

Trajectory tracking control for a class of mechanical systems without velocity measurements

Octavio Oropeza* José Guadalupe Romero*

* *Departamento Académico de Sistemas Digitales, ITAM, Río Hondo 1, Progreso Tizapán, 01080, Ciudad de México, México, (e-mail: ooropeza{jose.romerovelazquez}@itam.mx)*

Abstract: In this note, we present a trajectory tracking control for a class of fully actuated mechanical systems without velocity measurements. The proposed controller is obtained in three steps. First, a globally convergent Immersion and Invariance velocity observer is designed. Second, the backstepping technique is used to design a full state feedback controller. Finally, combining the velocity observer and the controller, we obtain a control law that does not require the measurement of velocity. Thus, global convergence of the tracking error to zero is ensured. Realistic simulations illustrate the performance of the proposed controller.

Keywords: mechanical systems, velocity observers, stabilization, tracking control.

1. INTRODUCCION

El diseño de controladores que garanticen el seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo en sistemas mecánicos, sin utilizar la medición de velocidad—la cual en la práctica no esta disponible—ha sido estudio exhaustivamente a lo largo de las últimas cuatro décadas, por la comunidad científica de control y de robótica. Muchos resultados dotando al sistema de estabilidad semiglobal se pueden encontrar en la literatura, los cuales están basados en técnicas continuas, discontinuas y de altas ganancias (Bærhaug and Pettersen, 2006; Zergeroglu et al., 2000; Dixon et al., 2004). Para lograr resolver el problema antes mencionado, en la mayoría de las soluciones propuestas se encuentra el uso de observadores de velocidad. En (Xian et al., 2004) un observador discontinuo para sistemas mecánicos inciertos con trayectorias acotadas fue propuesto bajo el supuesto de que la dinámica es diferenciable. De esta forma, un controlador discontinuo con retransmisión de salida para una clase de sistema inciertos fue diseñado, logrando seguimiento asintótico semiglobal. En (Besançon, 2000) se propuso un controlador global de seguimiento de trayectoria con retroalimentación de salida para una clase de sistemas mecánicos, la cual, al utilizar un cambio de coordenadas sobre su matriz de inercias permitió eliminar los términos cruzados o cuadráticos en velocidad. Esta clase de sistemas son llamados *partially linearizable systems via coordinates changes* o PLvCC por sus siglas en ingles, para mayor información ver (Venkatraman et al., 2010). Recientemente, un control con retroalimentación de salida de sistemas Euler-Lagrange fue presentado en (Loria, 2015). El resultado utiliza un control dinámico lineal y una *derivada sucia* para reem-

plazar el uso de observadores de velocidad, logrando dotar al sistema a lazo cerrado de estabilidad asintótica global uniforme. En (Romero et al., 2015) fue propuesto un controlador con retroalimentación de posición para sistemas mecánicos representados en puertos Hamiltonianos (pH), utilizando un observador de velocidad —basado en la metodología de Inmersión e Invarianza (I&I) (Astolfi et al., 2007)—tal que, convergencia exponencial a cero del punto de equilibrio (en cero) del lazo cerrado fuera asegurada. Este es el primer resultado en la literatura estableciendo dicha propiedad sin asumir acotamientos de la velocidad. Es importante señalar que el observador de velocidad de dimension $3n + 1$ es el primero en asegurar convergencia exponencial (Astolfi et al., 2010).

Para contribuir al problema de diseño de controladores sin medición de velocidad en sistemas mecánicos, en esta nota proponemos un controlador/observador de estructura simple; para una clase de sistemas mecánicos que, utilizando un cambio de coordenadas la dinámica a lazo abierto no pueden ser transformada y eliminar sus términos giroscópicos como en (Venkatraman et al., 2010; Romero and Ortega, 2015). El observador es basado en la técnica de I&I y el controlador en la bien conocida metodología de Backstepping. De esta forma, convergencia a cero de los errores de observación y de los de seguimiento es asegurada.

El resto de la nota es estructura de la siguiente forma. En la Sección 2 la clase de sistemas a abordar y la formulación del problema son descritos. El diseño del observador es presentado en la Sección 3. Asumiendo que la posición y la velocidad son señales medibles, un controlador de seguimiento de trayectoria es presentado en la Sección

4. El resultado principal es formulado en la Sección 5 y simulaciones para su corroboración son descritas en la Sección 6. Finalmente, las conclusiones y trabajo a futuro son enunciados en la sección 7.

Notación. I_n es una matriz identidad de $n \times n$ y $0_{n \times s}$ una matriz de ceros de $n \times s$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S = S^T > 0$, se define la norma Euclidiana $|x|^2 := x^T x$ y la norma ponderada como $\|x\|_S^2 := x^T S x$. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos el operador diferencial $\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T$, $\nabla_{x_i} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^T$, en donde $x_i \in \mathbb{R}^p$ es un elemento del vector x .

2. UNA CLASE DE SISTEMAS MECÁNICOS Y LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección se define la clase de sistemas que serán abordados en la nota y la formulación del problema.

La familia de sistemas mecánicos a tratar en el documento tienen dos grados de libertad (GDL), son totalmente actuados y se utilizará el formalismo de Puertos Hamiltonianos (pH) para describir sus ecuaciones de movimiento. Así, la clase de sistema está dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

con función de energía

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + V(q). \quad (2)$$

En donde $q = \text{col}(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ representa las posiciones generalizadas y $p = \text{col}(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ es el momento generalizado, el cual de (1) es definido como $p = M(q)\dot{q}$. $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de inercias, la cual es definida positiva y simétrica y $V(q) \in \mathbb{R}$ es la energía potencial. Adicionalmente, los siguientes supuesto son utilizados para presentar el resultado principal.

A1. La matriz de inercias $M(q)$ es diagonal y depende únicamente de la coordenada q_2 . Adicionalmente, el elemento (2,2) de la matriz es constante. Así, la matriz $M(q_2)$ adquiere la forma

$$M(q_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1(q_2) & 0 \\ 0 & \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

con elementos positivos $\bar{M}_1(q_2)$ y \bar{M}_2 .

A2. Los momentos p del sistema son acotados.

Formulación del problema: Dado el sistema (1) bajo los supuesto **A1** y **A2**. Para toda referencia de trayectoria $q_d(t) \in \mathbb{R}^2$ doblemente diferenciable y diferenciable $p_d(t) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar (si es posible) un controlador dinámico con retroalimentación de posición que asegure convergencia a cero del sistema a lazo cerrado. En específico, existen dos mapeos (suaves)

$$\begin{aligned} \mathbf{O} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{C} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

tal que, para todas las condiciones iniciales

$$(q(t_0), p(t_0), \Xi(t_0)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

el sistema (1) en lazo cerrado con

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{C}(q, \Xi, t) \\ \dot{\Xi} &= \mathbf{O}(q, \Xi, t) \end{aligned}$$

verifique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q(t) - q_d(t) \\ p(t) - p_d(t) \\ \Xi(t) - p(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Observación 1. En (Venkatraman et al., 2010) se demostró que para sistemas mecánicos con matriz de inercias como (3), no existe un cambio de coordenadas que permita eliminar los términos giroscópicos (cuadrados en velocidad) del modelo dinámico, por lo que no pertenecen a la clase PLvCC (por sus siglas en ingles Partially Linearizable via Coordinantes Change) y un observador lineal en velocidad no puede ser diseñado.

3. DISEÑO DE UN OBSERVADOR DE VELOCIDAD

Siguiendo (Romero et al., 2020), en esta sección presentamos un observador de velocidad o equivalentemente para p del sistema (3), utilizando la técnica de Inmersión e Invarianza.

Podemos notar que del supuesto **A1**, el sistema (3) toma la forma

$$\dot{q}_1 = p_1 \bar{M}_1(q_2) \quad (5)$$

$$\dot{q}_2 = p_2 \bar{M}_2 \quad (6)$$

$$\dot{p}_1 = -\nabla_{q_1} V(q) + u_1 \quad (7)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{1}{2} p_1^2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) - \nabla_{q_2} V(q_2) + u_2. \quad (8)$$

Claramente, las dinámicas de los momentos están en cascada. Esto nos permitirá diseñar un observador de baja dimensión, el cual es descrito en la siguiente Proposición.

Proposition 1. Considere el sistema (5)–(8) verificando

A2. El observador

$$\dot{p}_{1I} = -\lambda_1 \hat{p}_1 \bar{M}_1(q_2) - \nabla_{q_1} V(q) + u_1 \quad (9)$$

$$\dot{p}_{2I} = -\lambda_2 \hat{p}_2 \bar{M}_2 - \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) - \nabla_{q_2} V(q) + u_2 \quad (10)$$

$$\hat{p}_1 = p_{1I} + \lambda_1 q_1 \quad (11)$$

$$\hat{p}_2 = p_{2I} + \lambda_2 q_2 \quad (12)$$

con parámetros libres λ_1 y λ_2 , asegura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_1 - p_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_2 - p_2 = 0$$

para todas las condiciones iniciales de q , p , p_{1I} y p_{2I} .

Proof 1. Se definen los errores del observador como

$$\bar{p}_1 = \hat{p}_1 - p_1 \quad (13)$$

$$\bar{p}_2 = \hat{p}_2 - p_2 \quad (14)$$

con estimadores

$$\hat{p}_1 = p_{1I} + p_{1P}(q_1)$$

$$\hat{p}_2 = p_{2I} + p_{2P}(q_2),$$

los cuales serán definidos más adelante.¹

Primero, estudiaremos el comportamiento dinámico de \bar{p}_1 . Al tomar su deriva respecto al tiempo queda

$$\dot{\bar{p}}_1 = \dot{p}_{1I} + \nabla_{q_1} p_{1P}(q_1) \dot{q}_1 - \dot{p}_1, \quad (15)$$

utilizando (5), (7) y (13) resulta

$$\dot{\bar{p}}_1 = \dot{p}_{1I} + \nabla_{q_1} p_{1P}(q_1) \left(\bar{M}_1(\hat{p}_1 - \bar{p}_1) \right) - \left(u_1 - \nabla_{q_1} V \right), \quad (16)$$

proponiendo \dot{p}_{1I} como (9) con $p_{1P} = \lambda_1 q_1$, la dinámica del error (16) toma la forma

$$\dot{\bar{p}}_1 = -\lambda_1 \bar{p}_1 \bar{M}_1(q_2). \quad (17)$$

Para analizar su estabilidad, proponemos la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \bar{p}_1^2. \quad (18)$$

Al tomar su derivada respecto al tiempo, a lo largo de (17) obtenemos

$$\dot{V}_1 = -\lambda_1 \bar{p}_1^2 \bar{M}_1(q_2), \quad (19)$$

por lo que podemos concluir que $\bar{p}_1 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$.

Ahora, analizaremos el comportamiento dinámico de \bar{p}_2 . Su derivada respecto al tiempo resulta ser

$$\dot{\bar{p}}_2 = \dot{p}_{2I} + \nabla_{q_2} p_{2P}(q_2) \dot{q}_2 - \dot{p}_2, \quad (20)$$

utilizando (6), (8), (13) y (14) en (20), la dinámica del error toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}_2 &= \dot{p}_{2I} + \nabla_{q_2} p_{2P}(q_2) \bar{M}_2(\hat{p}_2 - \bar{p}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} p_1^2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) + \nabla_{q_2} V - u_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Podemos notar que el término cuadrático p_1^2 puede descomponerse como

$$p_1^2 = (\hat{p}_1 - \bar{p}_1)^2 = \hat{p}_1^2 - 2\hat{p}_1\bar{p}_1 + \bar{p}_1^2 = \hat{p}_1^2 - (\bar{p}_1 + 2p_1)\bar{p}_1, \quad (22)$$

el cual al ser reemplazo en (21) y eligiendo \dot{p}_{2I} como (10) y $p_{2P} = \lambda_2 q_2$, la dinámica del error (21) es

$$\dot{\bar{p}}_2 = -\lambda_2 \bar{p}_2 \bar{M}_2 - \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) (\bar{p}_1 + 2p_1) \bar{p}_1. \quad (23)$$

Para analizar su estabilidad, proponemos la siguiente función de Lyapunov

$$V_2 = \delta \frac{1}{2} \bar{p}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{p}_2^2 \quad (24)$$

con δ un parámetro libre. Entonces, obteniendo su derivada en el tiempo a lo largo de las trayectorias de (17) y (23) obtenemos

$$\dot{V}_2 = -\bar{p}^\top \begin{bmatrix} \delta \lambda_1 \bar{M}_1(q_2) & \frac{1}{2} \mathcal{D}(t) \\ \frac{1}{2} \mathcal{D}(t) & \lambda_2 \bar{M}_2 \end{bmatrix} \bar{p} := \bar{p}^\top \mathcal{Q}(t) \bar{p} \quad (25)$$

con $\bar{p} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2]^\top$ y

$$\mathcal{D}(t) = (\bar{p}_1 + 2p_1) \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2). \quad (26)$$

Podemos notar del Supuesto **A2** que las trayectorias de la planta son acotadas, y ya que los sub-sistemas (17) y (23) son estables entonces \hat{p}_1 es además acotado. Lo cual implica que $\mathcal{D}(t)$ es también acotado. Usando el

¹ Por cuestiones de espacio, algunos argumentos serán omitidos a partir de ahora.

complemento de Schur, podemos concluir que la matriz \mathcal{Q} es definida positiva si $\lambda_2 \bar{M}_2 - \frac{1}{4\delta\lambda_1} \mathcal{D}^2 \bar{M}_1^{-1} > 0$. Esto se puede satisfacer para cualquier cota de $\mathcal{D}(t)$ y seleccionando una δ grande. Entonces, $\dot{V}_2 \leq -\lambda_x |\bar{p}|^2$, en donde λ_x es el mínimo eigenvalor de \mathcal{Q} , tal que, \dot{V}_2 es semidefinida negativa y se puede concluir que $\bar{p} \in \mathcal{L}_\infty$. Finalmente, utilizando el Lema de Barbalat aseguramos que $\bar{p} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. $\square \square \square$

4. CONTROLADOR DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

En esta sección se presenta un controlador globalmente exponencialmente convergente utilizando la bien conocida técnica de Backstepping.

Proposition 2. Considere el pH sistema (5)–(8). Defina el mapeo $v^* = \text{col}(v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 \left(k_1 \bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1 - \bar{M}_1(q_2) \tilde{p}_1 \right) + \dot{q}_{1d} p_2 \bar{M}_2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1^{-1} \\ &\quad + \tilde{q}_{1d} \bar{M}_1^{-1}(q_2) - \bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1 - k_2 \tilde{p}_1 + \nabla_{q_1} V \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{2} \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) p_1^2 + \nabla_{q_2} V - \gamma_1 (-\gamma_1 \bar{M}_2 \tilde{q}_2 + \bar{M}_2 \tilde{p}_2) \\ &\quad + \bar{M}_2^{-1} \dot{q}_{2d} - \bar{M}_2 \tilde{q}_2 - \gamma_2 \tilde{p}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

con $q_{1d}, q_{2d} \in \mathcal{C}^2$ como las trayectorias de referencia deseadas y k_1, k_2, γ_1 y γ_2 ganancias libres, positivas y constantes.

- (i) Usando el procedimiento estándar de Backstepping, se obtienen los siguientes dos lazos cerrados

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \bar{M}_1(q_2) & \bar{M}_1(q_2) \\ -\bar{M}_1(q_2) & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \bar{M}_2 & \bar{M}_2 \\ -\bar{M}_2 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

con errores de seguimiento de la siguiente manera

$$\tilde{q}_1 = q_1 - q_{1d}, \quad \tilde{q}_2 = q_2 - q_{2d} \quad (31)$$

$$\tilde{p}_1 = p_1 - p_{1d}, \quad \tilde{p}_2 = p_2 - p_{2d}. \quad (32)$$

- (i) El punto de equilibrio cero de (29) y (30) es globalmente exponencialmente estable (GES) con funciones de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}_1^2 \quad (33)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}_2^2. \quad (34)$$

Como consecuencia, $(\tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) \rightarrow 0$ exponencialmente rápido.

Proof 2. (i) Siguiendo la metodología de Backstepping, definimos

$$p_1 = -k_1 \tilde{q}_1 + \tilde{p}_1 + \bar{M}_1^{-1}(q_2) \dot{q}_{1d}, \quad (35)$$

al reemplazarla en (5); y notando de la primera ecuación de (31) que $\tilde{q}_1 = q_1 - q_{1d}$, tenemos que (5) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\dot{\tilde{q}}_1 = -k_1 \bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1 + \bar{M}_1(q_2) \tilde{p}_1 \quad (36)$$

que corresponde a la primer ecuación de (29). Por otra parte, (35) puede reescribirse como

$$\tilde{p}_1 = p_1 + k_1 \tilde{q}_1 - \bar{M}_1^{-1}(q_2) \dot{q}_{1d},$$

al tomar su derivada respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias (6) resulta

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_1 &= \dot{p}_1 + k_1 \dot{\tilde{q}}_1 - \nabla_{q_2} \bar{M}_1^{-1}(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_{1d} - \bar{M}_1^{-1}(q_2) \ddot{q}_{1d} \\ &= -\nabla_{q_1} V + u_1 + k_1 \left(-k_1 \bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1 + \bar{M}_1(q_2) \tilde{p}_1 \right) \\ &\quad - \nabla_{q_2} \bar{M}_1^{-1}(q_2) p_2 \bar{M}_2 \dot{q}_{1d} - \bar{M}_1^{-1}(q_2) \ddot{q}_{1d}. \end{aligned} \quad (37)$$

Para obtener la segunda igualdad, hemos utilizado (5), (6) y (36). Ahora, al reemplazar el controlador v_1 dado por (27) obtenemos

$$\dot{\tilde{p}}_1 = -\bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1 - k_2 \tilde{p}_1, \quad (38)$$

que corresponde a la segunda igualdad de (29).

La prueba del lazo cerrado (30) se obtiene imitando el procedimiento realizado a partir de la definición (35) pero utilizando la dinámica (8), el controlador (28) y la definición de Backstepping

$$p_2 = -\gamma_1 \tilde{q}_2 + \tilde{p}_2 + \bar{M}_2^{-1} \dot{q}_{2d}.$$

Para probar (ii), primero tomamos la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov (33) a lo largo de las trayectorias del sistema del lazo cerrado (29), resultando

$$\dot{V}_1(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) = -k_1 \bar{M}_1(q_2) \tilde{q}_1^2 - k_2 \tilde{p}_1^2 \leq -\kappa_1 V_1(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$$

con $\kappa_1 := 2 \min \{ \lambda_{\min}[k_1 \bar{M}_1(q_2)], \lambda_{\min}[k_2] \}$. Asegurando la convergencia exponencial a cero de $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$.

Ahora, tomamos la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov (34) a lo largo de las trayectorias del lazo cerrado (30) y obtenemos

$$\dot{V}_2(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2) = -\gamma_1 \bar{M}_2 \tilde{q}_2^2 - \gamma_2 \tilde{p}_2^2 \leq \kappa_2 V_2(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2) \quad (39)$$

con $\kappa_2 = 2 \min \{ \lambda_{\min}(\gamma_1), \lambda_{\min}(\gamma_2) \}$. Por lo que la convergencia a cero de forma exponencial y (rápida) de los errores de seguimiento $(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ es establecida. $\square \square$

5. RESULTADO PRINCIPAL

La versión de un controlador dependiendo unicamente del estado medible q utilizando los mapeos v_1 y v_2 se puede obtener al reemplazar p por su estimado \hat{p} , generado con el observador de la Sección 3. De esta forma, un controlador u que no depende de la medición de velocidades para el sistema (5)–(8) es dado por

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 \left(k_1 \bar{M}_1 \tilde{q}_1 - \bar{M}_1(\hat{p}_1 - p_{1d}) \right) + \ddot{q}_{1d} \bar{M}_1^{-1} - \bar{M}_1 \tilde{q}_1 \\ &\quad - k_2(\hat{p}_1 - p_{1d}) + \dot{q}_{1d} \bar{M}_2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1^{-1} \hat{p}_2 + \nabla_{q_1} V \quad (40) \\ u_2 &= \frac{1}{2} \nabla_{q_2} \bar{M}_1(q_2) \hat{p}_1^2 - \gamma_1(-\gamma_1 \bar{M}_2 \tilde{q}_2 + \bar{M}_2(\hat{p}_2 - p_{2d})) \\ &\quad + \bar{M}_2^{-1} \ddot{q}_{2d} - \bar{M}_2 \tilde{q}_2 + \nabla_{q_2} V - \gamma_2(\hat{p}_2 - p_{2d}). \end{aligned} \quad (41)$$

Podemos notar que la mayoría de los términos son lineales en \hat{p} , a excepción del primero en u_2 . Realizando un reacomodo de señales para \hat{p}_1^2 como en (22), tendríamos que $\hat{p}_1^2 = p_1^2 + \bar{p}(2p_1 + \bar{p}_1)$. Además, usando los errores de

observación (13) y (14) las señales de control (40) y (41) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \Gamma(q_1, \bar{p}_1, \bar{p}_2, t). \\ u_2 &= v_2 + \Omega(q_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, t) \end{aligned} \quad (42)$$

con

$$\Gamma(\cdot) = \dot{q}_{1d} \bar{M}_2 \nabla_{q_2} \bar{M}_1^{-1} \bar{p}_2 - (k_1 \bar{M}_1(q_2) + k_2) \bar{p}_1 \quad (43)$$

$$\Omega(\cdot) = \frac{1}{2} \mathcal{D}(t) \bar{p}_1 - (\gamma_1 \bar{M}_2 + \gamma_2) \bar{p}_2. \quad (44)$$

y $\mathcal{D}(t)$ definida en (26).

En este momento, estamos en posición de mostrar nuestro resultado principal, el cual es descrito en la siguiente proposición.

Proposition 3. Considere el sistema (5)–(8) verificando el Supuesto **A2**. Entonces, en lazo cerrado con el controlador de retralimentación de posición (40) y (41) con estimadores de velocidad \hat{p}_1 y \hat{p}_2 establecidos en la Proposición 1 se asegura que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} q - q_d &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p - p_d &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

para todas las condiciones iniciales $(q(t), p(t), \hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t))$.

Proof 3. Como hemos mostrado, los controladores (40) y (41) son equivalentes a (42), por lo que al reemplazarlo en (7) y (8) obtenemos los lazos cerrados de la Proposición 2, con perturbaciones de entrada dadas por (43) y (44), como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \bar{M}_1(q_2) & \bar{M}_1(q_2) \\ -\bar{M}_1(q_2) & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma(\cdot) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \bar{M}_2 & \bar{M}_2 \\ -\bar{M}_2 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (47)$$

De la Proposición 1 se asegura la convergencia exponencial a cero de los errores de estimación \bar{p}_1 y \bar{p}_2 . Ahora, los lazos cerrados (46) y (47) sin perturbaciones, que es, fijando $\Gamma(\cdot)$ y $\Omega(\cdot)$ a cero preservan las propiedades establecidas en la Proposición 2, que es, convergencia exponencial a cero de los errores de seguimiento \tilde{q} y \tilde{p} . Debido a que $\mathcal{D}(t)$ es acotado, podemos invocar argumentos en cascada, y utilizar el Lema de Barbalat para establecer (45). $\square \square \square$

6. SIMULACIONES

En esta sección se muestran las simulaciones realizadas para verifica el resultado principal. Se utiliza un robot manipulador de dos GDL, revoluta–revoluta (RR) como el que se muestra en la figura 1. La matriz de inercias que verifica el supuesto **A1** tiene elementos

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{a_1 + a_2 (1 - \sin^2(q_2)) + a_3 \sin^2(q_2)}, \quad \bar{M}_2 = \frac{1}{a_2}$$

y energía potencial

$$V(q_2) = g(m_1 \sigma_1 + m_2(d_1 + \sigma_2 \sin_2))$$

con $a_1 = I_{12} + I_{22}$, $a_2 = m_2 \sigma_2^2$, $a_3 = I_{21} - I_{22}$. Los valores de los parámetros se pueden apreciar en la siguiente

tabla.² Las trayectorias angulares deseadas q_d utilizadas en la simulación fueron las siguientes

$$\begin{aligned} q_d &:= [b_1 \sin(\omega t), b_2 \cos(\omega t)], \\ \dot{q}_d &:= [b_1 \omega \cos(\omega t), -b_2 \omega \sin(\omega t)], \\ \ddot{q}_d &:= [-b_1 \omega^2 \sin(\omega t), -b_2 \omega^2 \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

con $b_1 = 0.4$, $b_2 = 0.5$ y $\omega = 0.2$.

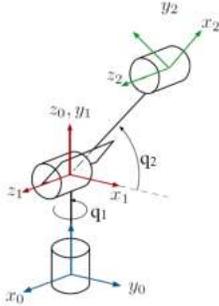


Fig. 1. Asignación de los sistemas coordenados y ángulos de giro.

Las ganancias utilizadas para el observador fueron $\lambda_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\lambda_2 = 5 \times 10^{-4}$ y para el controlador $k_1 = k_2 = 10$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$. Las condiciones iniciales $[q(0), p(0), p_{1I}, p_{2I}] = [(0.001, 0.499), (0, 0), 0, 0]$.

Parámetros del sistema		
Símbolo	Descripción	Valor
a_2	Distancia entre la intersección Z_1 y X_2 con O_2 [m]	0.135
d_1	La distancia entre O_0 y la intersección de Z_0 y X_1 [m]	0.127
σ_1	La distancia entre centro del primer eslabón y la intersección de Z_0 y X_1 [m]	0.06
σ_2	La distancia de intersectar Z_1 y X_2 con el centro del segundo eslabón [m]	0.07
m_1	La masa del primer eslabón [kg]	0.1
m_2	La masa del segundo eslabón [kg]	0.1
g	Fuerza de gravedad [m/s^2]	9.81
I_{11}, I_{12}	Valor de inercia del eslabón 1	0.1344×10^{-3}
I_{21}, I_{22}	Valor de inercia del sistema 2	0.1518×10^{-3}

Table 1. Parámetros del sistema

De acuerdo con la teoría, tenemos que la convergencia de \tilde{p}_1 debe ser más rápida en comparación con \tilde{p}_2 . La Figura 2 nos corrobora este hecho. La convergencia de los errores de seguimiento se aprecian en las Figuras 3-4 los cuales presentan un excelente desempeño. Claramente, el efecto de la cascada entre el lazo cerrado y la dinámica de los errores de observación no genera oscilaciones o sobresaltos, esto se debe a la rápida convergencia de los errores de observación. La Figura 5 muestra el comportamiento de la señal de control. El rango de valores no

² Los parámetros son un aproximado para los primeros dos grados de libertad del robot Touch Haptic Device.

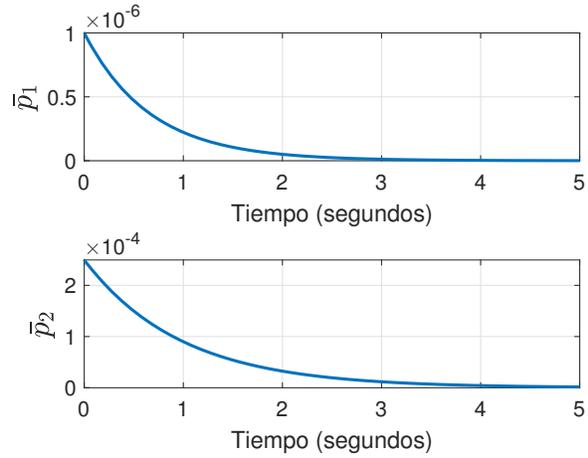


Fig. 2. Comportamiento de los errores de observación \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 .

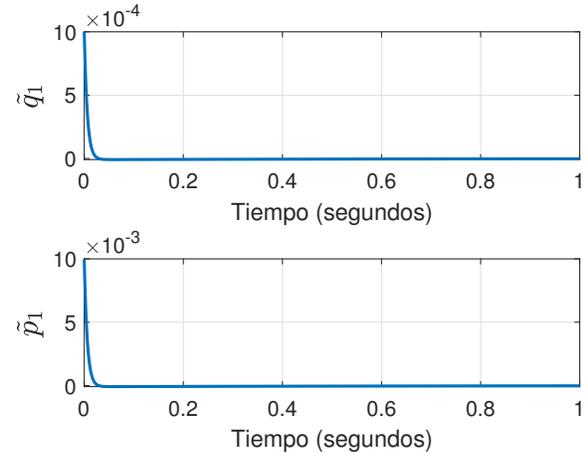


Fig. 3. Comportamiento de los errores de seguimiento \tilde{q}_1 y \tilde{p}_1 .

sobrepasan los que puede entregar el robot Touch Haptic Device utilizando al utilizar sus dos primeros eslabones. Finalmente, la Figura 6 despliega un acercamiento del desempeño de los controladores.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta nota se presentó un controlador con retroalimentación de posición para asegurar el seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo, para una clase de sistemas mecánicos. Esta clase de sistemas, resulta ser no linealizable, en el sentido de que no se pueden eliminar sus términos giroscópicos o cuadráticos en velocidad (Venkatraman et al., 2010). El controlador fue diseñado combinando un observador de velocidad utilizando la técnica de Inmersión e Invarianza y un controlador a la Backstepping. El sistema resultante es una cascada entre la dinámica del error del observador y la del error de seguimiento, lo que proporcionó establecer de forma

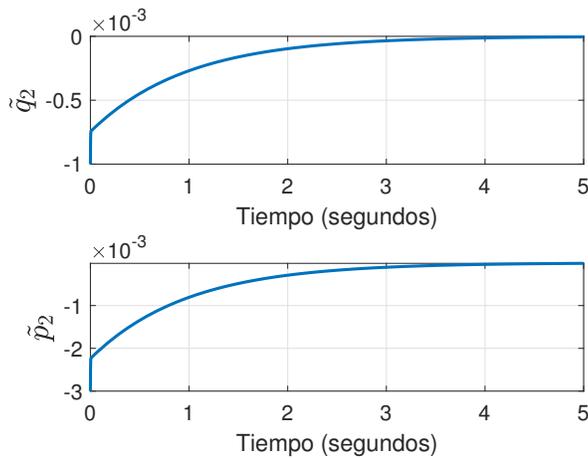


Fig. 4. Comportamiento de los errores de seguimiento \tilde{q}_2 y \tilde{p}_2 .

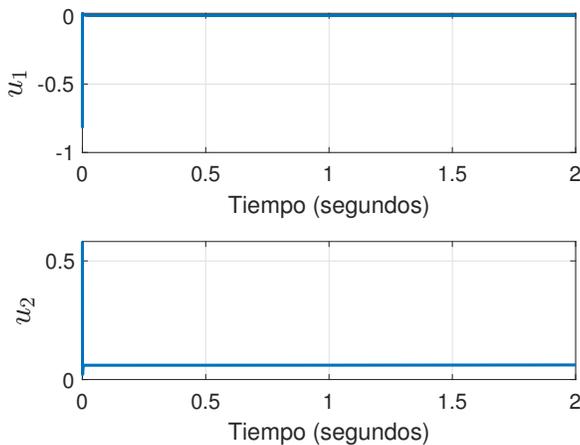


Fig. 5. Comportamiento de entradas de control.

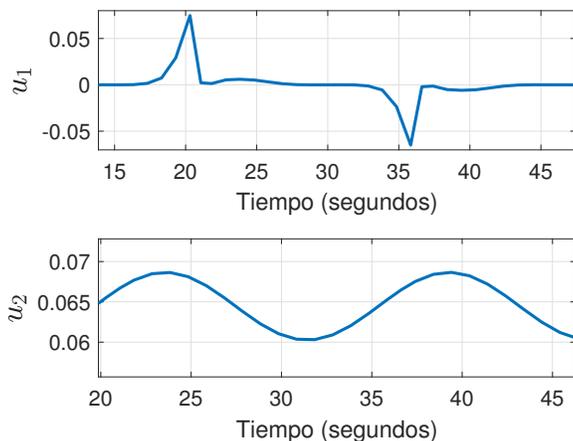


Fig. 6. Acercamiento de las entradas de control.

simple la convergencia a cero del lazo cerrado. Como trabajo futuro se pretende utilizar el observador diseñado en (Romero et al., 2020), para extender el resultado presentado en esta nota a una clase de sistemas mecánicos no linealizables más grande. Adicionalmente, se está trabajando en la implementación del controlador con el robot Touch Haptic Device.

REFERENCES

- A. Astolfi, D. Karagiannis and R. Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control Design with Applications*. Springer-Verlag; London, 2007
- A. Astolfi, R. Ortega and A. Venkatraman. A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints. *Automatica*, 46 (1); pp. 182–189, 2010.
- A. Astolfi, R. Ortega and A. Venkatraman. A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints. *Automatica*, 46 (1); pp. 182–189, 2010.
- E. Børhaug and K. Y. Pettersen. Global output feedback PID control for n-DOF Euler-Lagrange systems. *American Control Conference*; pp. 4993–4999, 2006.
- G. Besançon. Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems, *Automatica*, 36 (12); pp.1915–1921, 2000.
- W. Dixon, E. Zergeroglu and D. Dawson. Global robust output feedback tracking control of robot manipulators. *Robotica*, 22 (4); pp. 351–357, 2004.
- A. Loria. Observers are unnecessary for output-feedback control of Lagrangian systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61 (4); pp.905–920, 2015.
- J. G. Romero and R. Ortega and I. Sarras. A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 60 (3), pp. 818–823, 2015.
- J. G. Romero and R. Ortega. Two globally convergent adaptive speed observers for mechanical systems, *Automatica*, 60, pp. 07–11, 2015.
- J. G. Romero, J. A. Moreno and A. Maradiaga-Aguilar. An Adaptive Speed Observer for a Class of Nonlinear Mechanical Systems: Theory and Experiments. *Automatica*, Accepted, 2020.
- A. Venkatraman, R. Ortega, I. Sarras and A. van der Schaft. Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 (5); pp.1059–1074, 2010.
- B. Xian and M. S. de Queiroz and D. M. Dawson and M. L. McIntyre. A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems. *Automatica*, 40 (4), pp. 695–700, 2004.
- E. Zergeroglu, D. M. Dawson, M. S. de Queiroz and M. Krstic. On global output feedback tracking control of robot manipulators. *39th IEEE Conf. Decision Control*; pp. 5073–5078, 2000.