reescribe como:

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i \xi + B_i \mathbf{u}), \quad (14)$$

$$y = C \xi.$$

Las funciones de ponderación $h_i(z)$ dependen de variables premisas, denotadas como z , las cuales en este trabajo se consideran medibles. Estas funciones cumplen con la propiedad de suma convexa:

$$\forall i \in [1, 2, \dots, k], h_i(z) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1, \forall t. \quad (15)$$

Con el objetivo de desarrollar un modelo TS, los términos no lineales del modelo presentado en (12) se eligen como variables premisas, es decir:

$$z = \left[\xi_5 \quad \frac{1}{\xi_3} \quad \frac{\xi_5}{\xi_3} \quad \frac{\xi_6}{\xi_3} \right].$$

Cada estado presente en el vector premisa queda acotado de acuerdo a limitaciones presentes en el sistema físico, tal que: $\xi_3 \in [0.1, 0.72][m]$, $\xi_5 \in [-0.35, 0.35][rad]$ y $\xi_6 \in$

$[-3.467, 3.467][rad/s]$. Las funciones de peso para $z_i, i = 1, \dots, 4$ se obtienen de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Para $z_1 = \xi_5$ las cotas son $z_{1,min} = -0.35$ y $z_{1,max} = 0.35$. Las funciones de peso son $w_{11} = \frac{z_{1,max}-z_1}{z_{1,max}-z_{1,min}}$ y $w_{12} = 1 - w_{11}$. El termino z_1 puede ser rescrito como $z_1 = z_{1,min}w_{11} + z_{1,max}w_{12}$.
2. El término $z_2 = \frac{1}{\xi_3}$ es acotado como $z_{2,min} = 1$ y $z_{2,max} = 10$. Las funciones de peso son $w_{21} = \frac{z_{2,max}-z_2}{z_{2,max}-z_{2,min}}$ y $w_{22} = 1 - w_{21}$. El termino $z_2(t)$ puede ser rescrito como $z_2 = z_{2,min}w_{21} + z_{2,max}w_{22}$.
3. $z_3 = \frac{\xi_5}{\xi_3}$ es acotado como $z_{3,min} = -3.5$ y $z_{3,max} = 3.5$. Las funciones de peso son $w_{31} = \frac{z_{3,max}-z_3}{z_{3,max}-z_{3,min}}$ y $w_{32} = 1 - w_{31}$. El termino z_3 puede ser rescrito como $z_3 = z_{3,min}w_{31} + z_{3,max}w_{32}$.
4. De igual manera $z_4 = \frac{\xi_6}{\xi_3}$ es acotado como $z_{4,min} = -34.67$ y $z_{4,max} = 34.67$. Las funciones de peso son $w_{41} = \frac{z_{4,max}-z_4}{z_{4,max}-z_{4,min}}$ y $w_{42} = 1 - w_{41}$. z_4 es rescrito como $z_4 = z_{4,min}w_{41} + z_{4,max}w_{42}$.

Como se aprecia arriba, cada variable premisa $z_i, i = 1, \dots, 4$ tiene dos funciones de peso, eso significa que tenemos un modelo TS con $2^4 = 16$ modelos locales. Las funciones de pertenencia se obtienen:

$$h_i(z) = \prod_{j=1}^r w_{i_j}^j(z_j), \quad i = 1, 2, \dots, 2^p. \quad (16)$$

Con $i = 2, \dots, 2^p$, $i_j \in \{0, 1\}$, p es el nombre de no linealidades, $r = 2^p$ es el numero de submodelos. De esta manera, el modelo TS obtenido en este trabajo queda expresado como:

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^{16} h_i(z)(A_i \xi + B_i u). \quad (17)$$

Los modelos locales lineales son obtenidos al reemplazar los valores correspondientes de las no linealidades de (términos no constantes) en las matrices A_i y B_i de (12). Con lo que se obtienen las 16 combinaciones que dan como resultado 16 submodelos.

Nótese, que el modelo obtenido es exacto al modelo no lineal dentro de las cotas consideradas.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR ROBUSTO

La estabilización de un sistema lineal suele realizarse por medio de realimentación lineal del estado $u(t) = F\xi(t)$. De manera análoga, se aplica el esquema propuesto por Wang et al. (1995) denominado compensación paralela distribuida (PDC). Esta ley de control utiliza las funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno a controlar y es, en sí misma, una combinación convexa de realimentación de estado. Por facilidad, el sistema TS se reescribe como:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_h \xi + B_h u + G_h w, \\ y &= C \xi + E w, \end{aligned} \quad (18)$$

donde $w \in \mathbb{R}^s$ representa perturbaciones aditivas con $G \in \mathbb{R}^{n \times s}$ y $E \in \mathbb{R}^{q \times s}$. Además:

$$A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i, \quad B_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i.$$

Se considera un controlador T-S de la forma:

$$u = \sum_{i=1}^r h_i(z(\xi)) F_i(t) = F_h \xi, \quad (19)$$

donde $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, r$, son las ganancias necesarias para estabilizar al sistema.

Sustituyendo (19) en (18), se tiene la siguiente representación del sistema realimentado

$$\dot{\xi} = (A_h + B_h F_h) \xi + G_h w. \quad (20)$$

Esta técnica consiste en minimizar la relación entre la norma ℓ_2 de la señal de salida y la norma ℓ_2 de la perturbación; es decir, resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\gamma > 0} \gamma : \min_{\|w\|_{\ell_2} \neq 0} \frac{\|y\|_{\ell_2}}{\|w\|_{\ell_2}} \leq \gamma, \quad (21)$$

donde $\gamma > 0$ se denomina nivel de atenuación y la norma ℓ_2 . El siguiente Teorema da condiciones suficientes para garantizar la estabilización del sistema (18) sujeto a (21).

Teorema 1. Dado el sistema TS (17) y la ley de control (19), el sistema (18) es estable y robusto con desempeño H_∞ y factor de atenuación $\gamma > 0$ si y solo si, existen una matrices $X = X^T > 0$ y $M_j \forall i = 1, 2, \dots, r$ tal que:

$$\begin{bmatrix} A_i X + B_i M_j + M_j^T B_i^T + X A_i^T & G_i & X C^T \\ G_i^T & -\gamma^2 I & E^T \\ C X & E & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (22)$$

Las ganancias del controlador se calculan $F_i = M_j X^{-1}$.

Demostración: Para garantizar la estabilidad del sistema y minimizar los efectos de las perturbaciones en la salida del sistema, se considera el siguiente criterio de desempeño:

$$\dot{V}(\xi) + y^T y - \gamma^2 w^T w \leq 0, \quad (23)$$

donde \dot{V} es la derivada de la función de Lyapunov sobre la trayectoria de los estados, tal que:

$$V(\xi) := \xi^T P \xi > 0. \quad (24)$$

Considerando la derivada de (24) en (23), se tiene:

$$\begin{aligned} \xi^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} + (C \xi + E w)^T (C \xi + E w) \\ - \gamma^2 w^T w \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Desarrollando considerando el sistema retroalimentado (20), se obtiene:

$$\begin{aligned} \xi^T P ((A_h + B_h F_h) \xi + G_h w) + ((A_h + B_h F_h) \xi + G_h w)^T P \xi \\ + (C \xi + E w)^T (C \xi + E w) - \gamma^2 w^T w \leq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} \xi^T (P A_h + P B_h F_h + F_h^T B_h^T P + A_h^T P + C^T C) \xi \\ \xi^T (P G_h + F_h^T E) w + w^T (E^T C + G_h^T P) \xi \\ + w^T (E^T E - \gamma^2 I) w \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Factorizando a la izquierda y derecha por $\begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix}$ y su transpuesta se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \xi^T \\ w^T \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \leq 0. \quad (28)$$

Donde Φ queda definida como:

$$\begin{bmatrix} PA_h + PB_h F_h + F_h^T B_h^T P + A_h^T P + C^T C \\ E^T C + G_h^T P \\ PG_h + C^T \\ E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (29)$$

Nótese que el sistema (29) es no lineal debido a los términos desconocido P y F_h , debido a ello, el sistema no tiene solución considerando los toolboxes de LMILAB o YALMIP. Para solventar este problema, se pre y pos multiplica por:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

donde $X = P^{-1}$, tal que se obtiene la siguiente LMI equivalente.

$$\begin{bmatrix} A_h X + PB_h F_h + F_h^T B_h^T P + X A_h^T + X C^T C X \\ E^T C X + G_h^T P \\ PG_h + X C^T E \\ E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (30)$$

Con esta consideración, el término no lineal resultante se elimina fácilmente considerando $M_h = F_h X$, tal que se obtiene la siguiente desigualdad lineal matricial (LMI):

$$\begin{bmatrix} A_h X + B_h M_h + M_h^T B_h^T + X A_h^T + X C^T C X \\ G_h^T + E^T C X \\ G_h + X C^T E \\ E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (31)$$

Equivalentemente, la LMI (31) se expresa de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_h X + B_h M_h + M_h^T B_h^T + X A_h^T & G_h \\ G_h^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X C^T \\ E^T \end{bmatrix} [C X \ E] \leq 0. \quad (32)$$

Finalmente aplicando el complemento de Schur se obtiene la LMI descrita en el Teorema 1. \square

5. RESULTADOS

Resolviendo la LMI para nuestro sistema, obtenemos $\gamma = 1.3020$ y nuestra P simétrica, la cual se calcula como $P = X^{-1}$:

$$P =$$

$$\begin{bmatrix} 0.2543 & -0.1612 & 0.0035 & 0.0006 & 0.0114 & -0.0592 \\ -0.1612 & 0.4171 & 0.0002 & 0.0073 & 0.0825 & -0.0155 \\ 0.0035 & 0.0002 & 0.0034 & -0.0015 & 0.0023 & -0.0020 \\ 0.0006 & 0.0073 & -0.0015 & 0.0033 & -0.0006 & 0.0208 \\ 0.0114 & 0.0825 & 0.0023 & -0.0006 & 0.0293 & -0.0445 \\ -0.0592 & -0.0155 & -0.0020 & 0.0208 & -0.0445 & 0.2925 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

mientras las ganancias de realimentación se calculan como $F_h = M_h X^{-1}$. Debido a limitaciones de espacio no se presentan todas las ganancias. De forma ilustrativa, F_1 queda como:

$$F_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 5090 & 7110 & 6830 & -5360 & -26770 & -1860 \\ 20180 & 28080 & 31810 & -11870 & -108940 & -8410 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Para validar el desempeño del controlador con las ganancias obtenidas, este se pone a prueba en simulación considerando los parámetros presentados anteriormente en la Tabla 1. La Figura 2 muestra el comportamiento de las variables de estado al ser afectados por la señal de control retroalimentada definida en (19); para efectos de probar la robustez del método propuesto, se le inyectó una señal de ruido con media variable a partir del segundo 5 como se muestra en la Figura 3. Nótese que, a pesar de la presencia de la señal desconocida, el sistema converge a una región muy cercana a cero, lo cual significa que el control es suficientemente robusto para estabilizar al sistema incluso en presencia de perturbaciones y la posible aparición de señales desconocidas, esto debido a que nuestro controlador cumple con la norma H_∞ . En un segundo experimento, se realiza una prueba de seguimiento de trayectorias. El sistema (señal continua) sigue la referencia (señal punteada) con una respuesta rápida y generando oscilaciones mínimas en la carga; es decir, ángulos pequeños formados por la cuerda y la normal, manteniendo un rechazo significativo de las perturbaciones como se aprecia en la Figura 4). Estos resultados demuestran la efectividad del método propuesto.

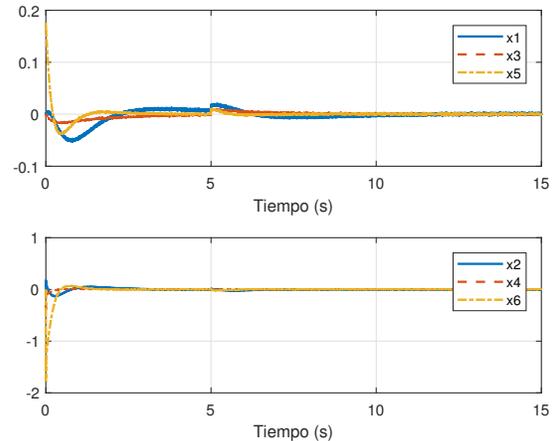


Figura 2. Estados de posición de la grúa 2D

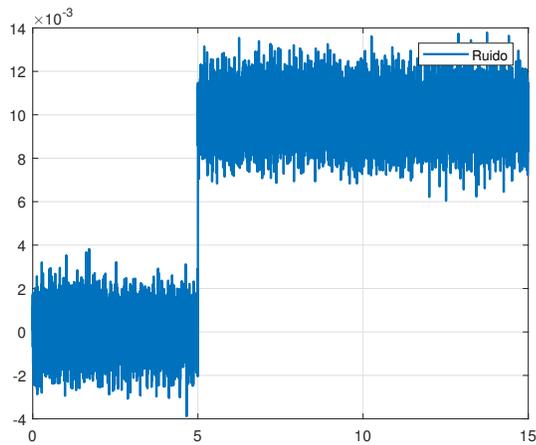


Figura 3. Ruido más una señal desconocida presente como un off-set en la entrada

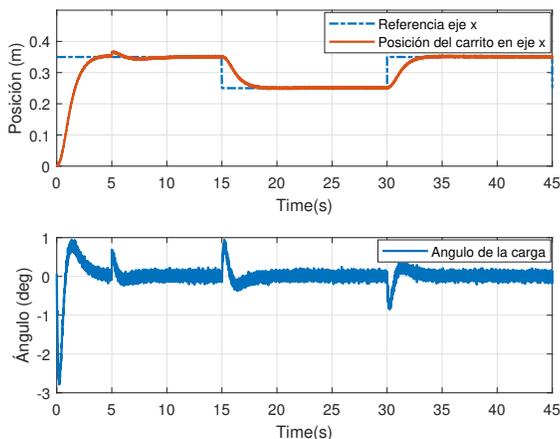


Figura 4. Seguimiento de trayectoria

6. CONCLUSIONES

Tomando en cuenta los resultados obtenidos, el esquema de estabilización Takagi-Sugeno lleva satisfactoriamente a todos los estados a cero. Las LMI's propuestas proveen un resultado satisfactorio al mismo tiempo que el desempeño del estabilizador cumple con la norma H_∞ . Este sistema puede entonces ser fácilmente estabilizado incluso estando fuera de su área de desempeño nominal.

REFERENCIAS

Abdullahi, A.M., Mohamed, Z., Selamat, H., Pota, H.R., Abidin, M.Z., Ismail, F., y Haruna, A. (2018). Adaptive output-based command shaping for sway control of a 3d overhead crane with payload hoisting and wind disturbance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 157–172.

Adeli, M., Zarabadipour, H., Zarabadi, S.H., y Shoorehdeli, M.A. (2011). Anti-swing control for a double-pendulum-type overhead crane via parallel distributed

fuzzy lqr controller combined with genetic fuzzy rule set selection. In *2011 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering*, 306–311. IEEE.

Almutairi, N.B. y Zribi, M. (2009). Sliding mode control of a three-dimensional overhead crane. *Journal of vibration and control*, 15(11), 1679–1730.

Castillo, I., Vázquez, C., y Fridman, L. (2015). Overhead crane control through lq singular surface design matlab toolbox. In *American Control Conference (ACC), 2015*, 5847–5852. IEEE.

Chang, C.Y. y Chiang, K.H. (2008). Fuzzy projection control law and its application to the overhead crane. *Mechatronics*, 18(10), 607–615.

Garrido, S., Abderrahim, M., Giménez, A., Diez, R., y Balaguer, C. (2008). Anti-swinging input shaping control of an automatic construction crane. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 5(3), 549–557.

Gómez-Peñate, S., López-Estrada, F.R., Valencia-Palomo, G., Osornio-Ríos, R., Zepeda-Hernández, J., Rios-Rojas, C., y Camas-Anzueto, J. (2018). Sensor fault diagnosis observer for an electric vehicle modeled as a takagi-sugeno system. *Journal of Sensors*, 2018.

Hilhorst, G., Pipeleers, G., Michiels, W., Oliveira, R.C., Peres, P.L.D., y Swevers, J. (2015). Reduced-order H_2/H_∞ control of discrete-time lpv systems with experimental validation on an overhead crane test setup. In *2015 American Control Conference (ACC)*, 125–130. IEEE.

Kiriakidis, K. (2001). Robust stabilization of the takagi-sugeno fuzzy model via bilinear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2), 269–277.

Lee, H.H. y Cho, S.K. (2001). A new fuzzy-logic anti-swing control for industrial three-dimensional overhead cranes. In *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, volume 3, 2956–2961. IEEE.

Maghsoudi, M.J., Mohamed, Z., Sudin, S., Buyamin, S., Jaafar, H., y Ahmad, S. (2017). An improved input shaping design for an efficient sway control of a nonlinear 3d overhead crane with friction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 92, 364–378.

Petrehuş, P., Lendek, Z., y Raica, P. (2013). Fuzzy modeling and design for a 3d crane. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(20), 479–484.

Vu, N.T.T., Thanh, P.T., Duong, P.X., y Phuoc, N.D. (2017). Robust adaptive control of 3d overhead crane system. In *Adaptive Robust Control Systems*. IntechOpen.

Wang, H.O., Tanaka, K., y Griffin, M. (1995). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems.*, volume 2, 531–538 vol.2. doi:10.1109/FUZZY.1995.409737.

Zhao, L. y Li, L. (2015). Robust stabilization of t-s fuzzy discrete systems with actuator saturation via pdc and non-pdc law. *Neurocomputing*, 168, 418–426.