

# Control - Observer Scheme Design with Integrating Effect for High Order Systems.

Elizabeth Ramírez Ascencio, Basilio del Muro C., Gonzalo Duchén S., Cesar Cruz.

\*Instituto Politécnico Nacional, SEPI ESIME Culhuacán, Santa Ana 1000, CDMX 04260, México (Tel: +5517300541; e-mail: [eli.manich\\_1312@yahoo.com.mx](mailto:eli.manich_1312@yahoo.com.mx))

---

## Abstract

In the present work, a control based on an observer scheme that includes integrating effect for systems with two unstable poles and  $m$  stable pairs is proposed. This type of system cannot be stabilized with a traditional PI type scheme since it is well known that, if the system is strongly unstable, it cannot be used directly, so it is common to resort to an observer scheme. The proposed scheme allows to follow step type references, however, the most interesting thing about the proposal is that thanks to the integrating effect included in the observer, a steady state error is achieved that tends asymptotically to zero, even in the presence of discrepancies between the model of the plant and the observer.

The necessary and sufficient conditions are in place to guarantee the existence of the proposed stabilizing scheme.

**Keywords.** Control. Observer. Stability. PI control. Linear System. Conjugated complex poles.

---

## 1. Introducción

Los controladores tradicionales como el control Proporcional Integral conocido como PI, son los esquemas más usados en sistemas de control para resolver problemas industriales. Åström et al., (2009) fundamenta conceptos básicos desarrollados en controladores clásicos, a través del empleo de técnicas de control avanzado. El objetivo del controlador PI no es estabilizar sistemas, por lo que no es posible aplicarlo a ciertos sistemas inestables, siendo entonces común recurrir a un esquema observador, por ejemplo G. Duchén et al., (2019) hace uso de observadores. Dicha combinación nos ayuda en un principio a estabilizar los sistemas mediante una retroalimentación estática de estados estimados, para después aplicar el controlador tipo PI y lograr tareas que caracterizan a dicho controlador, como los son el seguimiento y rechazo de perturbaciones. Por otra parte, en cuanto a los observadores, una limitación de diseño es que son muy sensibles ante incertidumbres paramétricas, es decir, si la planta no está perfectamente modelada, pequeñas discrepancias entre la planta y el observador pueden hacer que el error de estimación no converja asintóticamente a cero, el problema se vuelve más desafiante cuando se trata con plantas inestables.

Si bien el presente trabajo no trata sistemas con tiempo de retardo, es en este campo en donde el uso de observadores (predictores) es muy común para estimar las señales antes de ser retrasadas, en combinación con controles clásicos. Por esta razón se utiliza algunos resultados de la teoría de control para sistemas con retardos, como en G. Duchén et al., (2019), V. Fragosó Rubio et al., (2019), Basilio del Muro Cuellar et al., (2010), (2014). Por ejemplo, en Silva G.J. et al., (2002) proponen un método para obtener la

parametrización completa del controlador PID para sistemas con retardo inestables de primer orden. En Márquez J.F. et al., (2014) se extiende el resultado para controladores PD.

Lee et al., (2010) propone una estrategia de control utilizando el análisis en frecuencia para obtener la región de valores estabilizantes. Cuando el retardo es relativamente pequeño en comparación con las constantes de tiempo del sistema puede despreciarse para diseñar controladores tradicionales. Visioli et al., (2011) analizan la estabilización de los sistemas con tiempo muerto, incluido el diseño y procedimientos de ajuste de los controladores PI y PID mediante diferentes métodos.

En el presente trabajo se presenta una propuesta de control basada en un esquema observador que incluye al controlador  $C(s)$  tipo PI para la estabilización de sistemas lineales e invariantes en el tiempo con dos polos inestables y  $m$  polos estables, pudiendo ser estos de tipo complejos conjugados mostrado en Miguel A. Hernández-Pérez et al., (2015). El controlador PI se incluye también en el observador; esto tiene ventaja, ya que, al compararse con un esquema observador tradicional, se logra una convergencia del error asintóticamente a cero, esto aun cuando se presenten discrepancias en el modelado de la planta. Adicionalmente, el esquema preserva las ventajas del controlador PI, a saber, el rechazo de perturbaciones y seguimiento de referencias. El artículo consta de las siguientes partes: además de la introducción, en la Sección 2 se da el planteamiento del problema y preliminares.

En la Sección 3 se da la estrategia de control propuesta. En la Sección 4 el resultado principal, en el cual se abordan las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla con la estrategia de control propuesta. En la Sección 5 se muestran dos ejemplos numéricos para mostrar la efectividad de la propuesta, y finalmente en la Sección 6 se dan las conclusiones.

## 2. Planteamiento del problema y preliminares.

Se considera el sistema lineal invariante en el tiempo de orden  $2m + 2$ , con dos polos inestables y  $m$  pares de polos, pudiendo ser estos complejos conjugados, qué se muestra a continuación.

$$G(s) = G_a(s) * G_b(s) * G_c(s) \quad (1)$$

donde  $G_a(s) = \frac{1}{s-a}$  ;  $G_b(s) = \frac{1}{s-b}$  ;

$$G_c(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2)}$$

con  $b \geq a$

Se trata de un sistema de alto orden donde  $a, b > 0$ . Siendo  $\zeta_i$  la razón de amortiguamiento y  $\omega_{n_i}$  la frecuencia natural no amortiguada. Cuando  $0 < \zeta_i < 1$ , los subsistemas de segundo orden producen pares de polos complejos conjugados. El sistema a tratar en este trabajo puede reescribirse de la siguiente forma.

$$G(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b) \prod_{i=1}^m (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2)} \quad (2)$$

En este trabajo se propone una estrategia de control basada en un controlador  $C(s)$  tipo PI estabilizante de la forma,

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

donde  $k_p, k_i \in R$ , y un esquema observador, el cual incluye el mismo controlador. De esta forma se pueden estimar variables internas del sistema y así poder utilizarlas para controlar al sistema original.

En el presente trabajo se obtienen las condiciones que deben cumplir el controlador y el predictor para poder garantizar la estabilidad del esquema propuesto. Aunque en este trabajo no se tratan problemas de sistemas de retardo, se utilizan resultados de este campo como fundamento para algunas demostraciones utilizadas posteriormente. De acuerdo con Miguel A. Hernández et al., (2015) se tiene el siguiente resultado. Para un sistema con polos complejos conjugados, se tiene la siguiente función de transferencia.

$$G(s) = \frac{1}{(s-\alpha) \prod_{i=1}^m (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2)} e^{-\tau s} \quad (3)$$

Existe un controlador  $C(s)$  (tipo PI) que estabiliza a  $G(s)$ , si y solo si

$$\tau < \frac{1}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} \quad (4)$$

Una consecuencia directa del resultado anterior se muestra a continuación. Se trata de una aplicación directa de sistema sin retardo. Nos habla bajo qué condiciones se pueden estabilizar un sistema con un par de polos complejos conjugados y un controlador PI.

**Lema 1.** Sea el sistema (3). Existe un controlador  $C(s)$  estabilizante, si y solo si

$$2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{n_i}} < \frac{1}{\alpha} \quad (5)$$

La demostración es obvia a partir del resultado de Miguel A Hernández et al., [10] con  $\tau=0$

## 3. Estrategia de control.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta el esquema de control propuesto en la Figura 1. Observe que se incluye al controlador  $C(s)$  tanto en la planta del sistema, como en el observador.

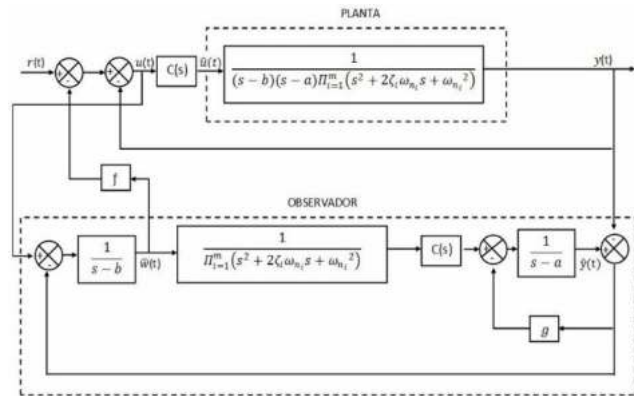


Figura 1: Propuesta general de Control.

### 3.1. Control

En primer lugar, suponiendo que se tiene acceso a las variables internas del sistema, se propone estabilizar el sistema a través del esquema de control mostrado en la Figura 2.

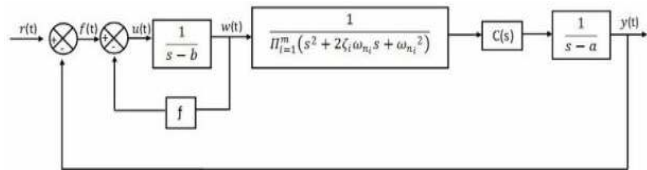


Figura 2: Esquema de control propuesto.

Tomando en cuenta lo anterior, se propone el siguiente resultado.

**Lema 2.** Sea el sistema definido por la ecuación (2) y el esquema de control propuesto en la Figura 2 entonces existe una constante  $f$  y un controlador  $C(s)$  que estabiliza el sistema, si y solo si

$$2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a} \quad (6)$$

**Demostración.**

**Suficiencia.** Considere  $2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a}$ , entonces.

$$0 < \frac{1}{a} - 2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} \quad (7)$$

Considere una  $f$  tal que  $f - b$  sea estable.

$$0 < \frac{1}{f-b} < \frac{1}{a} - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} \quad (8)$$

Esto equivale a tener un solo polo inestable en  $s = a$  y  $m + 1$  polos estables, de los cuales  $m$  polos se encuentran en  $2 \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}}$  y uno en la posición  $f - b$ .

$$\frac{1}{f-b} + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a}$$

Por lo tanto, del Lema 1, existe una ganancia  $f$  y un controlador  $C(s)$  estabilizante para el sistema de la Figura 2.

**Necesidad.** Considere que  $f$  y  $C(s)$  estabilizan al sistema definido por (3) en el esquema de la Figura 2.

Teniendo en cuenta que  $\frac{1}{s-b+f}$  es estable y que tenemos un sistema con  $m + 1$  polos estables y un polo inestable en  $s = a$ , por otra parte, de acuerdo con el Lema 1, se tiene que

$$\frac{1}{f-b} + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a} \quad (10)$$

El valor de  $f$  mueve el polo  $b$  hacia el lado izquierdo del semiplano  $s$  y se puede hacer  $f - b > 0$  tan grande como se desee ya que  $f$  es un parámetro de diseño.

Entonces existe una  $f$  tal que.

$$0 < \frac{1}{f-b} < \frac{1}{a} - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} \quad (11)$$

y 
$$0 < \frac{1}{a} - 2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} \quad (12)$$

Finalmente. 
$$2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a} \quad (13)$$

q.e.d.

### 3.2. Observador

Se parte del principio de que no se tiene acceso a las variables internas del sistema, por lo tanto se requiere del diseño de un observador, el cual nos da acceso a esas variables a través de la señal  $\hat{w}(t)$ .

En la Figura 3, se presenta el esquema que sirve de base para el diseño del observador el cual incluye el controlador  $C(s)$  como si fuera parte de la planta original.

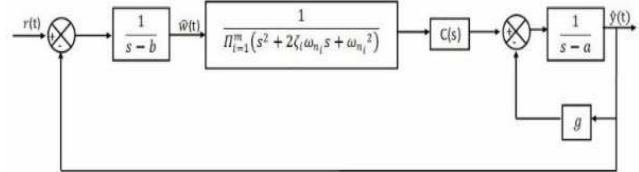


Figura 3: Esquema Observador propuesto.

La estabilidad del sistema se establece de acuerdo con el siguiente resultado.

**Lema 3.** Sea el sistema definido por la ecuación (1) y el esquema propuesto en la Figura 3, existe una constante  $g$  y un controlador  $C(s)$ , tal que el sistema en lazo cerrado sea estable si y solo si

$$2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b} \quad (14)$$

**Demostración.** La demostración se puede obtener a partir de un procedimiento similar (dual) al de la demostración del Lema 2.

### 4. Resultado principal.

Teniendo en cuenta los resultados previos, y las condiciones establecidas anteriormente, se propone un controlador basado en un observador como el de la Figura 4, el cual es una forma de representar el esquema de la Figura 1, con una planta extendida para una mejor visualización. De modo que se toma el controlador  $C(s)$  como parte de la planta por lo tanto aparece en el observador.

Considerando que  $b \geq a$ , entonces se tiene el siguiente resultado.

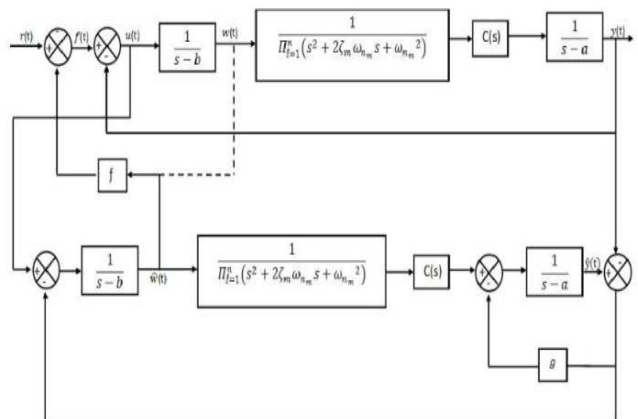


Figura 4: Esquema Control.- Observador propuesto

**Teorema.** Teniendo en cuenta el esquema propuesto en la Figura 4 (equivalente a la Figura 1), existen valores de ganancias  $f$  y  $g$  y además un controlador  $C(s)$  que estabiliza al sistema, si y solo si

$$2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b} \quad (15)$$

### Demostración.

**Suficiencia.** De acuerdo con la ecuación (15) y el Lema 3, establecido anteriormente, existe un valor de ganancia  $g$  y un controlador  $C(s)$  tal que el esquema de la figura 3, que corresponde con el observador propuesto, es estable, y mostrando la ecuación característica siguiente.

$$s(s-b)(s-a+g) \prod_{i=1}^m (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) + K_p(s+\alpha) = 0 \quad (16)$$

Por otra parte, la ecuación característica del error que corresponde a la Figura 4, es la misma que la del esquema observador. Esto se puede verificar mediante la reducción de bloques del esquema, con  $f$  dando como resultado (16). Es decir se tienen una correcta estimación de la señal  $\hat{w}(t)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\hat{w}(t) - w(t)) = 0 \quad (17)$$

Como el sistema es lineal, aplica el principio de separación y entonces  $f$  y el mismo controlador  $C(s)$  anterior estabilizan al sistema de la Figura 2, que corresponde al controlador.

Por lo tanto, el esquema global es estable y se asegura una convergencia adecuada del error, con una ganancia  $g$ ,  $f$  y el mismo controlador  $C(s)$  que estabiliza al sistema de la Figura 4, y que cumple con (15).

**Necesidad.** Partiendo ahora de que existe un controlador  $C(s)$ , y valores de ganancia  $f$  y  $g$  tales que estabilizan el sistema global propuesto en la Figura 4, entonces se dice que la ecuación característica del error (16) es estable y esto implica que el Lema 1 y la Figura 3, correspondiente al observador, se cumple (15).

Teniendo en cuenta lo siguiente.

$$2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b}, \quad 2 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{a}$$

Sin pérdida de generalidad  $b \geq a$  entonces  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ , por lo tanto la condición de estabilidad del observador es más restrictiva que la del controlador, entonces existen ganancias  $f$  y  $g$  tales que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si

$$2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b}$$

### 4.1 Procedimiento de Diseño

El procedimiento general de diseño se puede establecer de la siguiente manera.

1° Primer paso, debemos realizar la comprobación de las condiciones establecidas previamente, esto es dado  $b \geq a$ , entonces  $2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b}$ . Una vez que cumple con esta condición pasamos a la reubicación de los polos, así como la sintonización del controlador  $C(s)$ , como se sugiere continuación.

2° Partiendo del esquema de la Figura 4, se reubica el polo inestable menos restrictivo  $a$  (o más lento) a través de la ganancia  $g$  en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , lo suficientemente alejado del origen, en  $s = a - g = -\Phi$ , tal que

$$\frac{1}{\phi} + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i}{\omega_{ni}} < \frac{1}{b} \quad (18)$$

3° Siguiendo el mismo procedimiento del punto anterior, se reubica el polo inestable restrictivo  $b$  (o más rápido) a través de la ganancia  $f$  en el lado izquierdo del semiplano  $s$ , en el mismo punto que el polo  $a$ , en  $s = b - f = -\Phi$ , tal que cumpla con (18).

4° Para obtener los valores  $K_p$  y  $K_i$ , se considera el esquema de la Figura 3, incluimos al controlador  $C(s)$  en la planta. Se puede usar cualquier método de sintonización, por ejemplo, mediante un análisis del lugar geométrico de las raíces del esquema observador. Estas mismas ganancias estabilizan el esquema controlador dado que es menos restrictivo.

## 5. Ejemplos.

**Ejemplo 1.** Sea el sistema con dos polos inestables y dos pares de polos complejos conjugados, mostrado en la ecuación (19).

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-0.4)(s^2+4s+8)(s^2+10s+89)} \quad (19)$$

Reubicamos los polos  $a$  y  $b$  en  $s=-30$ , un controlador  $C(s) = \frac{K_i}{s} + K_p$ , tomando los siguientes parámetros  $g = 30.4$ ,  $f = 31$ ,  $K_i = 361.5$ .  $K_p = 24100$ . Mostrando el comportamiento de la salida del sistema en lazo cerrado en la Figura 5, así como el comportamiento del error  $e = \hat{y}(t) - y(t)$  en la Figura 6.

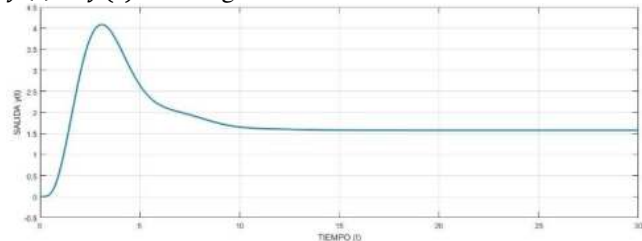


Figura 5. Comportamiento de la salida del sistema en lazo cerrado para planta con valores nominales.

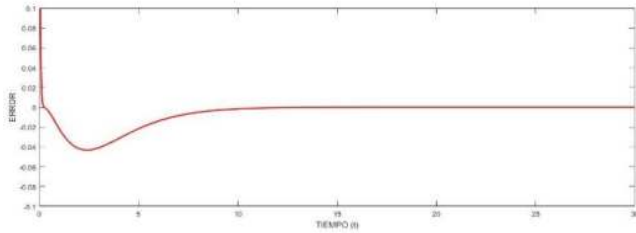


Figura 6. Comportamiento del error para la planta con valores nominales.

Para el sistema anterior, se perturba la planta y tomando los mismos parámetros anteriores como se presenta la ecuación (20). Mostrando el comportamiento de la salida del sistema perturbado en la Figura 7, así como el comportamiento del error  $e = \hat{y}(t) - y(t)$  en la Figura 8.

$$G(s) = \frac{1}{(s-1.1)(s-0.4)(s^2+4s+8)(s^2+10s+89)} \quad (20)$$

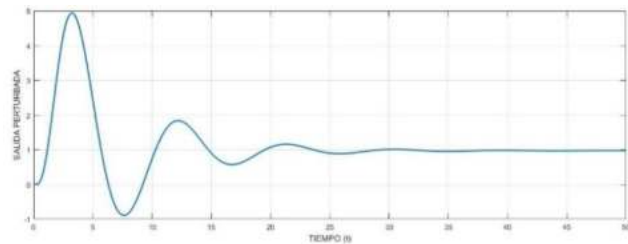


Figura 7. Comportamiento de la salida del sistema perturbado.

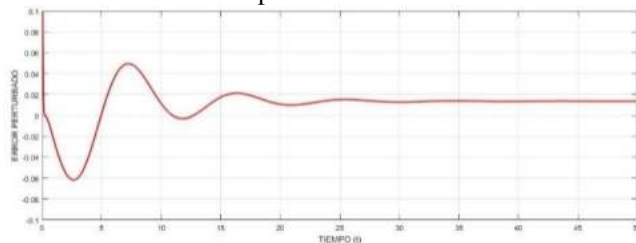


Figura 8. Comportamiento del error para planta perturbada.

Ahora se hace la comparación el error del esquema propuesto contra un observador tradicional en el cual  $Kp = 23400$ , con las mismas plantas perturbadas, para así mostrar la eficiencia de la propuesta. Se muestra en la figura 9 el comportamiento del error de la propuesta de color azul, y el comportamiento del error de esquema tradicional de color verde.

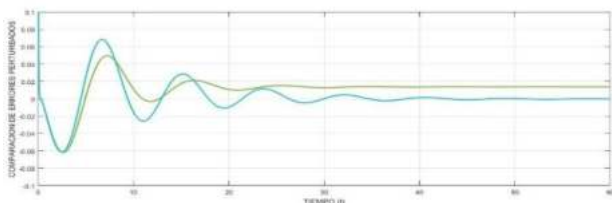


Figura 9. Comparación del comportamiento del error

**Ejemplo 2.** Sea el sistema con dos polos inestables y un par de polos complejos conjugados, mostrado en la ecuación (21).

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s-1)(s^2+10s+89)} \quad (21)$$

Reubicamos los polos  $a$  y  $b$  en  $s=-15$ , un controlador tipo  $PI$ ,  $C(s) = \frac{K_i}{s} + K_p$ , tomando los siguientes parámetros  $g = 16$ ,  $f = 17$ ,  $K_i = 3950$ .  $K_p = 592.5$ . Mostrando el comportamiento de la salida del sistema en lazo cerrado en la Figura 10, así como el comportamiento del error  $e = \hat{y}(t) - y(t)$  en la Figura 11.

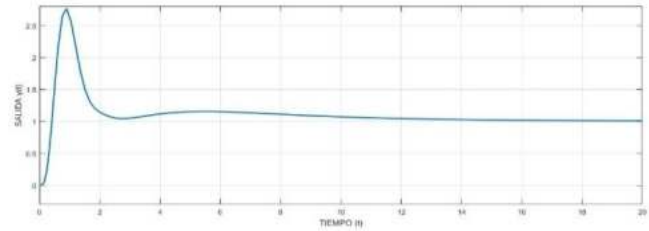


Figura 10. Comportamiento de la salida del sistema en lazo cerrado para planta con valores nominales.

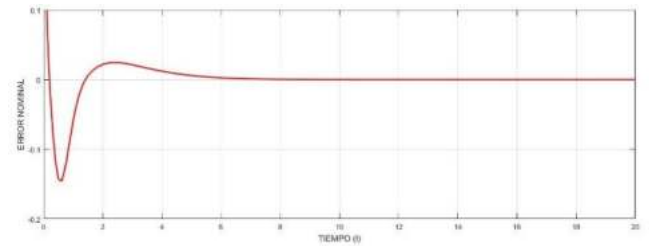


Figura 11. Comportamiento del error para la planta con valores nominales.

Para el sistema anterior, se perturba la planta y tomando los mismos parámetros anteriores como se presenta la ecuación (22). Mostrando el comportamiento de la salida del sistema perturbado en lazo cerrado en la Figura 12, así como el comportamiento del error  $e = \hat{y}(t) - y(t)$  en la Figura 13.

$$G(s) = \frac{1}{(s-2.5)(s-1)(s^2+10s+89)} \quad (22)$$

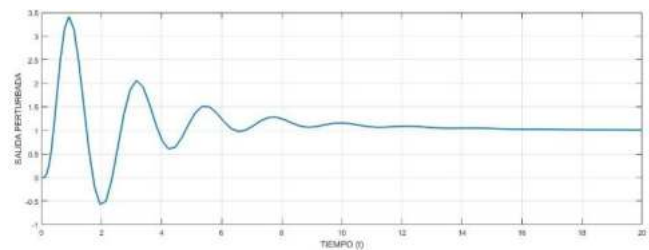


Figura 12. Comportamiento de la salida del sistema perturbado.

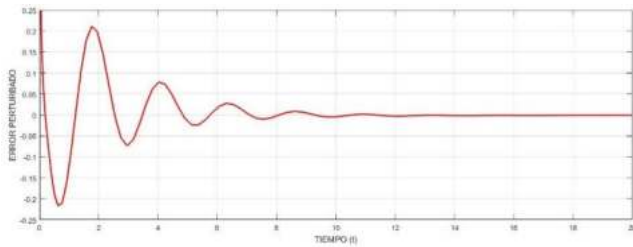


Figura 13. Comportamiento del error para planta perturbada.

Ahora se hace la comparación el error del esquema propuesto contra un observador tradicional en el cual  $K_p = 5340$ , con las mismas plantas perturbadas, para así mostrar la eficiencia de la propuesta.

Se muestra en la figura 14 el comportamiento del error de la propuesta de color azul, y el comportamiento del error de esquema tradicional de color verde.

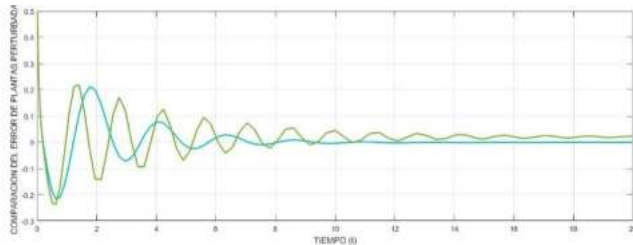


Figura 14. Comparación del comportamiento del error

Como podemos observar la propuesta de este trabajo es más eficiente, ya que a pesar de la incertidumbre, el error sigue convergiendo asintóticamente a cero.

## 6. Conclusiones.

En el presente trabajo se propuso un esquema observador con efecto integrador (PI) para la estabilización y el control de sistemas con dos polos inestables y  $m$  pares de polos estables complejos conjugados. Cabe mencionar que este tipo de sistemas no pueden ser estabilizados de manera directa con un PI, de manera que se utilizó en conjunto un control – observador. Se dieron las condiciones necesarias y suficientes que garantizan la existencia del esquema controlador estabilizante. Mediante un par de ejemplos, se ilustra la eficiencia de la estrategia propuesta.

## 7. Referencias.

Åström, K. J., & Hägglund, T.: Control PID avanzado. Pearson, Madrid, (2009).

G. Duchén, C. Cruz, E. Ramírez, J. F. Márquez, B. Del Muro, M. A. Hernández. (2019). Estabilización y control de sistemas de alto orden con retardo y dos polos inestables: esquema PD-Observador. Congreso Nacional de Control Automático.

V. Fragoso Rubio, M. Velasco—Villa, M. A. Hernández--Pérez\*, B. del Muro Cuéllar and J. F. Márquez Rubio. Prediction–Observer Scheme for Linear Systems with Input–Output Time Delay, *International Journal of Control, Automation and Systems*. August (2019), Volumen 17, Issue 8, pp 2012–2025.

Basilio del Muro Cuéllar, Juan Francisco Márquez\*, Rubio Martín Velasco-Villa, and José Álvarez-Ramírez: On the Control of Unstable First Order Linear Systems with Large Time lag: Observer Based Approach. *European Journal of Control*. (2012) Vol 18 No. 5, p.p. 439-451 ISSN: 0947-3580 DOI:10.3166/ejc.18.439-451.

Basilio del Muro Cuéllar, Juan Francisco Márquez Rubio Martín Velasco-Villa, and José Álvarez-Ramírez An improved sufficient condition for stabilization of unstable first-order processes by observer-state feedback. *International Journal of Control*. DOI:10.1080/00207179.2014.955531 (Published online: 18 Sep (2014)) ISSN: 0020-7179 (Q3) (online: 0020-7179) Vol. 88, Issue 2, Pages 403-412 2015 (Q2).

Silva G.J., Datta A, Bhattacharyya SP. New results on the synthesis of PID controllers. *IEEE Trans. Autom. Control* (2002); 47(2): 241–252.

Márquez JF, del Muro-Cuellar B, Alvarez-Ramirez J. Stabilization region of PD controller for unstable first order process with time delay. *Int. J. Control, Autom. Syst.* (2014); 12(2): 265–273.

Lee S.C., Wang Q. and Xiang C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of process control*, 20 (2010), 235-239. DOI:10.1016/j.jprocont.2009.05.005.

Visioli, Antonio & Zhong, Qing-Chang. (2011). Control of Integral Processes with Dead Time. 10.1007/978-0-85729-070-0.

Miguel A. Hernández-Pérez. Basilio del Muro-Cuéllar. Martín Velasco-Villa. (2015). PID for the stabilization of high-order unstable delayed systems with possible complex conjugate poles. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*. 16 June 2015. 2015; 10: 687–699

Vázquez C.D., Márquez J. F., del Muro B., Novella D., Hernández M. A. and Duchén G. (2018). Observer-PI scheme for the stabilization and control of high order delayed systems with one or two unstable poles. *IFAC Papers OnLine*, 51-4 (2018), 432-437.

Novella D., del Muro B. and Sename O. (2014). Observer based scheme for the control of high order systems with two unstable poles plus time delay. *Asia Pacific Journal of Chemical Engineering*, 9(2), 167-180.