

Non-Lipschitz input membership functions that yield finite time convergence in sectorial fuzzy control^{*}

Jorge Villalobos-Chin^{*} Andres Pizarro-Lerma^{**}
V́ctor Santibáñez^{*} Ramón García-Hernández^{*}
Arturo Zavala-Río^{***}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de La Laguna,
Torreón, Coahuila 27000 México (e-mail:
rgarciah@correo.itlalaguna.edu.mx, vsantiba@itlalaguna.edu.mx,
santibanez@ieee.org, jorgevillaloboschin@hotmail.com)*
^{**} *Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora 85000 México
(e-mail: andres.pizarro@itson.edu.mx).*
^{***} *Intituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,
División de Matemáticas Aplicadas Paseo a la Presa San José 2055,
Lomas 4a. Sección 78216, San Luis Potosí, S.L.P., México
(email:azavala@ipicyt.edu.mx)*

Abstract: In this document a sectorial fuzzy controller with non-Lipschitz input membership functions is presented. The controller is shown to have a local homogeneity property that allows for finite time convergence of the tracking errors of a robot manipulator. Finally, a simulation of the proposed scheme is carried out.

Keywords: Fuzzy control, Robotic manipulators, Stability analysis, Continuous control, Fuzzy systems.

1. INTRODUCCIÓN

La convergencia en tiempo finito en el contexto de control continuo ha sido un tema de interés reciente. La homogeneidad local se ha utilizado recientemente para producir una serie de controladores continuos que proporcionan estabilidad en tiempo finito en robots manipuladores (Zamora-Gómez et al. (2018, 2019); Zavala-Río and Zamora-Gómez (2017)). Los controladores difusos se han estudiado ampliamente y existen algunos resultados con respecto a la estabilidad en tiempo finito de este tipo de controladores (Na et al. (2019); Rouhani and Erfanian (2018); Zirkohi (2019)). Calcev (1998) propuso originalmente un controlador difuso que posee una propiedad de pasividad, lo que facilitó considerablemente el análisis de estabilidad de los controladores difusos. Más tarde, esta metodología se aplicó a los robots manipuladores en Santibanez et al. (2004, 2005).

En este documento se presenta un controlador difuso sectorial que permite concluir convergencia en tiempo finito en un sistema mecánico. Esto se logra cambiando la función de membresía de entrada que corresponde a la entrada cero. Al convertirla en una función que no es Lipschitz, se demuestra que se satisface una propiedad de homogeneidad local, lo que permite la convergencia en tiempo finito. Según el mejor conocimiento del autor, esta es la primera instancia de control difuso continuo

que utiliza la estructura tradicional de Mandami con una modificación de las funciones de membresía de entrada para explotar las propiedades de la homogeneidad local y conseguir convergencia en tiempo finito sin ninguna estructura adicional (modos deslizantes u otro tipo de control discontinuo).

La principal ventaja de diseñar un controlador difuso que garantice convergencia en tiempo finito es el hecho de que este tipo de convergencia da robustez a la tarea de control Zamora-Gómez et al. (2020). Este beneficio se suma a los beneficios de utilizar un controlador difuso, como por ejemplo la síntesis del conocimiento de un experto en una ecuación de control mediante un procedimiento sencillo y prácticamente gráfico. Como se demuestra en el documento, es posible combinar estas ventajas utilizando las reglas de diseño tradicional para controladores difusos utilizando una función de membresía especial en las entradas.

En la sección 2, se presentan algunos conceptos relacionados a la homogeneidad local. Se presenta una reformulación de un resultado conocido en términos apropiados para ser aplicado al problema en cuestión. En la sección 3, se reintroduce el controlador difuso sectorial. La sección 4 revisa algunas propiedades bien conocidas del modelo dinámico de manipuladores de robots. En la sección 5, se presenta el controlador difuso con convergencia en tiempo finito para robots manipuladores. La sección 6 muestra resultados en simulación y la sección 7 contiene observaciones finales.

^{*} El trabajo fue parcialmente apoyado por CONACYT, proyectos TecNM y beca PRODEP ITSON-126.
Número Especial 2020

2. HOMOGENEIDAD LOCAL

En esta sección, recordamos algunos resultados importantes con respecto a la homogeneidad local. Como se define por Zavala-Rio and Fantoni (2014), la homogeneidad local se expresa en términos de una familia de dilataciones. $\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x}) = (\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0$ donde $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, con coeficientes positivos de dilatación r_1, \dots, r_n . Una vecindad del origen $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice δ_ε^r -conectada si para cada $\mathbf{x} \in D, \delta_\varepsilon^r(\mathbf{x}) \in D \forall \varepsilon \in (0, 1)$.

Definición 1. Dado un \mathbf{r} , una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente un campo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es localmente \mathbf{r} -homogéneo de grado α si existe una vecindad δ_ε^r -conectada del origen $D \subset \mathbb{R}^n$, llamada dominio de homogeneidad, tal que

$$V(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x})) = \varepsilon^\alpha V(\mathbf{x}), \quad (1)$$

respectivamente

$$\mathbf{f}(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x})) = \varepsilon^\alpha \delta_\varepsilon^r(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad (2)$$

para cada $\mathbf{x} \in D$ y toda $\varepsilon > 0$ tal que $\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x}) \in D$.

Se ha demostrado que la homogeneidad local es útil para garantizar la estabilidad global en tiempo finito (Zamora-Gómez et al. (2018, 2019); Zavala-Río and Zamora-Gómez (2017)).

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un campo vectorial continuo en una vecindad abierta $B_\beta \subset \mathbb{R}^n$ del origen y $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, e.g., el origen es un equilibrio de (3). Se denota $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ como una solución de (3) con condición inicial \mathbf{x}_0 .

Definición 2. Se dice que el origen es un equilibrio estable en tiempo finito (Bhat and Bernstein (2005)) de (3) si es estable en el sentido de Lyapunov y existe una vecindad abierta del origen, $\mathcal{N} \subseteq B_\beta$, y una función acotada $T : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, donde $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, llamada función de tiempo de establecimiento, tal que $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}, \forall t \in [0, T(\mathbf{x}_0)), \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$, y $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \forall t \geq T(\mathbf{x}_0)$. Se dice que el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito si $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$.

La estabilidad global en tiempo finito de un equilibrio puede caracterizarse mediante la noción de homogeneidad local como sigue.

Teorema 1. (Zavala-Rio and Fantoni (2014)). Supóngase que \mathbf{f} es un campo vectorial localmente \mathbf{r} -homogéneo de grado α con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito del sistema (3) si y solo si es globalmente asintóticamente estable y $\alpha < 0$.

Se ha demostrado que la estabilidad en tiempo finito se mantiene en el siguiente caso de aproximación. Considérese el campo vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Lema 1. (Zavala-Rio and Fantoni (2014)). Suponga que \mathbf{f} en (4) es un campo vectorial localmente \mathbf{r} -homogéneo de grado $\alpha < 0$, con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{0}$ es un equilibrio globalmente asintóticamente estable de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Entonces, el origen es un equilibrio estable en tiempo finito de (4) si

Número Especial 2020

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}_i(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x}))}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, \quad (5)$$

$\forall i \in 1, \dots, n, \forall \mathbf{x} \in S_c^{n-1}$, donde $S_c^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = c\}$ para alguna $c > 0$ y $S_c^{n-1} \subset D$.

Es posible mostrar que el Lema 1 se mantiene si $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tiene un equilibrio localmente asintóticamente estable en el origen.

Lema 2. Suponga que \mathbf{f} en (4) es un campo vectorial localmente \mathbf{r} -homogéneo de grado $\alpha < 0$, con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{0}$ es un equilibrio localmente asintóticamente estable de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Entonces, el origen es un equilibrio localmente estable en tiempo finito de (4) si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}_i(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x}))}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, \quad (6)$$

$\forall i \in 1, \dots, n, \forall \mathbf{x} \in S_c^{n-1}$, donde $S_c^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = c\}$ para algún arbitrariamente pequeño $c > 0$ y $S_c^{n-1} \subset D$.

3. CONTROL DIFUSO SECTORIAL

Un controlador difuso sectorial (SFC por sus siglas en inglés) puede ser caracterizado desde un punto de vista entrada-salida como un mapeo estático no lineal. Las propiedades de pasividad mostradas por Calcev (1998) facilitan el análisis de estabilidad de este tipo de controladores. Algunas propiedades del mapeo no lineal son presentadas en Calcev (1998) y Santibanez et al. (2005), y se presentan a continuación para el caso en el que el controlador tiene dos entradas y una salida:

- Propiedad 1, $\phi_i(0, 0) = 0$;
- Propiedad 2, $\phi_i(x_1, x_2) = -\phi_i(-x_1, -x_2)$
- Propiedad 3, $\phi_i(x_1, 0) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$;
- Propiedad 4, $|\phi_i(x_1, x_2)| \leq \delta := \max_{l_1, l_2} \bar{y}^{l_1, l_2}$;
- Propiedad 5, $\bar{y}^{k, 0} \leq |\phi_i(x_1, 0)| \leq \bar{y}^{k+1, 0}$;

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, donde $\bar{y}^{l_1, l_2}, \bar{y}^{k, 0}, \bar{y}^{k+1, 0}$ representa los centros de las funciones de membresía de salida.

La base de reglas difusas, para el caso de dos entradas x_1, x_2 , una salida y , consiste en una base de reglas IF-THEN (llamada R^{l_1, l_2}).

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{l_1} \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2^{l_2} \text{ THEN } y \text{ is } B^{l_1, l_2} \quad (7)$$

donde para cada conjunto difuso de entrada $A_i^{l_i}$ y cada conjunto difuso de salida B^{l_1, l_2} , existe una función de membresía de entrada $\mu_{A_i^{l_i}}(x_i)$ y una función de membresía de salida $\mu_{B^{l_1, l_2}}(y)$, respectivamente, con $l_i = -(N_i - 1)/2; \dots; -1; 0; 1; \dots; (N_i - 1)/2$, y $i = 1, 2$. N_1 es el número de conjuntos difusos para la entrada 1, y N_2 es el número de conjuntos difusos para la entrada 2. El número total de reglas difusas es $M = N_1 N_2$. La base de reglas difusas se ejemplifica en la Tabla 1.

Las reglas difusas se diseñan de la siguiente manera:

- (1) Dos entradas relacionadas a una sola salida.
- (2) Las reglas son simétricas respecto de cero, las variables de entrada y salida son cubiertas por un número impar de conjuntos difusos de entrada y salida.

Tabla 1. Tabla de reglas difusas

x_1/x_2	NB	NS	Z	PS	PB
NB	NB	NB	NS	Z	Z
NS	NB	NB	NS	Z	Z
Z	NS	NS	Z	PS	PS
PS	Z	Z	PS	PB	PB
PB	Z	Z	PS	PB	PB

- (3) Las funciones de membresía de los conjuntos difusos adyacentes son complementarias, de modo que cada valor de entrada pertenece a dos conjuntos difusos adyacentes con grados de membresía complementarios, es decir, la suma de los valores de membresía es uno (observe que solo se disparan un máximo de cuatro reglas en un momento dado)
- (4) Los conjuntos difusos para las funciones de membresía de entrada deben ser convexos en el sentido dado por (Calcev et al., 1998), pueden tener cualquier forma geométrica si satisfacen $\forall z \neq \omega \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\mu_{A_j^i}(\lambda z + [1 - \lambda]\omega) \geq \min \left\{ \mu_{A_j^i}(z), \mu_{A_j^i}(\omega) \right\}.$$

Para $\mu_{A_j^i}(x_j)$, alrededor de cero, la desigualdad anterior debe cumplirse estrictamente para garantizar la unicidad del estado de equilibrio para el sistema de control difuso. Por lo tanto, alrededor de cero no está permitido usar funciones de membresía trapezoidal.

- (5) La salida es nula para entradas nulas (el área central de la tabla de reglas difusas es cero).
- (6) Dentro de una fila, de la tabla de reglas difusas, los consecuentes de las reglas (acciones de control) aumentan gradualmente de izquierda a derecha, y dentro de una columna aumentan de arriba a abajo.
- (7) La salida se calcula mediante el defuzzificador de centro promedio, utilizando el método de inferencia mínima o de producto.

Seleccionando fuzzificación singleton, inferencia producto y defuzzificación de centro promedio, la salida puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{\sum_{l_1 = \frac{(N_1-1)}{2}}^{\frac{(N_1-1)}{2}} \sum_{l_2 = \frac{(N_2-1)}{2}}^{\frac{(N_2-1)}{2}} \bar{y}^{l_1, l_2} \left(\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^i}(x_i) \right)}{\sum_{l_1 = \frac{(N_1-1)}{2}}^{\frac{(N_1-1)}{2}} \sum_{l_2 = \frac{(N_2-1)}{2}}^{\frac{(N_2-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^i}(x_i) \right)}.$$

Como se muestra en Santibanez et al. (2004), la salida del sistema difuso puede ser expresada como

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{l_1 = -\frac{(N_1-1)}{2}}^{\frac{(N_1-1)}{2}} \sum_{l_2 = -\frac{(N_2-1)}{2}}^{\frac{(N_2-1)}{2}} \bar{y}^{l_1, l_2} \left(\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^i}(x_i) \right). \quad (8)$$

Dado que solamente cuatro reglas difusas se activan en cada momento (8) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= \mu_{A_1^k}^k(x_1) \mu_{A_2^m}^m(x_2) \bar{y}^{k,m} \\ &+ \mu_{A_1^{k+1}}^{k+1}(x_1) \mu_{A_2^m}^m(x_2) \bar{y}^{k+1,m} \\ &+ \mu_{A_1^k}^k(x_1) \mu_{A_2^{m+1}}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{k,m+1} \\ &+ \mu_{A_1^{k+1}}^{k+1}(x_1) \mu_{A_2^{m+1}}^{m+1}(x_2) \bar{y}^{k+1,m+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Esta forma será útil para la discusión presentada en este documento.

4. ROBOTS MANIPULADORES

La dinámica de un robot manipulador de n grados de libertad, puede ser descrita de la siguiente manera:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (10)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones angulares, $M(\mathbf{q})$ es la matriz de inercias, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares centrípetos y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales, y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de entrada.

Las siguientes suposiciones son válidas para robots manipuladores (Kelly et al. (2005)). Los eigenvalores máximos y mínimos de la matriz M se denotan por $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$ y $\lambda_{\text{Min}}\{M\}$ respectivamente. La norma de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se denota por $\|\mathbf{x}\|$.

Suposición 1. La matriz de inercias $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva. Por lo tanto, por el teorema de Rayleigh-Ritz, se mantiene que

$$\lambda_{\text{Min}}\{M(\mathbf{q})\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T M(\mathbf{q})\mathbf{x} \leq \lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\}\|\mathbf{x}\|^2, \quad (11)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Suposición 2. La matriz

$$\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (12)$$

(donde $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ fue obtenida mediante los coeficientes de Christoffel) es antisimétrica. También es cierto que

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (13)$$

5. SFC CON CONVERGENCIA EN TIEMPO FINITO PARA ROBOTS MANIPULADORES

El problema de control de movimiento en tiempo finito para los robots manipuladores se formula a continuación. Suponga que las posiciones articulares \mathbf{q} y las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$ están disponibles para la medición. Suponga que \mathbf{q}_d denota las posiciones articulares deseadas, y $\dot{\mathbf{q}}_d$, las velocidades articulares deseadas. Considere el vector $\mathbf{v} = [\mathbf{q}(t)^T, \dot{\mathbf{q}}(t)^T]^T$. La ley de control debe diseñarse de manera que existan $t_F(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}_{>0}$ de modo que $\mathbf{v} \neq [\mathbf{q}_d(t)^T, \dot{\mathbf{q}}_d(t)^T]^T$ para $t \leq t_F$ y $\mathbf{v} = [\mathbf{q}_d(t)^T, \dot{\mathbf{q}}_d(t)^T]^T$ para $t > t_F$.

Para resolver este problema, se recurre a la conocida ley de control par calculado, expuesta por ejemplo en (Kelly et al. (2005)), dada por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (14)$$

Como se hace en (Santibanez et al. (2004)), la parte PD del control se reemplaza por un sistema difuso, esto es,

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + \Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (15)$$

donde $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es un vector $n \times 1$ con elementos $\phi_i(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i)$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, son los mapeos entrada-salida del controlador difuso sectorial (SFC),

$$\Phi(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\tilde{q}_1, \dot{\tilde{q}}_1) \\ \phi_2(\tilde{q}_2, \dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \phi_n(\tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

La ecuación en lazo cerrado puede obtenerse al remplazar (15) en (10) para obtener

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

que tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0}$ para un controlador diseñado siguiendo las reglas presentadas en la sección 3 (Santibanez et al. (2004)).

Para lograr la convergencia de soluciones en tiempo finito del sistema en lazo cerrado, las funciones de membresía de entrada se diseñarán para satisfacer la propiedad de homogeneidad local para cada uno de los elementos del mapeo $\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$. Es decir, $\mu_{A_1}^0(x_1)$ y $\mu_{A_2}^0(x_2)$ se definirán de la siguiente manera:

$$\mu_{A_i}^0(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i < -P_{1i} \\ -f_i(x_i) + 1 & -P_{1i} \leq x_i < P_{1i} \\ 0 & x_i > P_{1i} \end{cases} \quad (18)$$

para alguna $P_{1i} > 0$, y $f_i(x_i)$ que son funciones r -homogéneas de grado $\alpha_i = 2r_2 - r_1 > 0 > r_2 - r_1$ para algunos coeficientes de dilatación r_i . Note que $f_i(x_i)$ debe satisfacer $f_i(x_i) = f_i(-x_i)$, $f_i(x_i) \geq 0$ para $-P_{1i} \leq x_i < P_{1i}$, y $f_i(0) = 0$, $f_i(x_i) \neq 0$, $\forall x_i \neq 0$. Así mismo, se debe satisfacer la propiedad de convexidad definida en la sección 3.

Teorema 2. Considere el sistema en lazo cerrado (17), sea $\Phi(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ un controlador difuso sectorial. Si $\mu_{A_i}^0(x_i)$ está definida como (18), entonces el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito.

Prueba. Se sabe que el origen es un equilibrio globalmente asintóticamente estable (Santibanez et al. (2004)). Queda probar que también es estable en tiempo finito. Para este propósito, note que para $0 \leq x_i < P_{1i}$, $\phi(x_1, x_2)$ puede ser escrito en términos de $f_i(x_i)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= (1 - \mu_{A_1}^0(x_1))\mu_{A_2}^0(x_2)\bar{y}^{1,0} \\ &+ \mu_{A_1}^0(x_1)(1 - \mu_{A_2}^0(x_2))\bar{y}^{0,1} \\ &+ (1 - \mu_{A_1}^0(x_1))(1 - \mu_{A_2}^0(x_2))\bar{y}^{1,1}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= f_1(x_1)\bar{y}^{1,0} + f_2(x_2)\bar{y}^{0,1} \\ &+ f_1(x_1)f_2(x_2)(\bar{y}^{1,0} + \bar{y}^{0,1} + \bar{y}^{1,1}). \end{aligned} \quad (20)$$

donde se utilizó el hecho de que por diseño $\bar{y}^{0,0} = 0$ y la suma de funciones de membresía adyacentes siempre es uno. Por simetría, y de la tabla de reglas difusas es posible ver que cerca del origen (17) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\mathbf{k}_a(\tilde{q})\text{sign}(\tilde{q})f_1(\tilde{q}) - \mathbf{k}_b(\dot{\tilde{q}})\text{sign}(\dot{\tilde{q}})f_2(\dot{\tilde{q}}) \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_c(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})(f_1(\tilde{q}) \odot f_2(\dot{\tilde{q}})) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

donde los elementos de las matrices diagonales \mathbf{k}_a , \mathbf{k}_b son constantes para un cuadrante dado y positivos dado que cada entrada x_i está asociada con una salida del mismo signo. Esta cualidad es capturada por la función signo. Note que, cerca del origen, ninguno de los valores correspondientes a estos términos es cero. De manera similar, los elementos de la matriz diagonal \mathbf{k}_c son constantes para

un cuadrante dado, por lo tanto, como la función signo, localmente homogéneos de grado 0. El producto elemento a elemento es indicado por el símbolo \odot (producto de Hadamard) y la función signo se define como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad (22)$$

y $\text{sign}(\mathbf{x})$ se usa para denotar

$$\text{sign}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sign}(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \text{sign}(x_n) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Para clarificar la notación, f_{1j} se refiere a la función $f_1(x_1)$ enunciada en (18) para el j -ésimo eslabón, y

$$\mathbf{f}_1(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\tilde{q}_1) \\ f_{12}(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ f_{1n}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

La misma notación es usada para \mathbf{f}_2 .

Ahora, considérese el campo vectorial $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$, con $\mathbf{x} = [\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T$ dado por

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\mathbf{k}_a(\tilde{q})\text{sign}(\tilde{q})\mathbf{f}_1(\tilde{q}) - \mathbf{k}_b(\dot{\tilde{q}})\text{sign}(\dot{\tilde{q}})\mathbf{f}_2(\dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

El sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ tiene un equilibrio asintóticamente estable en el origen. Esto se puede mostrar usando la siguiente función de Lyapunov,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{q}_i} k_{a_i}(\tau) f_{1i}(\tau) \text{sign}(\tau) d\tau \quad (26)$$

que es definida positiva dado que $f_{1i}(\tau)\text{sign}(\tau)\tau > 0$, $\forall \tau \neq 0$. La derivada temporal de (26) es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\dot{\tilde{q}}^T \mathbf{k}_b(\dot{\tilde{q}})\text{sign}(\dot{\tilde{q}})\mathbf{f}_2(\dot{\tilde{q}}), \quad (27)$$

que es semidefinida negativa. Esto implica estabilidad del origen. Dado que $f_i(0) = 0$, $f_i(x_i) \neq 0$, $\forall x_i \neq 0$ es posible utilizar la invariancia del conjunto límite de soluciones para asegurar que el origen es asintóticamente estable. Esto puede ser establecido utilizando los resultados presentados en (Michel et al. (2008)), válidos para situaciones donde el campo vectorial no es diferenciable en todo su dominio. Note que este resultado es únicamente local dado que (21) es solamente válida en una región cercana al origen.

Para analizar las propiedades de homogeneidad de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ considere los primeros n elementos, es decir, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} h_i(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x})) &= \varepsilon^{r_2 i} \dot{\tilde{q}}_i = \varepsilon^{r_2} \dot{\tilde{q}}_i = \varepsilon^{(r_2 - r_1) + r_1} \dot{\tilde{q}}_i \\ &= \varepsilon^{(r_2 - r_1) + r_1} h_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (28)$$

Los siguientes n elementos satisfacen

$$\begin{aligned} h_{n+i}(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x})) &= -k_a(\varepsilon^{r_1} \tilde{q}_i) \text{sign}(\varepsilon^{r_1} \tilde{q}_i) f_1(\varepsilon^{r_1} \tilde{q}_i) \\ &\quad - k_b(\varepsilon^{r_2} \dot{\tilde{q}}_i) \text{sign}(\varepsilon^{r_2} \dot{\tilde{q}}_i) f_2(\varepsilon^{r_2} \dot{\tilde{q}}_i) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} h_{n+i}(\delta_\varepsilon^r(\mathbf{x})) &= -\varepsilon^{\alpha_1} k_a(\tilde{q}_i) \text{sign}(\tilde{q}_i) f_1(\tilde{q}_i) \\ &\quad - \varepsilon^{\alpha_2} k_b(\dot{\tilde{q}}_i) \text{sign}(\dot{\tilde{q}}_i) f_2(\dot{\tilde{q}}_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Dado que $\alpha_i = 2r_2 - r_1$,

$$h_{n+i}(\delta_{\mathbf{e}}^r(\mathbf{x})) = -\varepsilon^{2r_2-r_1} (k_a(\tilde{q}_i)\text{sign}(\tilde{q})f_1(\tilde{q}) - k_b(\tilde{q})\text{sign}(\dot{\tilde{q}})f_2(\tilde{q})). \quad (31)$$

Finalmente,

$$h_{n+i}(\delta_{\mathbf{e}}^r(\mathbf{x})) = \varepsilon^{(r_2-r_1)+r_2} h_{n+i}(\mathbf{x}), \quad (32)$$

lo que implica que $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ es localmente homogéneo de grado $r_2 - r_1$.

Ahora, considere el campo vectorial

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_c(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})(\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{q}}) \circ \mathbf{f}_2(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Los primeros n elementos de $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ satisfacen trivialmente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\hat{h}_i(\delta_{\mathbf{e}}^r(\mathbf{x}))}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0. \quad (34)$$

Para los elementos restantes del vector es posible ver que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\hat{h}_i(\delta_{\mathbf{e}}^r(\mathbf{x}))}{\varepsilon^{k+r_i}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon^{\alpha_1+\alpha_2} \hat{h}_i(\mathbf{x})}{\varepsilon^{r_2-r_1+r_2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{2r_2-r_1} \hat{h}_i(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

para toda $x \in S_c^{n-1}$ y cualquier c tal que $S_c^{n-1} \in D$. Como consecuencia del Lema 2, el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito y el objetivo de control se cumple. \square

Una forma sencilla de definir la función de membresía central es seleccionando $f_i(x_i) = |x_i|^{\beta_i}$. Sea r_1 un coeficiente positivo de dilatación. Entonces, si r_2 se selecciona como $r_2 = \frac{r_1}{\gamma}$ para algún $\gamma > 0$ es posible probar que β_i puede ser seleccionada como

$$0 < \beta_1 < 1 \quad \text{and} \quad \beta_2 = 2 - \frac{2}{\beta_1 + 1}. \quad (36)$$

El resto de las funciones de membresía se puede seleccionar de la manera tradicional en la que se construyen los controladores SFC.

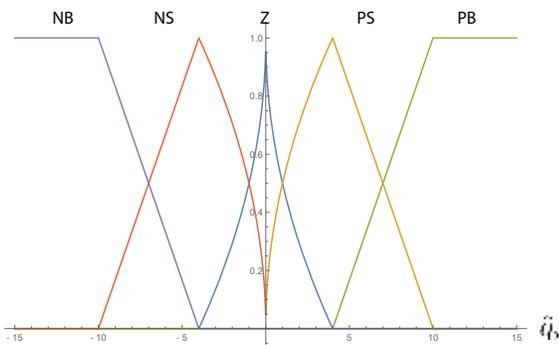


Fig. 1. Ejemplo de diseño de funciones de membresía para la entrada de error de posición en un eslabón.

La Figura 1 muestra un ejemplo de la forma en la que las funciones de membresía de entrada podrían ser seleccionadas.

6. APLICACIÓN A UN ROBOT DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

6.1 Descripción de un robot de dos grados de libertad

Para evaluar el controlador propuesto, se realizó una simulación utilizando Simulink, un robot manipulador de dos grados de libertad que se mueve en el plano vertical, construido en CICESE, México, y ubicado en el Instituto Tecnológico de La Laguna, México fue modelado (Reyes and Kelly (1997)). El robot manipulador consta de dos enlaces rígidos. Los actuadores son motores sin escobillas de alto par con transmisión directa. Los pares máximos que se pueden aplicar, según el fabricante, son 150 [N-m] para la junta 1 y 15 [N-m] para la junta 2.

El modelo dinámico del manipulador se puede expresar como se muestra en (10) con

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2, \\ M_{12}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{21}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(q, \dot{q}) &= 0, \\ g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(q) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

El controlador difuso aplicado fue seleccionado de la misma manera que en (Santibanez et al. (2005)) con la excepción de que $\mu_{A_i}^0(x_i)$ se seleccionó de acuerdo a (18). Se utilizaron las siguientes funciones

$$f_1(x_1) = \frac{1}{P_{11}^{0.6}} |x_1|^{0.6} \quad \text{and} \quad f_2(x_2) = \frac{1}{P_{11}^{0.75}} |x_1|^{0.75} |x_2|^{0.75}.$$

donde P_{1i} denota la primera partición para la entrada del i -ésimo eslabón.

Las posiciones deseadas $\mathbf{q}_d(t)$ están dadas por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} q_{1d}(t) &= a_1 + b_1(1 - e^{-2t^3}) + c_1(1 - e^{-2t^3})\text{sen}(\omega_1 t) \text{ [rad]} \\ q_{2d}(t) &= a_2 + b_2(1 - e^{-1.8t^3}) + c_2(1 - e^{-1.8t^3})\text{sen}(\omega_2 t) \text{ [rad]} \end{aligned}$$

donde $a_1 = \pi/2$ [rad], $b_1 = \pi/4$ [rad], $c_1 = \pi/18$ [rad] y $\omega_1 = 15$ [rad/s], $a_2 = \pi/2$ [rad], $b_2 = \pi/3$ [rad], $c_2 = 25\pi/36$ [rad] y $\omega_2 = 3.5$ [rad/s].

La Figura 2 muestra el comportamiento de los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$. Oscilaciones de alta frecuencia con una longitud igual al paso de simulación se observan en ambas figuras. Esto se debe al error de discretización intrínseco de la simulación. Este comportamiento se observa comúnmente cuando se resuelven numéricamente ecuaciones diferenciales que convergen en tiempo finito.

7. CONCLUSIONES

Se presenta un controlador sectorial difuso continuo tipo Mamdani que proporciona una respuesta en tiempo finito, junto con su metodología de diseño, prueba de

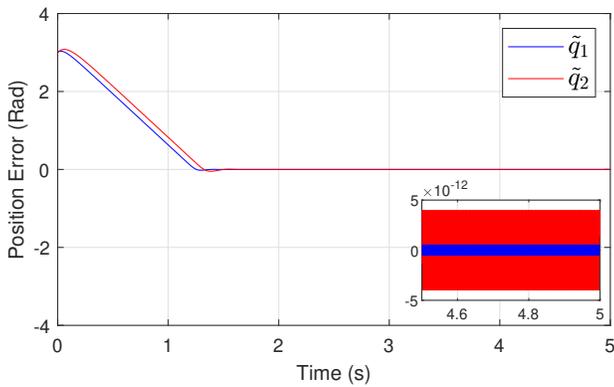


Fig. 2. Errores de posición para los eslabones 1 y 2

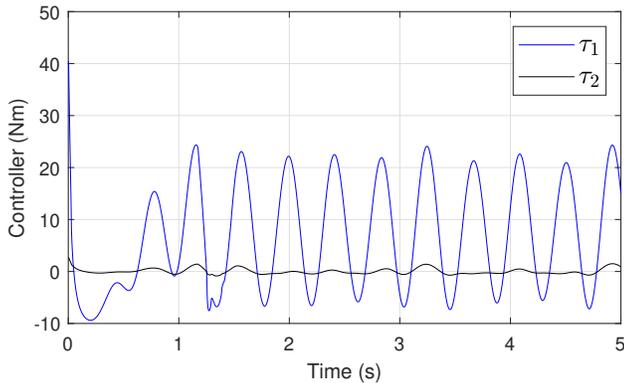


Fig. 3. Entrada de control para los eslabones 1 y 2

estabilidad y prueba de convergencia en tiempo finito. Se demostró que la convergencia de tiempo finito se puede lograr mediante el uso de la misma estructura antes reportada con la variante del uso de funciones de membresía de entrada que no son Lipschitz en el origen. La metodología utilizada, por el momento, no permite determinar una cota superior para el tiempo de convergencia. Sin embargo, este detalle está siendo investigado para futuras versiones del trabajo mediante el uso de una función estricta de Lyapunov.

REFERENCES

- Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17(2), 101–127. doi:10.1007/s00498-005-0151-x.
- Calcev, G. (1998). Some remarks on the stability of mamdani fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6, 436–442.
- Calcev, G., Gorez, R., and Neyer, M.D. (1998). Passivity approach to fuzzy control systems. *Automatica*, 34, 339–344.
- Kelly, R., Santibanez, V., and Loria, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag London Limited, Germany.
- Michel, A.N., Hou, L., and Liu, D. (2008). *Stability of dynamical systems: continuous, discontinuous, and discrete systems*. Birkhauser Boston.
- Na, J., Huang, Y., Wu, X., Su, S.F., and Li, G. (2019). Adaptive finite-time fuzzy control of nonlinear active suspension systems with input delay. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 1–12. doi:10.1109/tcyb.2019.2894724.
- Reyes, F. and Kelly, R. (1997). Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot. *Robotica*, 15(5), 563–571. doi:10.1017/s0263574797000659.
- Rouhani, E. and Erfanian, A. (2018). A finite-time adaptive fuzzy terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16(4), 1938–1950. doi:10.1007/s12555-017-0552-x.
- Santibanez, V., Kelly, R., and Llama, M. (2004). Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, 34, 710 – 718.
- Santibanez, V., Kelly, R., and Llama, M.A. (2005). A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13, 362–372.
- Zamora-Gómez, G.I., Zavala-Río, A., López-Araujo, D.J., Nuño, E., and Cruz-Zavala, E. (2018). Further advancements on the output-feedback global continuous control for the finite-time and exponential stabilisation of bounded-input mechanical systems: desired conservative-force compensation and experiments. *International Journal of Control*, 1–13. doi:10.1080/00207179.2018.1514533.
- Zamora-Gómez, G.I., Zavala-Río, A., López-Araujo, D.J., and Santibáñez, V. (2019). Further results on the global continuous control for finite-time and exponential stabilisation of constrained-input mechanical systems: desired conservative-force compensation and experiments. *IET Control Theory & Applications*, 13(2), 159–170. doi:10.1049/iet-cta.2018.5099.
- Zamora-Gómez, G.I., Zavala-Río, A., Vázquez-Ramírez, E., Reyes, F., and Santibáñez, V. (2020). A robustness study of a finite-time/exponential tracking continuous control scheme for constrained-input mechanical systems: Analysis and experiments. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(10), 3923–3944. doi:10.1002/rnc.4972.
- Zavala-Río, A. and Fantoni, I. (2014). Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2), 471–477. doi:10.1109/tac.2013.2272886.
- Zavala-Río, A. and Zamora-Gómez, G.I. (2017). Local-homogeneity-based global continuous control for mechanical systems with constrained inputs: finite-time and exponential stabilisation. *International Journal of Control*, 90(5), 1037–1051. doi:10.1080/00207179.2016.1198494.
- Zirkohi, M.M. (2019). Finite-time adaptive fuzzy backstepping control of drug dosage regimen in cancer treatment. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(12), 3526–3535. doi:10.1177/0142331219831328.