Memorias del Congreso Nacional de Control Automático ISSN: 2594-2492

Revisiting classical cross-gramian definition for model order reduction of linear time-invariant systems

Fernando A. Ortiz-Ricárdez y Luis A. Alvarez-Icaza *

* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México 04510, CDMX, México. e-mail: fortizric@gmail.com; alvar@pumas.unam.mx*

Abstract: This paper presents, under the perspective of balancing-reducing linear systems via Hankel singular values, a proposition that is aimed to offer a plain relationship among controllability and observability gramians, and the classical cross-gramian for a certain class of systems: from defining the cross-gramian as the solution of Sylvester's equation, and the controllability and observability gramians as solutions of the Lyapunov's algebraic equation, which is a particular case of Sylvester's equation, the established proposition provides a condensed starting point to redifuse and repopularize, among the control systems community, the usage of the cross-gramian for model order reduction of linear time-invariant dynamical systems.

Keyword list: Linear control systems, Singular value decomposition, Educational aids.

1. INTRODUCCIÓN

La reducción de modelos basada en valores singulares de Hankel es un tema estudiado desde hace tiempo (Aizad et al., 2014). Entre este tipo de esquemas de reducción, el truncamiento balanceado y la residualización balanceada, basadas en el balanceo de sistemas realizado por Moore (1981), son de los enfoques arquetípicos más utilizados para reducir modelos determinísticos de sistemas dinámicos.

Las factorizaciones de las matrices de Cholesky de los gramianos de controlabilidad W_c y observabilidad W_o, efectuadas en el proceso típico de balanceo de sistemas (Laub et al., 1987), son restrictivas en el sentido de que no pueden calcularse si el sistema a balancear es inestable o es marginalmente estable. Para sortear este inconveniente, existen algunas técnicas como corrimiento de ejes (Nidhi y Prasad, 2010, Mirnateghi y Mirnateghi, 2013), o separación de dinámicas estables e inestables de sistemas (Zhou et al., 1999).

El gramiano cruz W_{co}, formulado primero por Fernando y Nicholson (1982) para verificar las propiedades de controlabilidad y observabilidad de modelos de sistemas lineales invariantes, fue luego investigado por (Kenney y Hewer, 1987), quienes demostraron que la similitud real de tal gramiano es condición necesaria y suficiente para la existencia de transformaciones balanceantes para una clase particular de sistemas inestables. Más recientemente, los resultados de Himpe y Ohlberger (2014) han subrayado la ventaja de balancear y reducir empleando el gramiano cruz en vez de utilizar el procedimiento de balanceo y reducción tradicional de Moore (1981), que emplea los gramianos de controlabilidad y observabilidad por separado. Por otro lado, utilizando la separación de dinámicas asintóticamente estable y marginalmente estable, en (Ortiz-Ricardez et al., 2017) se exhibió el balanceo y reducción de orden para un sistema lineal invariante mediante su gramiano cruz.

No obstante, la definición clásica del gramiano cruz provista por Fernando y Nicholson (1982), que recurre a la ecuación de Sylvester (9), se ha mostrado endeble, ya que existen realizaciones controlables, observables y con solución única a la ecuación de Sylvester (9), que incumplen con la similitud real del gramiano cruz, o incluso con la similitud real del producto de gramianos de controlabilidad y observabilidad W_cW_o (Kenney y Hewer, 1987, Zhou et al., 1999).

Lo anterior ha motivado la investigación del balanceo y la reducción de sistemas mediante nuevas definiciones de los gramianos de controlabilidad y observabilidad para sistemas inestables (Zhou et al., 1999), y a través de formulaciones denominadas gramianos generalizados (Shaker, 2012). Se encuentra asimismo en la literatura, otro trabajo dedicado al balanceo y reducción de sistemas marginalmente estables (Peng y Carlberg, 2017), los cuales no satisfacen en absoluto la condición de unicidad de soluciones para la ecuación de Sylvester (9).

Sin embargo, dado el gran número de trabajos en la literatura sobre el tema del balanceo mediante gramiano cruz y sus limitaciones, el objetivo de este artículo es ofrecer una relación clara entre los gramianos de controlabilidad y observabilidad, y el gramiano cruz clásico para cierta clase de sistemas. Esta relación se cristaliza en la Proposición 4.1, la cual es buena introducción al problema de difusión por balanceo mediante el uso del gramiano cruz. Por otra parte, no es el objetivo de este artículo exponer una revisión minuciosa de la literatura dedicada a lidiar con los defectos del gramiano cruz clásico definido por la ecuación de Sylvester (9).

El artículo está organizado como sigue: la Sección 2 presenta el panorama básico del proceso de balanceo y reducción basado en valores singulares de Hankel, y su relación con el gramiano cruz clásico definido por la ecuación de Sylvester; la Sección 3 exhibe definiciones y teoremas matemáticos preliminares que fundamentan la Proposición 4.1, que es el resultado principal de este trabajo. Finalmente, la prueba matemática del resultado principal, que es la Proposición (4.1), se muestra en el Apéndice A.

2. BALANCEO Y REDUCCIÓN DE ORDEN MEDIANTE GRAMIANO CRUZ

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) asintóticamente estable

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \tag{1}$$

mínimo (observable y controlable), constituido por $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, y $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$, con $u \equiv u(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\forall t \geq 0$. Puesto que A es Hurwitz, los gramianos de controlabilidad y observabilidad

$$W_c = \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt \quad \text{y} \quad W_o = \int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt \tag{2}$$

son ambos no singulares (invertibles). El balanceo consiste en calcular una matriz no singular T tal que la transformación $x = T\tilde{x}$ para la Ec. (1) induzca, en las nuevas coordenadas $\tilde{x}$, que los gramianos W_c y W_o sean ambos diagonales y, de ser posible, idénticos. Por tanto, la matriz T transforma el sistema como

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT, \quad \text{y} \quad \tilde{D} = D; \tag{3}$$

y T consigue la diagonalización simultánea de los gramianos simétricos mediante las transformaciones de congruencia Uhlig (1973)

$$\mathbf{D_1} = T^{-1}W_cT^{-T} \quad \text{y} \quad \mathbf{D_2} = T^TW_oT. \tag{4}$$

Si $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ son diagonales, la Ec. (1) está *balanceada* por T. Si además $\mathbf{D_1} \equiv \mathbf{D_2}$, la Ec. (1) está *internamente balanceada* por T. Para asegurar la existencia y unicidad de los gramianos de controlabilidad W_c y observabilidad W_o, definidos también por las soluciones para las ecuaciones algebraicas de Lyapunov

$$AW_c + W_cA^T = -BB^T, \tag{5}$$

$$A^TW_o + W_oA = -C^TC, \tag{6}$$

una condición necesaria y suficiente es que no existan valores propios comunes entre $\lambda(A)$ y $\lambda(-A)$ (Laub, 2005, p.145). en tales casos, la matriz A puede tener valores propios positivos (inestables). De esta manera, se prescinde de la estabilidad asintótica del sistema (1) para la existencia de soluciones únicas para las ecuaciones (5) y (6) (Fernando y Nicholson, 1982).

Para sistemas asintóticamente estables, los valores singulares de Hankel σ_i se definen como las raíces cuadradas de los valores propios $\lambda_i(W_cW_o)$, es decir $\sigma_i \triangleq \sqrt{\lambda_i(W_cW_o)}$ (Glover, 1984, p.1118); véanse también Laub et al. (1987) y Tan y He (2007). Así, para obtener la **reducción balanceada truncada (TBR)**, únicamente la parte del vector de estado completo $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T$, cuyas variables se relacionan a valores singulares de Hankel arbitrariamente pequeños bajo criterio del diseñador, se fuerzan a equivaler idénticamente a cero, es decir $\tilde{x}_2 = 0$. Por consiguiente, el modelo (1) se transforma en

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1u, \quad y = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 + Du. \tag{7}$$

En el caso de la **reducción balanceada residualizada (RBR)**, el modelo de orden reducido aparece fijando a cero las derivadas de las variables de estado asociadas a los valores singulares de Hankel arbitrariamente pequeños, es decir $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$. Con lo cual, la Ec. (1) conduce a

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \left(\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}\right)\tilde{x}_1 + \left(\tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2\right)u,\\ y &= \left(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}\right)\tilde{x}_1 + \left(D - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2\right)u.\end{aligned} \tag{8}$$

La función de transferencia de orden reducido $G_{n-r}(s)$, obtenida ya sea por truncamiento o residualización, satisface $\|G_n(s) - G_{n-r}(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{n-r+1} + \sigma_{n-r+2} + \ldots + \sigma_n)$ (Glover, 1984, p.1170), donde G_n es la función de transferencia original de orden completo. Así, los valores singulares de Hankel definen una cota para el error de truncamiento/residualización. Laub et al. (1987) propusieron primero el siguiente algoritmo (Tan y He, 2007, p.42), para balancear internamente y reducir (1):

1. Resolver $AW_c + W_cA^T + BB^T = 0$ para W_c.
2. Resolver $A^TW_o + W_oA + C^TC = 0$ para W_o.
3. Calcular los factores de Cholesky de los gramianos $W_c = L_cL_c^T$ y $W_o = L_oL_o^T$.
4. Calcular la descomposición en valores singulares para el producto $U\Sigma V^T = L_o^TL_c$, donde Σ es una matriz diagonal positiva y las matrices U, V son ortonormales por columnas.
5. Calcular las matrices balanceantes $T = L_cV\Sigma^{-1/2}$ y $T^{-1} = \Sigma^{-1/2}U^TL_o^T$.
6. Construir la realización balanceada $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.
7. Elegir el orden para el modelo reducido.
8. Truncar o residualizar $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$.

Además de los gramianos de controlabilidad y observabilidad, el gramiano cruz es una herramienta alternativa para construir modelos de orden reducido para sistemas simétricos [1]; particularmente, es fácilmente aplicable en sistemas SISO (de una entrada y una salida), ya que éstos

[1] Veáse definición de este tipo de sistemas en (Kenney y Hewer, 1987, p.158)

son trivialmente simétricos porque sus matrices de transferencia constan de una sola función de transferencia.

Así pues, para sistemas simétricos, el gramiano cruz se define mediante la solución de la ecuación de Sylvester

$$AW_{co} + W_{co}A = -BC, \tag{9}$$

donde no existen valores propios comunes entre $\lambda(A)$ y $\lambda(-A)$, lo que garantiza unicidad de soluciones para (9) (Fernando y Nicholson, 1982, 1983). La ecuación de Sylvester (9) es una igualdad matricial más general que la ecuación algebraica de Lyapunov (Laub, 2005, p.144).

Para la definición estándar del gramiano cruz (9), la diagonalización real de W_{co} mediante la transformación de similitud $T^{-1}W_{co}T$ es una condición necesaria y suficiente para la existencia de balanceo interno y, consecuentemente, para la similitud real positiva del producto de gramianos W_cW_o (Kenney y Hewer, 1987). Si una realización es controlable y observable, entonces W_{co} es no singular (Kenney y Hewer, 1987, p.159). La idea original de verificar la no singularidad de W_{co} era evitar comprobar, por separado, si los gramianos W_c y W_o son no singulares (Fernando y Nicholson, 1982).

Aunque la definición clásica del gramiano cruz W_{co} mediante a la ecuación de Sylvester (9) se ha mostrado frágil, ya que hay realizaciones (A,B,C,D) que incumplen con la similitud real del gramiano cruz W_{co}, o incluso con la similitud real del producto de gramianos W_cW_o —ver ejemplos de ellas en (Kenney y Hewer, 1987) y (Zhou et al., 1999)—, dicha definición se considera, como se había mencionado en la introducción, un buen punto de partida para el alcance de este artículo.

3. PRELIMINARES

Definición 3.1. *Dos matrices M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que son similares si existe una matriz real no singular X tal que*

$$M_1 = X^{-1}M_2X. \tag{10}$$

Definición 3.2. *Dos matrices M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son congruentes si existe una matriz real no singular Y tal que*

$$M_1 = Y^TM_2Y. \tag{11}$$

Con las dos definiciones previas, se enuncia el siguiente teorema demostrado en (Uhlig, 1973):

Teorema 3.1. (Uhlig, 1973, p.284) *Sean S_1 y S_2 matrices reales simétricas no singulares. Entonces, lo siguiente es equivalente:*

1. *S_1 y S_2 son simultáneamente diagonalizables por la transformación congruente real.*
2. *$S_1^{-1}S_2$ es similar a una matriz diagonal real.* □

El Teorema 3.1 fue utilizado en (Kenney y Hewer, 1987, p.157) para derivar el siguiente resultado para sistemas balanceados.

Teorema 3.2. (Kenney y Hewer, 1987, p.157) *Sea la realización de espacio de estado (A,B,C,D) observable y controlable, y sea satisfecha la condición de que no existen valores propios comunes entre $\lambda(A)$ y $\lambda(-A)$. Entonces, lo siguiente es equivalente:*

1. *Existe una transformación balanceante T para la realización (A,B,C,D).*
2. *W_cW_o es similar a una matriz diagonal real.* □

A su vez, el siguiente teorema expone la relación entre el gramiano cruz, y los gramianos de controlabilidad y observabilidad para sistemas simétricos.

Teorema 3.3. (Kenney y Hewer, 1987) *Supóngase que la realización (A,B,C,D) es simétrica, y que no existen valores propios comunes entre $\lambda(A)$ y $\lambda(-A)$. Entonces $W_{co}^2 = W_cW_o$.* □

El Teorema 3.3 fue demostrado para sistemas SISO en (Fernando y Nicholson, 1982) y para sistemas MIMO (de múltiples entradas y múltiples salidas) en (Fernando y Nicholson, 1985).

Se presenta en la siguiente sección una proposición que relaciona de forma resumida los enunciados y pruebas explicados en (Kenney y Hewer, 1987) concernientes a una transformación diagonalizante $\hat{T}$ del gramiano cruz W_{co}, la cual fue usada en ese trabajo únicamente para probar la existencia de transformaciones internamente balanceantes, y que se pretende usar ahora como referencia entre el balanceo interno y el no interno (sencillo).

4. RESULTADO PRINCIPAL

La Proposición 4.1 es un encadenamiento de implicaciones de los teoremas presentados en la Sección 3, y su intención es ilustrar clara y condensadamente la relación entre las transformaciones de balanceo sencillo y balanceo interno proporcionadas, respectivamente, por el gramiano cruz W_{co}, y el par conformado por los gramianos de controlabilidad W_c y observabilidad W_o.

Proposición 4.1. *Sea la realización de espacio de estado (A,B,C,D) observable y controlable, y sea satisfecha la condición de que no existen valores propios comunes entre $\lambda(A)$ y $\lambda(-A)$. Sea también el gramiano cruz W_{co} similar a una matriz diagonal real $\hat{W}_{co} = T^{-1}W_{co}T$ mediante la matriz no singular T, con lo cual, existe para la realización (A,B,C,D) una transformación internamente balanceante que, en general, no es T, y por ello, los gramianos de controlabilidad y observabilidad diagonalizados, $\mathbf{D_1} = T^{-1}W_cT^{-T}$ y $\mathbf{D_2} = T^TW_oT$, no resultan, en general, equivalentes elemento a elemento, esto es, $\mathbf{D_1}_{(ii)} \neq \mathbf{D_2}_{(ii)}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ con n elementos en sus diagonales.*

Si se define la transformación diagonalizante $\hat{T} \triangleq T(\mathbf{D_1D_2})^{1/4}|\mathbf{D_2}|^{-1/2}$ del gramiano cruz W_{co} de la realización (A,B,C,D), entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:

1. *El gramiano cruz W_{co} es similar a una matriz diagonal real mediante $\hat{T}$.*

2. *El producto W_cW_o es similar a una matriz diagonal real positiva mediante $\hat{T}$.*
3. *La matriz $\hat{T}$ es una transformación internamente balanceante para la realización de espacio de estado (A,B,C,D).* $\square$

La transformación $\hat{T} \triangleq T(\mathbf{D_1 D_2})^{1/4}|\mathbf{D_2}|^{-1/2}$, que logra el balanceo interno de la realización, depende del cálculo previo de la matriz T, que es sólo una transformación de balanceo. $\hat{T}$ es una transformación de balanceo interno alternativa a la proporcionada por el procedimiento presentado primero en (Tan y He, 2007, p.42) y en (Laub et al., 1987), aunque sólo fue empleada como paso matemático intermedio para demostrar la existencia general de transformaciones internamente balanceantes en (Kenney y Hewer, 1987), y no fue presentada explícitamente como una transformación internamente balanceante en dicho artículo.

Nótese que, si de entrada la matriz T provoca que $\mathbf{D_1} = \mathbf{D_2}$, lo que significaría que T es internamente balanceante para la realización (A,B,C,D), esto conduciría a que $\hat{T} \equiv T$. Un ejemplo de este caso particular en el que T se presenta cuando $B = C^T$ y $A = A^T$, lo que induce a la equivalencia de gramianos $W_c \equiv W_o$.

5. CONCLUSIÓN

En el contexto de reducción de orden de sistemas mediante valores singulares de Hankel, para una realización (A,B,C,D) de un sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo, se ha propuesto un teorema que visibiliza la relación entre el balanceo interno de la realización, calculado a partir de sus gramianos de observabilidad y controlabilidad tradicionales; y el balanceo no interno para dicha realización calculado mediante su gramiano cruz.

La definición del gramiano cruz W_{co} empleada en este trabajo es la resolución de la ecuación de Sylvester $AW_{co} + W_{co}A = -BC$, y se relaciona con los gramianos de controlabilidad y observabilidad a través de la ecuación $W_{co}^2 = W_cW_o$. Esta definición de gramiano cruz se considera ya clásica en la literatura, y, si bien puede ser obsoleta si se le compara con otras definiciones más recientes, proporciona un buen punto de partida para la difusión del uso del gramiano cruz entre la comunidad estudiosa del control y observación de sistemas dinámicos.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el apoyo financiero recibido a través del programa de becas del CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), CVU: 557079. El trabajo se realizó con el apoyo del proyecto PAPIIT IT101420

REFERENCIAS

Aizad, T., Sumislawska, M., Maganga, O., Agbaje, O., Phillip, N., y Burnham, K.J. (2014). Investigation of Model Order Reduction Techniques: A Supercapacitor Case Study. In *Advances in Systems Science, Advances in Intelligent Systems y Computing*, 795–804. Springer. Vol. 240.

Fernando, K. y Nicholson, H. (1982). Minimality of SISO Linear Systems. *Proceedings of IEEE*, 70(10), 1241–1242.

Fernando, K. y Nicholson, H. (1983). On the Structure of Balanced y Other Principal Representations of SISO Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-28(2), 228–231.

Fernando, K. y Nicholson, H. (1985). On The Cross-Gramian for Symmetric MIMO Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-32(5), 487–489.

Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞-error bounds. *International Journal of Control*, 39(6), 1115–1193.

Himpe, C. y Ohlberger, M. (2014). Cross-Gramian-Based Combined State and Parameter Reduction for Large-Scale Control Systems. *Mathematical Problems in Engineering, Hindawi*, (843869), 1–13.

Kenney, C. y Hewer, G. (1987). Necessary and Sufficient Conditions for Balancing Unstable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(2), 157–159.

Laub, A.J. (2005). *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. SIAM.

Laub, A.J., Heath, M.T., Paige, C.C., y Ward, R.C. (1987). Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(2), 115–122.

Mirnateghi, N. y Mirnateghi, E. (2013). Model reduction of unstable systems using balanced truncation. *IEEE 3rd. International Conference on System Engineering and Technology*, 193–196.

Moore, B.C. (1981). Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1), 17–32.

Nidhi, S. y Prasad, R. (2010). Model reduction of unstable systems using linear transformation and balanced truncation. *4th. International Conference on Computer Applications in Electrical Engineering Recent Advances*, 374–377.

Ortiz-Ricardez, F., Romero-Becerril, A., y Álvarez-Icaza, L. (2017). Reducción basada en gramiano cruzado de un modelo electroquímico de celdas de iones de litio. *Congreso Nacional de Control Automático*, 606–611.

Peng, L. y Carlberg, K. (2017). Structure-Preserving Model Reduction for Marginally Stable LTI Systems. 1–29. Cornell University Library.

Shaker, H.R. (2012). Generalized Cross-Gramian for Linear Systems. *7th. IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, 749–751.

Tan, S.X. y He, L. (2007). *Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design.* Cambridge University 1st. Ed.

Uhlig, F. (1973). Simultaneous Block Diagonalization of Two Real Symmetric Matrices. *Linear algebra and its applications*, 7, 281–289.

Zhou, K., Salomon, G., y Wu, E. (1999). Balanced Realization and Model Reduction for Unstable Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9, 183–198.

Apéndice A. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 4.1

Antes de suponer cualquiera de los enunciados del 1) al 3) de la Proposición 4.1, obsérvese lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{co} &= \hat{T}^{-1}W_{co}\hat{T},\\ &= |\mathbf{D_2}|^{1/2}(\mathbf{D_1D_2})^{-1/4}\underbrace{T^{-1}W_{co}T}_{\hat{W}_{co}}(\mathbf{D_1D_2})^{1/4}|\mathbf{D_2}|^{-1/2},\end{aligned}$$

donde las matrices $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$, su producto $\mathbf{D_1D_2}$, y todas las matrices que resultan de elevarlas a cierta potencia o de operar su valor absoluto, son todas diagonales. Con lo cual, se revela que

$$\hat{W}_{co} \equiv \hat{T}^{-1}W_{co}\hat{T} \equiv T^{-1}W_{co}T, \tag{A.1}$$

debido a que $\hat{W}_{co}$ es una matriz diagonal también. La observación (A.1) es clave en la prueba de la Proposición 4.1.

Ahora, primero supóngase el enunciado 1). Junto con el Teorema 3.3, que señala que $W_{co}^2 = W_cW_o$, resulta

$$W_cW_o = \underbrace{\hat{T}\hat{W}_{co}\hat{T}^{-1}}_{W_{co}}\underbrace{\hat{T}\hat{W}_{co}\hat{T}^{-1}}_{W_{co}},$$

y si ambos lados del desarrollo anterior se diagonalizan mediante la transformación de similitud $\hat{T}$, entonces

$$\hat{T}^{-1}W_cW_o\hat{T} = \hat{W}_{co}^2 > 0,$$

ya que, al ser W_{co} no singular debido a las propiedades de controlabilidad y observabilidad, entonces $\hat{W}_{co}$ posee elementos reales no nulos (positivos o negativos) en su diagonal, y en consecuencia, $\hat{W}_{co}^2$ una matriz diagonal real positiva y el producto de gramianos W_cW_o es similar a una matriz diagonal real positiva, con lo que 1) $\Rightarrow$ 2).

Como W_cW_o es similar a una matriz diagonal real positiva, entonces la matriz diagonal real $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{1} = \hat{T}^{-1}W_c\hat{T}^{-T}$ debe ser igual a la matriz diagonal real $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{2} = \hat{T}^TW_o\hat{T}$. Ya que se había establecido que, en general, $\mathbf{D}_{\mathbf{1}(ii)} \neq \mathbf{D}_{\mathbf{2}(ii)}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ con n elementos en sus diagonales, se desarrolla para $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{1}$ el desglose

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{1} &= \hat{T}^{-1}W_c\hat{T}^{-T},\\ &= |\mathbf{D_2}|^{1/2}(\mathbf{D_1D_2})^{-1/4}\underbrace{T^{-1}W_cT^{-T}}_{\mathbf{D_1}}(\mathbf{D_1D_2})^{-1/4}|\mathbf{D_2}|^{1/2},\\ &= |\mathbf{D_2}|(\mathbf{D_1D_2})^{-1/2}(\mathbf{D_1D_2})\mathbf{D_2}^{-1},\\ &= (\mathbf{D_1D_2})^{1/2}|\mathbf{D_2}|\mathbf{D_2}^{-1},\end{aligned}$$

donde el operador $|\cdot|$ denota el valor absoluto sobre cada elemento de las las matrices diagonales $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$. Nótese que, si las matrices $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ son diagonales, entonces su producto es conmutativo, tal como cualquier multiplicación de cifras escalares. De forma similar, $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{2}$ se expresa como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{2} &= \hat{T}^TW_o\hat{T},\\ &= |\mathbf{D_2}|^{-1/2}(\mathbf{D_1D_2})^{1/4}\underbrace{T^TW_oT}_{\mathbf{D_2}}(\mathbf{D_1D_2})^{1/4}|\mathbf{D_2}|^{-1/2},\\ &= (\mathbf{D_1D_2})^{1/2}|\mathbf{D_2}|^{-1}\mathbf{D_2}.\end{aligned}$$

Puesto que $|\mathbf{D_2}|\mathbf{D_2}^{-1} = |\mathbf{D_2}|^{-1}\mathbf{D_2}$, entonces $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{1} = \hat{\mathbf{D}}_\mathbf{2}$, lo que implica que la matriz $\hat{T}$ es una transformación internamente balanceante que provoca que $\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{1}\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{2} = \mathbf{D_1D_2}$. En consecuencia, 2) $\Rightarrow$ 3) y la secuencia de implicaciones 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) de la Proposición 4.1 queda demostrada.

Debe probarse ahora la secuencia inversa de implicaciones de la Proposición 4.1:

Partiendo del enunciado 3), entonces la matriz real no singular $\hat{T}$ es una transformación de balanceo que produce que los gramianos de controlabilidad y observabilidad diagonalizados $\hat{W}_c$ y $\hat{W}_o$ equivalgan ambos a una misma matriz diagonal real $\mathbf{D}$, de modo que $\hat{W}_c \equiv \hat{W}_o \equiv \mathbf{D}$. Asimismo, como W_c, W_o y $\hat{T}$ son no singulares, $\mathbf{D}$ debe ser no singular también. Así, por el Teorema 3.1, las matrices $(W_c)^{-1}$ y W_o son diagonalizables por la transformación congruente $\hat{T}$, con lo cual el producto de gramianos W_cW_o diagonalizado por $\hat{T}$ puede expresarse como

$$\hat{T}^{-1}W_cW_o\hat{T} = \hat{T}^{-1}W_c\hat{T}^{-T}\hat{T}^TW_o\hat{T} = \hat{W}_c\hat{W}_o = \mathbf{D^2} > 0. \tag{A.2}$$

Esto significa que W_cW_o es similar a una matriz diagonal positiva $\mathbf{D^2}$ dada por el producto de matrices diagonales $\hat{W}_c\hat{W}_o$, el cual equivale a $\mathbf{D_1D_2}$ si T se utiliza como la transformación diagonalizante para W_cW_o. Así pues, 3) $\Rightarrow$ 2).

Ahora bien, si del Teorema 3.3 se sustituye el producto de gramianos $W_{co}^2 = W_cW_o$ en el primer elemento del desarrollo (A.2), resulta entonces

$$\hat{T}^{-1}W_{co}^2\hat{T} = \hat{T}^{-1}W_{co}\hat{T}\hat{T}^{-1}W_{co}\hat{T} = \hat{W}_{co}\hat{W}_{co}, \tag{A.3}$$

donde el cuadrado del gramiano cruz diagonalizado $\hat{W}_{co}\hat{W}_{co}$ es una matriz diagonal real positiva.

Finalmente, de una de las suposiciones iniciales de la Proposición 4.1, en la que el gramiano cruz $\hat{W}_{co} = T^{-1}W_{co}T$ es similar a una matriz diagonal real a través de la matriz no singular T; y de la observación (A.1), en la que $\hat{T}^{-1}W_{co}\hat{T} \equiv T^{-1}W_{co}T$; se deduce que $\hat{W}_{co}$ es una matriz diagonal real. Consecuentemente, 2) $\Rightarrow$ 1). Por lo que se demuestra la secuencia de implicaciones 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) de la Proposición 4.1. $\square$

