

S^α -Connectivity For Fractional Difference Caputo's Type Systems ^{*}

Blanca L. Hernández-Galván ^{*} Jesús Rogelio Pulido Luna ^{**}
Nohé R. Cázarez-Castro ^{**} Jorge A. López-Rentería ^{***}
Guillermo Fernández-Anaya ^{*}

^{*} *Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana, CDMX, México, 01219 (emails: blanleth@gmail.com; guillermo.fernandez@ibero.mx)*

^{**} *Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, TecNM / Instituto Tecnológico de Tijuana, Tijuana, México, 22414 (emails: jesus.pulido19@tectijuana.edu.mx, nohe@ieee.org).*

^{***} *Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, CONACyT - TecNM / Instituto Tecnológico de Tijuana, Tijuana, México, 22414 (email: jorge.lopez@tectijuana.edu.mx).*

Abstract: The aim of this work is to give a method to connect a set of polynomials having all of their roots inside the stability zone for fractional difference systems with the fractional discrete operator of Caputo. Due to the complexity of the stability zone, it is necessary to use its explicit description to build a polynomial family with zeros belonging to the described zone. Such a construction of the polynomial family will be based on the connection of their zeros. Moreover, the applicability is shown with the design of a robust stabilizing controller, which is illustrated by stabilizing the fractional discrete Duffing's oscillator.

Keywords: Fractional Systems, Systems with time delays, Linear systems, Robust control (linear case), Polynomial methods, Linear parameter-varying systems, Robust time-delay systems.

1. INTRODUCTION

El estudio de los sistemas de orden fraccional en sistemas dinámicos se ha convertido en tema de gran interés para los científicos en las últimas décadas debido a la gran cantidad de aplicaciones en ingeniería y ciencias en general, convirtiéndolo en un tópico muy productivo en contribuciones e investigación (ver A.A. Kilbas and H.M. Srivastava and J.J. Trujillo (2006); R. Caponetto and G. Dongola and L. Fortuna and I. Petras (2010), por ejemplo). El más grande interés de los trabajos de los sistemas fraccionales radica en la gran aproximación y exactitud de los modelos matemáticos que representan a los fenómenos en cuestión.

Actualmente, se puede consultar bastante literatura básica relacionada con el cálculo fraccional y su aplicación a ciencias e ingeniería, por ejemplo, en F. Mainardi (1997); I. Podlubny (1999); I. Petráš (2011); Shantanu Das (2011). A su vez, en Christopher Goodrich and Allan C. Peterson (2015) podemos consultar información básica relacionada con diferencias fraccionales y aplicaciones.

Existen diferentes tipos de derivadas fraccionales y dentro de las más usuales por su naturaleza son la derivada fraccional de Caputo, la de Riemann-Liouville y la de Grünwald-Letnikov. Similarmente, y análogo al caso de orden entero, existen las diferencias fraccionales de Caputo, de Riemann-Liouville y la Grünwald-Letnikov.

A pesar de la gran cantidad de contribuciones, tanto en ecuaciones en derivada de orden fraccional (EDOF, caso continuo) como en ecuaciones en diferencias fraccionales (EDF, caso discreto), existe mucha más información e investigación en el caso continuo que el discreto. Algunas aportaciones importantes en el caso discreto, que estudian la estabilidad de sistemas EDF, las podemos consultar en Busłowicz and Kaczorek (2009); Busłowicz, M (2010); Rafal Stanislawski and Krzysztof J. Latawiec (2013a,b); Cermak et al. (2015).

En adición, parte del análisis cualitativo para sistemas EDOF se realiza por medio del espectro de su parte linealizada, estudiando la ecuación característica, la cual resulta ser un polinomio de orden no entero, también llamados pseudo-polinomios (ver en Farges et al. (2010); D. Maignon (1996, 1998); MOZ (2005)). En ese sentido, la investigación acerca de la estabilidad de sistemas dinámicos fraccionales se dirige en el estudio de la localización de ceros de pseudo-polinomios (ver Tan et al. (2009); B. Senol and C. Yeroglu (2012); López-Rentería

^{*} This research was supported by CONACyT under project number **A1-S-32341**. Pulido Luna is supported by CONACyT with a MSC fellow support. Hernández Galván was supported by CONACyT with a PhD fellow support.

and Fernández-Anaya (2016); J.A. López-Rentería and B. Aguirre-Hernández and G. Fernández-Anaya (2019)). Sin embargo, la ecuación característica de sistemas EDF resulta ser un cuasi-polinomio, el cual se puede expresar como un polinomio de orden superior al del sistema en cuestión (Busłowicz, M (2010)). En este caso, en Busłowicz and Kaczorek (2009); Busłowicz, M (2010); Cermak et al. (2015) se describe el conjunto de estabilidad a partir de la ecuación característica.

Específicamente, en J.A. López-Rentería and B. Aguirre-Hernández and F. Verduzco (2017) se trabaja con conectividad de polinomios de orden entero para los dos casos, continuo y discreto. Tal conexión es monoparamétrica y se realiza por medio de una función $P : [a, b] \times \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, dada por $(\mu, p_0(\lambda), p_1(\lambda)) \mapsto P(\mu, \lambda)$, donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y \mathcal{P}_n es el conjunto de polinomios de grado n , tal que $P(a, \lambda) = p_0(\lambda)$ y $P(b, \lambda) = p_1(\lambda)$. La función P se utiliza para diseñar controladores estabilizantes para sistemas dinámicos lineales. Esa es la importancia de conectar las ecuaciones características y obtener una familia de funciones características estables, en el sentido ahí descrito.

En el presente trabajo se abordará el problema de conectar monoparamétricamente un par de polinomios con la característica de poseer todos sus ceros dentro del conjunto de estabilidad para sistemas EDF, con la definición de Caputo, y obtener una familia con las mismas características para todo valor del parámetro en un intervalo.

El resto de este trabajo está organizado como sigue: En la sección 3, se darán algunas nociones básicas del operador de diferencias fraccional de Caputo aplicado a sistemas, así como la descripción del conjunto de estabilidad. En la sección 4, se establece la conexión polinomial mediante el criterio que describe la región de estabilidad. En la sección 5, se usa tal conexión polinomial para el diseño de controladores estabilizantes para sistemas EDF. Finalmente, en la sección 6, se desarrolla un ejemplo ilustrativo en el cual se implementa el controlador y se verifica gráficamente la estabilidad.

2. NOMENCLATURA

\mathbb{N}	Conjunto de números naturales
\mathbb{N}_α	Conjunto de números α -naturales
\mathbb{R}	Conjunto de números reales
\mathbb{R}^n	Conjunto de n -adas reales
\mathbb{C}	Conjunto de números complejos
\mathcal{D}	Disco unitario abierto (Schur estabilidad)
\mathcal{D}^α	Interior de $p_A(z) = \det(z(1 - z^{-1})^\alpha I - A)$
\mathcal{S}^α	Conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z < \varpi^\alpha \text{ y } \arg z > \frac{\alpha\pi}{2}\}$
Δ	Operador de diferencias
Δ^α	Operador de diferencias fraccional α
Γ	Función gamma de Euler
$\sigma(A)$	Conjunto de valores propios de la matriz A
$\det(A)$	Determinante de la matriz A

Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice ser Schur estable si todos sus ceros están contenidos en \mathcal{D} . La función f se dice ser \mathcal{D}^α -estable ó α -Schur estable si todos sus ceros están contenidos en \mathcal{D}^α ; mientras que f se dice ser \mathcal{S}^α -estable si todos los ceros de f están contenidos en \mathcal{S}^α .

3. SISTEMAS EN DIFERENCIAS FRACCIONAL

3.1 Diferencia fraccional de Caputo

Sea $\mathbb{N}_\alpha = \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, y sea $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se define la α -ésima diferencia fraccional de x como

$$\Delta^{-\alpha} x_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-\alpha} (k - j + 1)^{(\alpha-1)} x_j, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_\alpha,$$

donde el símbolo $(s)^{(r)}$ es la función potencia fraccional definida como

$$(s)^{(r)} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-r+1)},$$

para todo $r, s \in \mathbb{R}$, y Γ es la función gama de Euler. Así, se define la diferencia fraccional de Caputo de x de orden $0 < \alpha < 1$ como

$$\Delta^\alpha x_k = \Delta^{-(1-\alpha)}(\Delta x_k), \quad k \in \mathbb{N}_{1-\alpha}, \quad (1)$$

donde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Utilizando la identidad

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}_0,$$

entonces (1) se puede escribir como

$$\Delta^\alpha x_{k+1-\alpha} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{\alpha}{k+1-j} x_j - (-1)^{k+1} \binom{\alpha-1}{k+1} x_0, \quad (2)$$

con $k \in \mathbb{N}_0$.

La siguiente representación la puede encontrar en Cermak et al. (2015).

Lemma 1. (Cermak et al. (2015)). El sistema discreto fraccional

$$\Delta^\alpha x_{k+1-\alpha} = Ax_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

es asintóticamente estable si, y solo si, el sistema discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=0}^k c_{k-j} x_j + g(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

es asintóticamente estable, con $c_r(\alpha) = (-1)^r \binom{\alpha}{r+1}$ y

$$g(k) = (-1)^{k+1} \binom{\alpha-1}{k+1} x_0,$$

donde x_0 es la condición inicial del sistema.

Aplicando la transformada de Z en el sistema (4), la serie convergente resultante arroja el siguiente resultado.

Theorem 2. (Cermak et al. (2015)). El sistema discreto-fraccional (4) bajo la condición inicial $x_0 = 0$, para $0 < \alpha < 1$, es asintóticamente estable si los ceros de la función $\det(\lambda I - A)$ están contenidos en \mathcal{D} , donde $\lambda = z(1 - z^{-1})^\alpha$.

Es importante observar que λ es solución de $\det[\lambda I - A] = 0$ si y solo si z es cero de $\det(z(1 - z^{-1})^\alpha I - A) = 0$.

Un alternativo criterio de estabilidad para (3), el cual se puede encontrar en Cermak et al. (2015), recae en el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S}^\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \varpi^\alpha \text{ y } |\arg z| > \frac{\alpha\pi}{2} \right\}, \quad (5)$$

con $\varpi^\alpha = \left[2 \cos \left(\frac{|\arg z| - \pi}{2 - \alpha} \right) \right]^\alpha$.

Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea $\sigma(A)$ el espectro o conjunto de valores propios de A . Considérese también el operador $\|\cdot\|$ una norma apropiada en \mathbb{R}^n . Así, el siguiente resultado se asegura.

Theorem 3. (Cermak et al. (2015)). El sistema (3) bajo la condición inicial $x_0 = 0$ es asintóticamente estable si $\sigma(A) \subset \mathcal{S}^\alpha$. En este caso, las soluciones de (3) tienden a cero algebraicamente (no exponencialmente), es decir

$$\|x_k\| = \mathcal{O}(k^{-\alpha}), \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

para cualquier solución x_k de (3).

Por otro lado, \mathcal{D}^α el interior de la región encerrada por la función $\lambda = z(1 - z^{-1})^\alpha$. Observe que el sistema (3) es estable si, y solo si, la ecuación característica $\det([z(1 - z^{-1})^\alpha I - A])$ tiene todos sus ceros en \mathcal{D}^α . Este resultado nos permite utilizar ambos conjuntos para establecer una caracterización de estabilidad más amplia de los sistemas EDF.

Theorem 4. (Cermak et al. (2015)). Se asegura la igualdad $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{S}^\alpha$ para $0 < \alpha < 1$.

En este sentido, z es cero de $\det(z(1 - z^{-1})^\alpha I - A) = 0$ si, y solo si, z está en \mathcal{S}^α .

En la figura 1 se observa cómo la función compleja $\lambda = \lambda(z)$ mapea a \mathcal{D} en $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{S}^\alpha$.

4. CONECTIVIDAD DE \mathcal{S}^α

El objetivo principal de esta sección es exhibir la conectividad de \mathcal{S}^α , a través de la construcción de una función monoparamétrica totalmente contenida en \mathcal{S}^α , la cual une a cualesquier par de polinomios α -Schur estables.

El primer paso es conectar las partes principales de lo que será la curva mediante el criterio que brinda el conjunto \mathcal{S}^α . El siguiente resultado nos provee de lo requerido.

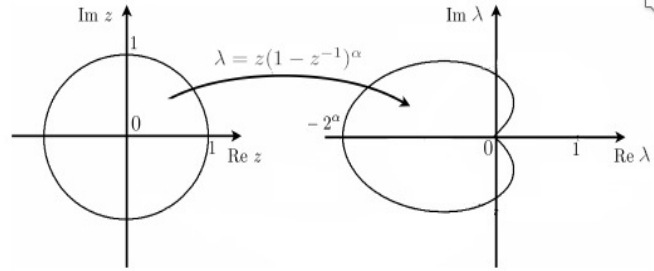


Fig. 1. Gráfica de los mapeos de las regiones de estabilidad para $\alpha = 0.6$. Ilustración tomada de Rafal Stanislawski and Krzysztof J. Latawiec (2013a).

Theorem 5. Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ un par de números complejos tales que $|\theta_j| > \alpha \frac{\pi}{2}$ y $r_j < \varpi$, para $j = 1, 2$, donde

$$\varpi = \max \left\{ \left[2 \cos \left(\frac{\theta_1 - \pi}{2 - \alpha} \right) \right]^\alpha, \left[2 \cos \left(\frac{\theta_2 - \pi}{2 - \alpha} \right) \right]^\alpha \right\},$$

entonces,

- (i) $|\Theta(\mu)| = |\mu\theta_2 + (1 - \mu)\theta_1| > \alpha \frac{\pi}{2}$,
- (ii) $R(\mu) = \mu r_2 + (1 - \mu)r_1 < \varpi$,

para toda $\mu \in [0, 1]$ y $\alpha \in (0, 1)$.

Proof. Para (i), se tiene que el intervalo abierto $\Theta_\alpha = (\alpha \frac{\pi}{2}, \alpha \frac{3\pi}{2})$ es un conjunto convexo en \mathbb{R} . Mientras que para (ii), si ϖ domina a r_1 y a r_2 , entonces domina al segmento de recta que los une.

Observación 1. Observe que si z_1 y z_2 son números reales, entonces $|\Theta(\mu)| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}$, para toda $\mu \in [0, 1]$, con $\alpha \in (0, 1)$. Además, $|z_1 - z_2| < \varpi = 2^\alpha$.

Además, con el objetivo de exhibir la \mathcal{S}^α -estabilidad en términos de las conexiones (i) y (ii), vamos a establecer el siguiente resultado.

Lemma 6. Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ números complejos tales que $|\theta_j| > \alpha \frac{\pi}{2}$ y $r_j < \varpi$, para $j = 1, 2$. Entonces,

$$z(\mu) = R(\mu)e^{i\Theta(\mu)} \in \mathcal{S}^\alpha,$$

para toda $\mu \in [0, 1]$ y $\alpha \in (0, 1)$.

Proof. Se sigue del hecho que $R(\mu)$ y $\Theta(\mu)$ satisfacen el teorema 5.

Esta serie de consecuencias inmediatas nos permite establecer un resultado más fuerte que envuelve a una familia sintética de polinomios, la cual se construye conectando los radios y los argumentos.

Theorem 7. Sean $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ y $w_j = \rho_j e^{i\phi_j}$ números complejos en \mathcal{S}^α , $j = 1, \dots, n$. Considere las funciones

$$\Theta_j(\mu) = \mu\phi_j + (1 - \mu)\theta_j,$$

$$R_j(\mu) = \mu\rho_j + (1 - \mu)r_j$$

y

$$\varpi_j = \max \left\{ \left[2 \cos \left(\frac{\theta_j - \pi}{2 - \alpha} \right) \right]^\alpha, \left[2 \cos \left(\frac{\phi_j - \pi}{2 - \alpha} \right) \right]^\alpha \right\},$$

con $\mu \in [0, 1]$. Suponga que $r_j, \rho_j < \varpi_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, for all $\mu \in [0, 1]$. Entonces, la familia

$$f(\lambda, \mu) = \prod_{j=1}^n [\lambda - R_j(\mu) e^{i\Theta_j(\mu)}]$$

es S^α -estable para toda $\mu \in [0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$.

Proof. Se sigue del teorema 5 y el lema 6.

5. APLICABILIDAD

Consideremos el sistema de control EDF

$$\Delta^\alpha x_{k+1-\alpha} = Ax_k + Bu_k, \quad (6)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $u \in \mathbb{R}^m$. La idea es utilizar las mismas técnicas de J.A. López-Rentería and B. Aguirre-Hernández and F. Verdusco (2017), aplicadas a polinomios de sistemas EDF. Así que, vamos a considerar a la pareja (A, B) de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así, consideremos un controlador monoparamétrico de la forma $u_k = -G^T(\mu)x_k$, con $G^T(\mu) = (g_n(\mu), \dots, g_1(\mu))^T - a^T$, donde $a^T = (a_n, \dots, a_1)^T$ es el vector de dirección de G . Por tanto, el sistema en lazo cerrado se escribe como

$$\Delta^\alpha x_{k+1-\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -g_n(\mu) & -g_{n-1}(\mu) & \cdots & -g_1(\mu) \end{bmatrix} x_k = A(\mu)x_k, \quad (7)$$

cuyo polinomio característico es la familia

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^n + g_1(\mu)\lambda^{n-1} + \cdots + g_n(\mu). \quad (8)$$

Utilizando la diferencia fraccional de Caputo de la ecuación (2), es posible escribir el sistema de control (7) como

$$x_{k+1} = A(\mu)x_k + \sum_{j=0}^{k-1} A_j(\alpha)x_{k-j}, \quad (9)$$

con $A_j(\alpha) = c_j(\alpha)I$, donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. El sistema (9) es un sistema de ecuaciones en diferencias con multi-retardos y, por tanto, el análisis debe ser tratado en forma especial. Debido a que los coeficientes $c_j(\alpha)$ tienden a cero cuando $j \rightarrow \infty$ a partir de un momento $J \in \mathbb{N}$, ésta es una cota para j y se le llamará la *longitud de implementación práctica*. Así que, es conveniente reescribir el sistema (9) como T. Kaczorek (2008)

$$x_{k+1} = A(\mu)x_k + \sum_{j=0}^N A_j(\alpha)x_{k-j}, \quad (10)$$

con $N = \min \{k - 1, J\}$.

Con toda la discusión anterior es posible establecer el siguiente resultado, el cual viene a ser el más importante de este trabajo.

Theorem 8. El sistema discreto con multi-retardo (10), con $0 < \alpha < 1$, es asintóticamente estable para toda $\mu \in [0, 1]$.

Proof. Si consideramos la función $f(\lambda, \mu)$ del teorema 7, entonces el sistema (9) tiene todos sus valores propios en S^α . Por tanto, por el lema 1 y el teorema 3, el sistema (7) es asintóticamente estable para toda $\mu \in [0, 1]$, con $0 < \alpha < 1$.

6. ESTABILIZANDO EL OSCILADOR DE DUFFING

El objetivo de esta sección es verificar el funcionamiento del controlador diseñado en la sección 5. Para eso, consideremos el oscilador de Duffin discreto-fraccional, dado por el sistema

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha x_{k+1-\alpha} &= y_k \\ \Delta^\alpha y_{k+1-\alpha} &= -\beta x_k - \delta y_k - \gamma x_k^3 + u_k \end{aligned} \quad (11)$$

donde β, δ y γ son números reales, y $u_k = (g_2(\mu), g_1(\mu))X_k$ es un controlador lineal escalar, $X_k = (x_k, y_k)^T$. El sistema si control admite tres puntos de equilibrio si $\beta\gamma < 0$ y solo un punto de equilibrio si $\beta\gamma \geq 0$ (ver Cermak et al. (2015)). Sin embargo, el origen siempre es punto de equilibrio y, dado que la idea es mostrar que el controlador diseñado funciona, se estabilizará el sistema alrededor del cero sin importar su tipo de estabilidad.

Suponga que queremos estabilizar desde los valores $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ hasta $w_1 = -\frac{7}{10}$ y $w_2 = -\frac{1}{3}$. Si tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $z_j, w_j \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}}$ y $\varpi_{1,2} = \sqrt{2} > |z_j|, |w_j|$, $j = 1, 2$. Ahora, $\Theta_j(\mu) = \pi$ para toda $\mu \in [0, 1]$, $j = 1, 2$. Además,

$$\begin{aligned} R_1(\mu) &= -\frac{7}{10}\mu - (1 - \mu), \\ R_2(\mu) &= -\frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}(1 - \mu), \end{aligned}$$

por lo que la familia

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^2 - [R_1(\mu) + R_2(\mu)]\lambda + R_1(\mu)R_2(\mu)$$

tiene sus raíces en $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}}$ para toda $\mu \in [0, 1]$. Definamos el vector

$$\begin{aligned} G^T(\mu) &= (g_1(\mu) - \beta, g_2(\mu) - \delta), \\ &= (-[R_1(\mu) + R_2(\mu)] - \beta, R_1(\mu)R_2(\mu) - \delta), \end{aligned}$$

para construir el controlador $u_k(\mu) = -G^T(\mu)X_k$. Entonces, el sistema discreto fraccional de Duffing (11) en lazo cerrado, con implementación práctica $N = 3$, se escribe como

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_2(\mu) & -g_1(\mu) \end{bmatrix} X_k - \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma x_k^3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$+ \sum_{j=0}^3 A_j\left(\frac{1}{2}\right) X_{k-j}, \quad (13)$$

donde $A_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}I$, $A_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}I$, $A_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}I$, $A_3(\frac{1}{2}) = \frac{15}{384}I$. Finalmente, se concluye que el oscilador de Duffing discreto fraccional (11), equivalente al sistema discreto (12), es asintóticamente estable para toda $\mu \in [0, 1]$.

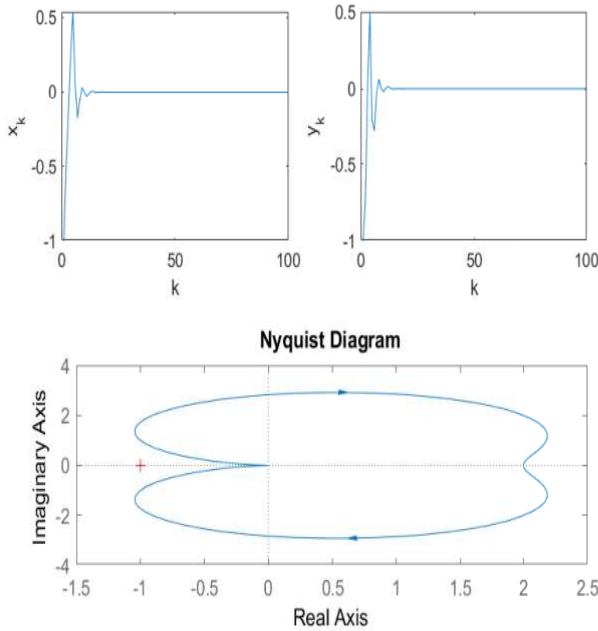


Fig. 2. Fase en los planos $k - x_k$ y $k - y_x$, con diagrama de Nyquist para $\mu = 0$.

En las figuras 2 y 3 se muestra la estabilidad para los valores en los extremos $\mu = 0$ y $\mu = 1$, mientras que en la figura 4 se muestra la estabilidad para el valor intermedio de $\mu = 0.5$.

Observación 2. Recordemos que la estabilización se realiza en una vecindad del origen, si cambiamos de punto de equilibrio, el sistema lineal podría cambiar, por lo que también cambiaría el vector de dirección del controlador.

7. CONCLUSIONES

Se mostró que a pesar de tener una zona de estabilidad no convexa, es posible conectar a un par de polinomios con todos sus ceros dentro de tal zona mediante un criterio explícito para obtener \mathcal{S}^α -estabilidad, para cualquier $0 < \alpha < 1$. Se aprovechó tal conexión de polinomios para diseñar un controlador monoparamétrico robustamente estabilizante, cuya utilidad se pudo corroborar mediante la estabilización del sistema discreto fraccional de Duffing.

ACKNOWLEDGEMENTS

López-Rentería Thanks to CONACyT for its received support as Chair Professor No. 366.

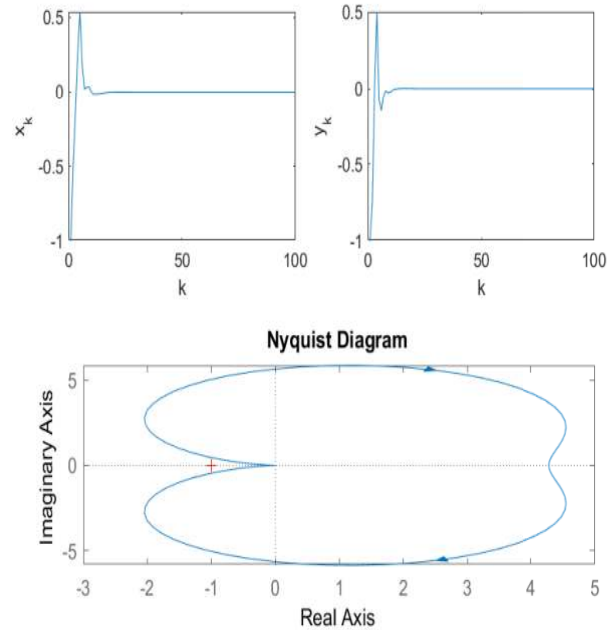


Fig. 3. Fase en los planos $k - x_k$ y $k - y_x$, con diagrama de Nyquist para $\mu = 1$.

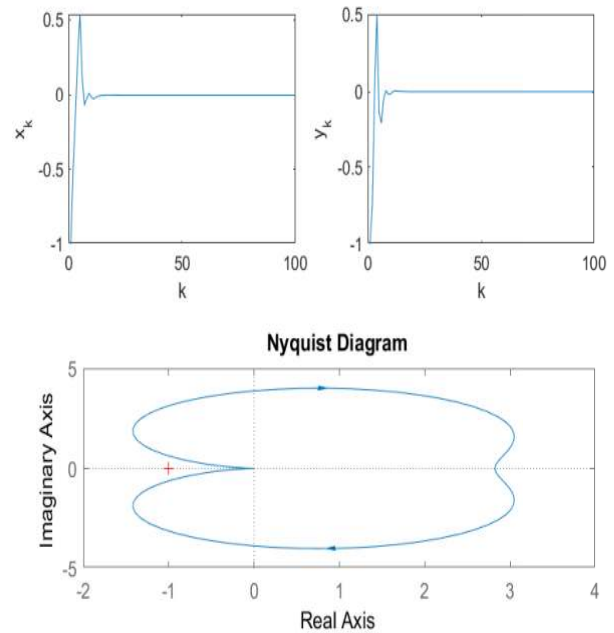


Fig. 4. Fase en los planos $k - x_k$ y $k - y_x$, con diagrama de Nyquist para $\mu = 0.5$.

REFERENCES

- (2005). *LMI Tools for Stability Analysis of Fractional Systems*, volume Volume 6: 5th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C of *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Long Beach,

- California, USA. doi:10.1115/DETC2005-85182.
- A.A. Kilbas and H.M. Srivastava and J.J. Trujillo (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Volume 204 (North-Holland Mathematics Studies)*. Elsevier Science Inc., USA.
- B. Senol and C. Yeroglu (2012). Robust Stability Analysis of Fractional Order Uncertain Polynomials. In *Proceedings of the 5th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, 1 – 6. Nanjing, China.
- Buśłowicz, M. and Kaczorek, T. (2009). Simple conditions for practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(2), 263–269.
- Buśłowicz, M (2010). Robust stability of positive discrete-time linear systems of fractional order. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 567–572.
- Cermak, J., Gyori, I., and Nechvatal, L. (2015). On explicit stability conditions for a linear fractional difference system. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 18(2), 651–672. doi:10.1515/fca-2015-0040.
- Christopher Goodrich and Allan C. Peterson (2015). *Discrete fractional calculus*. Springer Int. Pub., Switzerland. doi:10.1007/978-3-319-25562-0.
- D. Matignon (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, 963–968. Lille, France.
- D. Matignon (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. In *ESAIM: proceedings*, volume 5, 145–158. EDP Sciences.
- F. Mainardi (1997). Fractional calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, 291–348. Springer.
- Farges, C., Moze, M., and Sabatier, J. (2010). Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. *Automatica*, 46(10), 1730 – 1734. doi:https://doi.org/10.1016/j.automata.2010.06.038.
- I. Petráš (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer, Berlin, Heidelberg. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-642-18101-6.
- I. Podlubny (1999). *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198*. Academic Press, San Diego, Calif, USA.
- J.A. López-Rentería and B. Aguirre-Hernández and G. Fernández-Anaya (2019). LMI stability test for fractional order initialized control systems. *Applied and computational mathematics*, 18(1), 50 – 61.
- J.A. López-Rentería and B. Aguirre-Hernández and F. Verduzco (2017). Stable polynomial curves and some properties with application in control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 23(2), 869 – 889. doi:10.1007/s40590-016-0086-x.
- López-Rentería, J. and Fernández-Anaya, G. (2016). Robust stability by path-connectivity of fractional order polynomials. *Actas Applicandae Mathematicae*, 145, 1–14. doi:https://doi.org/10.1007/s10440-016-0047-4.
- R. Caponetto and G. Dongola and L. Fortuna and I. Petras (2010). *Fractional Order Systems*. WORLD SCIENTIFIC. doi:10.1142/7709.
- Rafal Stanislawski and Krzysztof J. Latawiec (2013a). Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part I: New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences-technical Sciences*, 61, 353–361.
- Rafal Stanislawski and Krzysztof J. Latawiec (2013b). Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part II: New stability criterion for FD-based systems. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences-technical Sciences*, 61, 363–370.
- Shantanu Das (2011). *Functional Fractional Calculus*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-20545-3.
- T. Kaczorek (2008). Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 56(4), 313–317.
- Tan, N., Ozguven, O.F., and Ozyetkin, M.M. (2009). Robust stability analysis of fractional order interval polynomials. *ISA Transactions*, 48(2), 166 – 172. doi:https://doi.org/10.1016/j.isatra.2009.01.002.