

# HOSM Controllers for Systems of 2 Outputs with Relative Degree 2

Angel Mercado-Uribe and Jaime A. Moreno

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Coyoacán, Ciudad de México, 04510, México.  
(Email addresses: joseangelm814@gmail.com, JMorenoP@i.unam.mx)*

**Abstract:** In this paper we present the Lyapunov-based design of Higher-Order Sliding-Mode controllers for MIMO systems with uncertain input matrix. For simplicity we restrict the presentation to  $2 \times 2$  MIMO systems and relative degree 2. These controllers can stabilize the origin of the MIMO system despite of matched bounded uncertainties/perturbations. We consider three different uncertainty structures of the input matrix, for which a controller can be designed, extending the results obtained so far in the literature. The results are illustrated by means of simulations.

**Keywords:** Homogeneous Control, Robust Control, Sliding Mode Control

## 1. INTRODUCCIÓN

La regulación o el seguimiento de referencias para las salidas de un sistema dinámico es una de las principales tareas en teoría de control (Khalil, 2002). Sin embargo, el principal problema que se puede tener al realizar esta tarea es que los sistemas físicos no pueden ser modelados completamente y por lo tanto es necesario lidiar con incertidumbres y perturbaciones.

Usualmente se utiliza la retroalimentación estática de los estados  $x$ , siendo un controlador lineal el caso más común. Este tipo de controladores son capaces de lograr estabilidad exponencial y por ende pueden rechazar perturbaciones e incertidumbres que se encuentren acotadas por la norma del estado  $\|x\|$ . Sin embargo, se tiene un problema si se tiene una perturbación  $\mu(t)$  no desvaneciente en el origen, es decir, cuando  $x = 0$ , ya que un controlador estático continuo no es capaz de rechazarla y sólo puede lograr Estabilidad Entrada-Estado (ISS, por sus siglas en inglés) respecto a la perturbación  $\mu(t)$ .

Una estrategia de control muy popular para el caso sistemas con Una Entrada y Una Salida (SISO, por sus siglas en inglés), que es capaz de rechazar perturbaciones acotadas, es el control por Modos Deslizantes de Alto Orden (HOSM, por sus siglas en inglés) (Utkin, 1992; Levant, 1993; Fridman y Levant, 2002; Levant, 2005; Ding *et al.*, 2016; Cruz-Zavala y Moreno, 2017). Sin embargo, en ocasiones es necesario diseñar controladores para sistemas de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO, por sus siglas en inglés). Si se conoce la matriz de desacoplamiento del sistema MIMO, y esta es invertible, entonces el diseño de un controlador HOSM multivariable se puede reducir al diseño de controladores SISO desacoplados, con lo que cualquier estrategia de diseño SISO es aplicable en este case (Levant, 2010).

Una estrategia interesante para diseñar controladores HOSM para sistemas MIMO es el método de la función de

Lyapunov implícita, propuesta en (Polyakov, 2012; Polyakov *et al.*, 2015). Ya que la función de Lyapunov se da implícitamente, es necesario calcularla numéricamente en línea. Una ventaja interesante de este método radica en que el controlador es diseñado por medio de desigualdades matriciales lineales. Puede ser utilizado para los casos SISO y MIMO, si se conoce la matriz de desacoplamiento. Cuando esta es incierta, no es posible realizar el diseño del controlador.

En los últimos años, se han presentado algunos resultados de controladores HOSM para el caso MIMO (Defoort *et al.*, 2009; Levant, 2010, 2014; Levant y Dvir, 2014; Levant y Livne, 2015, 2016; Levant y Shustin, 2018). En estos trabajos se asume que no se conoce exactamente la matriz de desacoplamiento del sistema. Sin embargo, básicamente se pide que esta sea una matriz diagonal dominante por renglones. Estos métodos de diseño no hacen uso de funciones de Lyapunov. Motivados por estos resultados, en Mercado y Moreno (2019) se presenta un controlador MIMO por modos deslizantes de orden superior, cuyo diseño utiliza una función de Lyapunov homogénea, basa en los desarrollos para sistemas SISO de (Cruz-Zavala y Moreno, 2017). En contraste con los resultados previos, se pide que la matriz de desacoplamiento sea diagonalizable por medio de una transformación lineal. El trabajo es presentado para el caso de dos entradas y dos salidas.

En este trabajo, se busca extender el resultado presentado en (Mercado y Moreno, 2019) del uso de funciones de Lyapunov para otras situaciones de incertidumbre en la matriz de desacoplamiento. Consideraremos 3 casos diferentes y nos restringiremos (por simplicidad) a sistemas MIMO con dos entradas y salidas y de grado relativo dos.

## 2. PRELIMINARES

Dados  $n$  pesos  $r_i > 0$  de las componentes del vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , el operador (lineal) dilatación se define como  $\Delta_\epsilon := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$ , para  $\epsilon > 0$ .  $\mathbf{r}$  es el vector de

pesos. Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (respectivamente, un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o un campo vectorial multivaluado  $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ ) es  $\mathbf{r}$ -homogéneo de grado  $m \in \mathbb{R}$  si la identidad  $V(\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m V(x)$  se cumple (o  $f(\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} f(x)$ ,  $F(\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} F(x)$ ), [Bacciotti y Rosier (2005)], [Moreno (2016)]. La norma homogénea

es definida por  $\|x\|_{\mathbf{r},p} := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , para cualquier  $p \geq 1$ . Asimismo, recordamos la siguiente propiedad de funciones homogéneas semicontinuas:

*Lema 1.* Cruz-Zavala y Moreno (2017) Sean  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones semicontinuas por abajo (respectivamente, por arriba) y  $\mathbf{r}$ -homogéneas de grado  $p > 0$ . Supongase que  $\gamma(x) \geq 0$  (resp.  $\gamma(x) \leq 0$ ) en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\eta(x) > 0$  (resp.  $\eta(x) < 0$ ) para toda  $x \neq 0$  tal que  $\gamma(x) = 0$ , entonces existen las constantes  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  y  $c > 0$ , tal que para toda  $\lambda \geq \lambda^*$  y toda  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \eta(x) + \lambda \gamma(x) &\geq c \|x\|_{\mathbf{r},p}^m \\ (\text{resp. } \eta(x) + \lambda \gamma(x) &\leq -c \|x\|_{\mathbf{r},p}^m). \end{aligned}$$

Recordamos que para sistemas homogéneos, la estabilidad local implica estabilidad global y su grado de homogeneidad determina el tipo de estabilidad [Bacciotti y Rosier (2005)]: (i)  $l < 0$  estabilidad en tiempo finito, (ii)  $l = 0$  estabilidad exponencial, (iii)  $l > 0$  estabilidad racional.

**Notación:** El símbolo  $[z]^p = |z|^p \text{sign}(z)$  denota la potencia signada  $p$  de  $z$ , con  $z \in \mathbb{R}$  y  $p \in \mathbb{R}$ .

### 2.1 Planteamiento del Problema

Considérese un sistema MIMO de dos salidas y dos entradas en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= x_{1,2}, & \dot{x}_{1,2} &= g_{1,1}(t, x) (u + \mu(t, x)) \\ \dot{x}_{2,1} &= x_{2,2}, & \dot{x}_{2,2} &= g_{2,1}(t, x) (u + \mu(t, x)), \\ y_1 &= x_{1,1}, & y_2 &= x_{2,1} \end{aligned} \quad (1)$$

dónde  $x = [x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}]^T \in \mathbb{R}^4$  es el vector de estados (medidos),  $y = [y_1, y_2]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de salidas a regular,  $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2$  corresponde a las variables de control,  $\mu = [\mu_1, \mu_2]^T \in \mathbb{R}^2$  representa incertidumbres y/o perturbaciones acopladas.  $g_1 \in \mathbb{R}^2$  y  $g_2 \in \mathbb{R}^2$  son vectores fila con los coeficientes de control, y

$$G = [g_1^T \ g_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (2)$$

es la matriz de desacoplamiento. El grado relativo de las salidas  $y_1$  y  $y_2$  es dos, lo cual significa que la entrada de control aparece por primera vez en  $y_1^{(2)}$ ,  $y_2^{(2)}$ , y que la matriz de desacoplamiento  $G$  es no singular (Isidori (1995)).  $\mathbf{r} = (r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2}) \in \mathbb{R}_+^4$  es el vector de pesos de homogeneidad.

Consideraremos que  $G$  es incierta, y daremos algunas medidas de incertidumbre que posibilitan el diseño de un controlador. Sin embargo, para todos los casos se asume que los términos  $g_{1,1}$  y  $g_{2,2}$  no pueden anularse en ningún instante. En particular, podemos asumir que son positivos (otros signos pueden tratarse fácilmente)

$$g_{1,1} \geq \underline{g}_{1,1} > 0, \quad g_{2,2} \geq \underline{g}_{2,2} > 0, \quad \det(G) \neq 0. \quad (3)$$

El objetivo de control es estabilizar el origen del sistema (1) en tiempo finito, rechazando el vector de perturbaciones acotadas  $\mu(t, x)$ . Para lograr lo anterior, se busca

diseñar controladores por HOSM. Nótese que se asume que se pueden medir todos los estados, y las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  corresponden a la variable a regular. Sin embargo, en el caso en que solo se midan las variables de salida se puede usar un diferenciador robusto y exacto para estimar los estados no medidos.

## 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El diseño del controlador presentado en este trabajo considera el caso de dos salidas de grado relativo 2. Sin embargo, es importante mencionar que la estrategia de diseño de control es independiente del grado relativo de las salidas. Asimismo, se busca que el sistema en lazo cerrado sea homogéneo con grado de homogeneidad  $d = -1$ , por lo que los pesos de homogeneidad son  $r_{1,1} = r_{2,1} = r_1 = 2$  y  $r_{1,2} = r_{2,2} = r_2 = 1$ , resultando el grado de homogeneidad de las leyes de control como  $r_u = 0$ .

De igual manera, se considerarán tres estructuras para la matriz de desacoplamiento. En la primera, se asume que los sistemas se encuentran en cascada y la matriz de desacoplamiento es una matriz triangular, es decir  $g_1 = [g_{1,1}, g_{1,2}]$ ,  $g_2 = [0, g_{2,2}] \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, m$ . En el segundo caso, se asume que la matriz  $G$  es triangularizable por una transformación lineal. Finalmente, se tendrá un caso más general, donde la matriz de desacoplamiento no tiene una forma en particular.

### 3.1 Sistema en cascada

En este caso, se asume (sin pérdida de generalidad) que

$$g_{2,1} = 0 \quad (4)$$

por lo que el acoplamiento del sistema sólo aparece en el primer canal de la entrada, es decir en  $\dot{x}_{1,2}$ . Asimismo, se tiene la siguiente cota

$$|g_{1,2}| \leq \bar{g}_{1,2}. \quad (5)$$

*Teorema 1.* Considérese el sistema (1), donde la matriz de desacoplamiento  $G$  satisface (3), (4) y (5); y el vector de perturbaciones  $\mu$  acotado por  $\|\mu\|_{\infty} < \mu_{\max}$ , entonces la ley de control

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_{1,2} \left[ [x_{1,2}]^0 + k_{1,1}^2 x_{1,1} \right]^0 \\ u_2 &= -k_{2,2} \left[ [x_{2,2}]^0 + k_{2,1}^2 x_{2,1} \right]^0 \end{aligned} \quad (6)$$

estabiliza el origen del sistema (1), para cualquier  $k_{1,1}$ ,  $k_{2,1} > 0$ , y ganancias  $k_{2,2} > \mu_{\max}$ ,  $k_{1,2} > \frac{\bar{g}_{1,2} k_{2,2}}{\underline{g}_{1,1}} + \mu_{\max}$  suficientemente grandes.  $\square$

Nótese que en este caso, el controlador  $u_2$  actúa como una perturbación que tiene que ser compensada por el controlador  $u_1$ . Asimismo, es importante resaltar que debido a la discontinuidad, el efecto del controlador  $u_2$  en el canal de  $u_1$ , no desaparece aún cuando  $x_{2,1}$  y  $x_{2,2}$  son iguales a cero.

### 3.2 Sistema triangularizable

En este caso, el acoplamiento del sistema aparece en ambos canales de la entrada, es decir en  $\dot{x}_{1,2}$  y  $\dot{x}_{2,2}$ . La matriz de desacoplamiento  $G$  puede ser variante en el tiempo aunque se asume que es triangularizable superior

por una transformación lineal, es decir  $g_{1,1}$  es proporcional a  $g_{2,1}$  o bien triangularizable inferior, es decir  $g_{2,2}$  es proporcional a  $g_{1,2}$ . Sin embargo, es importante resaltar que no se conoce dicha transformación y por lo tanto no es posible llevarlo a un sistema en forma de cascada. Para este resultado, se considerará (sin pérdida de generalidad) el caso triangularizable superior. Por lo tanto, es posible formular el siguiente teorema

**Teorema 2.** Considérese el sistema (1), donde la matriz de desacoplamiento  $G$  es triangularizable superior por una transformación lineal, es decir  $\frac{g_{1,1}}{g_{2,1}}$  es constante, entonces para  $\beta \geq 2$ , la ley de control

$$\begin{aligned} u_1 &= -K_{u_1} [K_{1,1}u_{\beta_1} + K_{1,2}u_{\beta_2}]^0 \\ u_2 &= -K_{u_2} [K_{2,1}u_{\beta_1} + K_{2,2}u_{\beta_2}]^0 \\ u_{\beta_1} &= [x_{1,2}]^\beta + k_{1,1}^\beta [x_{1,1}]^{\frac{\beta}{2}} \\ u_{\beta_2} &= [x_{2,2}]^\beta + k_{2,1}^\beta [x_{2,1}]^{\frac{\beta}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

estabiliza el origen del sistema (1) para cualquier  $k_{1,1}$ ,  $k_{2,1} > 0$ ,  $K_{u_1} > K_{u_2} > \|\mu\|_\infty$  suficientemente grandes y ganancias  $K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix}$  que satisfacen

$$K_{1,1} > 0, \quad K_{1,2}g_{2,1} > 0, \quad \det(K)\det(G) > 0. \quad (8)$$

□

Este resultado es similar al presentado anteriormente en (Mercado y Moreno, 2019), donde se tiene un acoplamiento en ambos canales de la entrada, aunque se pide una estructura en particular para el sistema.

### 3.3 Sistema más general

En este caso, nuevamente se tiene un acoplamiento en ambos canales de la entrada y puede verse como una generalización del sistema en cascada. Debido a que se tiene el acoplamiento del sistema en ambos canales de entrada, se añade una restricción adicional lo que resulta en ganancias de control más conservativas. Sin embargo, en este caso, la matriz de desacoplamiento  $G$  no necesita ser triangularizable y sólo se asume que se conocen los signos de sus elementos así como las cotas siguientes

$$|g_{1,2}| < \bar{g}_{1,2}, \quad |g_{2,1}| < \bar{g}_{2,1} \quad (9)$$

Obteniendo el siguiente teorema

**Teorema 3.** Considérese el sistema (1), donde la matriz de desacoplamiento  $G$  satisface (3) y (9), entonces la ley de control

$$u = -K_u \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_{1,2}]^2 + k_{1,1}^2 x_{1,1} \\ [x_{2,2}]^2 + k_{2,1}^2 x_{2,1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

estabiliza el origen del sistema (1) para cualquier  $k_{1,1}$ ,  $k_{2,1} > 0$ ,  $K_u > \|\mu\|_\infty$  suficientemente grande y satisfaciendo las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} K_{1,1} &> \frac{\bar{g}_{1,2} [|K_{2,2}| - |K_{2,1}|] + |K_{1,2}|}{g_{1,1}}, \\ K_{1,1} &> 0, \quad K_{2,1}g_{1,2} &\geq 0 \\ K_{2,2} &> \frac{\bar{g}_{2,1} [|K_{1,1}| - |K_{1,2}|] + |K_{2,1}|}{g_{2,2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$K_{2,2} > 0, \quad K_{1,2}g_{2,1} \geq 0$$

□

Es importante notar que si las ganancias  $K_{2,1}$  y  $K_{2,1}$  son iguales a cero, este resultado es similar al presentado en (Levant, 2010), donde básicamente se pide que la matriz  $G$  tenga determinante positivo y sea diagonalmente dominante por renglones. En este caso se asume que se conoce más información, por lo que las ganancias son menos restrictivas. Es importante resaltar que la condición (11) sólo se puede satisfacer si se cumple

$$\frac{\bar{g}_{1,2}\bar{g}_{2,1}}{g_{1,1}g_{2,2}} < 1.$$

## 4. FUNCIÓN DE LYAPUNOV

En esta sección, presentaremos la función de Lyapunov que prueba los resultados anteriores. Basados en la función de Lyapunov presentada en (Cruz-Zavala y Moreno, 2017) para el caso SISO, se propone

$$\begin{aligned} V &= \gamma_{1,1}V_{1,1} + \gamma_{2,1}V_{2,1} + [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{bmatrix} W_{1,2} \\ W_{2,2} \end{bmatrix}, \\ \gamma_{1,1}, \gamma_{2,1}, \alpha_1, \alpha_2 &> 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= \frac{2}{p} |x_{1,1}|^{\frac{p}{2}}, \quad V_{2,1} = \frac{2}{p} |x_{2,1}|^{\frac{p}{2}}, \\ W_{1,2} &= \frac{1}{p} |x_{1,2}|^p + k_{1,1}^{p-1} [x_{1,1}]^{\frac{p-1}{2}} x_{1,2} + \frac{p-1}{p} k_{1,1}^p |x_{1,1}|^{\frac{p}{2}} \\ W_{2,2} &= \frac{1}{p} |x_{2,2}|^p + k_{2,1}^{p-1} [x_{2,1}]^{\frac{p-1}{2}} x_{2,2} + \frac{p-1}{p} k_{2,1}^p |x_{2,1}|^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Derivando  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_{1,1}\dot{V}_{1,1} + \gamma_{2,1}\dot{V}_{2,1} + [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{bmatrix} \dot{W}_{1,2} \\ \dot{W}_{2,2} \end{bmatrix} \\ &= \phi_1 + \phi_2, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_1 = \gamma_{1,1}\dot{V}_{1,1} + \gamma_{2,1}\dot{V}_{2,1} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{1,2}}{\partial x_{1,1}} x_{1,2} \\ \frac{\partial W_{2,2}}{\partial x_{2,1}} x_{2,2} \end{bmatrix},$$

$$\phi_2 = \sigma^T \bar{\alpha} G [u + \mu],$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} [x_{1,2}]^{p-1} + k_{1,1}^{p-1} [x_{1,1}]^{\frac{p-1}{2}} \\ [x_{2,2}]^{p-1} + k_{2,1}^{p-1} [x_{2,1}]^{\frac{p-1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\alpha} = \text{diag}(\alpha).$$

Es importante notar que se debe enfocar en el término  $\phi_2$ , siendo la parte donde tenemos el acoplamiento. Por lo tanto, el análisis principal será de este. Considerando las tres situaciones anteriores.

### 4.1 Sistema en cascada

Para el sistema en cascada, el término  $\phi_2$  se convierte en

$$\phi_2 = -\sigma^T M \begin{bmatrix} [x_{1,2}]^2 + k_{1,1}^2 x_{1,1} \\ [x_{2,2}]^2 + k_{2,1}^2 x_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - \frac{\mu_1}{k_{1,2}} \\ 0 - \frac{\mu_2}{k_{2,2}} \end{bmatrix},$$

donde

$$M = \bar{\alpha} G \begin{bmatrix} k_{1,2} & 0 \\ 0 & k_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 g_{1,1} k_{1,2} & \alpha_1 g_{1,2} k_{2,2} \\ \alpha_2 g_{2,1} k_{1,2} & \alpha_2 g_{2,2} k_{2,2} \end{bmatrix}$$

Este término es negativo semidefinido si  $M$  es diagonal dominante por renglones, lo cual ocurre si se cumple

$$g_{1,1}k_{1,2} > g_{1,2}k_{2,2} + \|\mu\|_\infty, \quad g_{2,2}k_{2,2} > \|\mu\|_\infty$$

y por lo tanto, de acuerdo al Lema 1 puede dominar a  $\phi_1(x)$  para  $k_{1,2}$  y  $k_{2,2}$  suficientemente grandes. Este término se hace cero en el conjunto

$$S_1 = \left\{ x \mid x_{1,2} = k_{1,1} [x_{1,1}]^{\frac{1}{2}} \cap x_{2,2} = k_{2,1} [x_{2,1}]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

en el cual, la derivada se convierte en

$$\dot{V}|_{S_1} = \gamma_{1,1}\dot{V}_{1,1}|_{S_1} + \gamma_{2,1}\dot{V}_{2,1}|_{S_1}$$

la cual es negativa definida por construcción y por lo tanto  $\dot{V} < 0$ . Así, queda demostrado que el origen del sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito, rechazando  $\mu$ .

#### 4.2 Sistema triangularizable

En este caso, se asume  $p = \beta + 1$ . Por lo que el término  $\phi_2(x)$  se convierte en

$$\phi_2 = -\sigma^T M \begin{bmatrix} K_{u_1} [K_{1,1}u_{\beta_1} + K_{1,2}u_{\beta_2}]^0 - \mu_1 \\ K_{u_2} [K_{2,1}u_{\beta_1} + K_{2,2}u_{\beta_2}]^0 - \mu_2 \end{bmatrix},$$

donde

$$\sigma = \begin{bmatrix} u_{\beta_1} \\ u_{\beta_2} \end{bmatrix}^T, \quad M = \bar{\alpha}G = \begin{bmatrix} \alpha_1 g_{1,1} & \alpha_1 g_{1,2} \\ \alpha_2 g_{2,1} & \alpha_2 g_{2,2} \end{bmatrix}$$

Si se cumple que  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_2 = \frac{K_{1,2}g_{1,1}}{K_{1,1}g_{2,1}}$ , donde  $K_{1,1} > 0$  y  $\text{sign}(K_{1,2}) = \text{sign}(g_{2,1})$ . Es importante resaltar que  $\alpha_2$  es una constante positiva, ya que  $\frac{g_{1,1}}{g_{2,1}}$  por planteamiento del problema, es constante. Asimismo, si  $g_{2,1} = 0$ , entonces se definiría  $K_{1,2} = 0$  y se puede asumir simplemente  $\alpha_2 = 1$ . Considerando el caso  $g_{2,1} \neq 0$ , se tiene

$$M = \begin{bmatrix} \frac{g_{1,1}}{K_{1,2}g_{1,1}} & \frac{g_{1,2}}{K_{1,2}g_{1,1}} \\ \frac{K_{1,2}g_{1,1}}{K_{1,1}} & \frac{K_{1,2}g_{1,1}}{K_{1,1}g_{2,1}} g_{2,2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el término  $\phi_2(x)$  puede escribirse como

$$\phi_2 = -|g_{1,1}| K_{u_1} \sigma^T \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} u_{\beta_1} + \frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} u_{\beta_2} \end{bmatrix}^0 - \frac{\mu_1}{K_{u_1}} \right] - K_{u_2} \begin{bmatrix} u_{\beta_1} \\ u_{\beta_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{1,2} \\ \alpha_2 g_{2,2} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} K_{2,1}u_{\beta_1} + K_{2,2}u_{\beta_2} \end{bmatrix}^0 - \frac{\mu_2}{K_{u_2}} \right],$$

Donde el primer término es positivo semidefinido para  $|\mu_1| < K_{u_1}$  y de acuerdo al Lema 1, puede dominar para  $K_{u_1}$  suficientemente grande. Este término se hace cero en

$$S_1 = \left\{ x \mid u_{\beta_1} = -\frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} u_{\beta_2} \right\}$$

En este conjunto, la derivada de  $V$  se convierte en

$$\dot{V} = \phi_1 - K_{u_2} \left[ \left( \alpha_2 g_{2,2} - g_{1,2} \frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} \right) u_{\beta_2} \right] \cdot \left[ \left( \left( K_{2,2} - K_{2,1} \frac{K_{1,2}}{K_{1,1}} \right) u_{\beta_2} \right)^0 - \frac{\mu_2}{K_{u_2}} \right],$$

reduciendo términos, se tiene

$$\dot{V} < \phi_1 - \alpha_2 K_{u_2} |g_{1,1}| \det(G) [\det(K)]^0 \left[ 1 - \frac{\mu_2}{K_{u_2}} \right] |u_{\beta_2}|,$$

donde el último término es negativo semidefinido si  $\text{sign}(\det(G)) = \text{sign}(\det(K))$ . Utilizando, nuevamente

el Lema 1, este término puede dominar para  $K_{u_2}$  suficientemente grande. Este término se hace cero cuando  $u_{\beta_1} = u_{\beta_2} = 0$  y por ende  $\dot{V}$  es negativa definida por construcción, haciendo que el origen del sistema en lazo cerrado sea estable en tiempo finito a pesar de  $\mu$ .

#### 4.3 Sistema más general

En el último caso, el término  $\phi_2$  se convierte en

$$\phi_2 = -\sigma^T K_u M \begin{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{1,1} \end{bmatrix}^2 + k_{1,1}^2 x_{1,1} \right]^0 - \frac{\mu_1}{k_{1,2}} \\ \left[ \begin{bmatrix} x_{2,2} \\ x_{2,1} \end{bmatrix}^2 + k_{2,1}^2 x_{2,1} \right]^0 - \frac{\mu_2}{k_{2,2}} \end{bmatrix},$$

donde

$$M = \bar{\alpha}GK = \bar{\alpha} \begin{bmatrix} g_{1,1}K_{1,1} + g_{1,2}K_{2,1} & g_{1,1}K_{1,2} + g_{1,2}K_{2,2} \\ g_{2,1}K_{1,1} + g_{2,2}K_{2,1} & g_{2,1}K_{1,2} + g_{2,2}K_{2,2} \end{bmatrix},$$

siendo  $\phi_2$  negativo semidefinido si  $M$  es diagonal dominante por renglones, es decir, si se cumple

$$g_{1,1}K_{1,1} + g_{1,2}K_{2,1} - |g_{1,1}K_{1,2} + g_{1,2}K_{2,2}| > 0 \\ g_{2,1}K_{1,2} + g_{2,2}K_{2,2} - |g_{2,1}K_{1,1} + g_{2,2}K_{2,1}| > 0$$

y utilizando el Lema 1, puede dominar para  $K_u > 0$  suficientemente grande. Este último término, se hace cero en el conjunto

$$S_1 = \left\{ x \mid x_{1,2} = k_{1,1} [x_{1,1}]^{\frac{1}{2}} \cap x_{2,2} = k_{2,1} [x_{2,1}]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

en el cual, la derivada se convierte en

$$\dot{V}|_{S_1} = \gamma_{1,1}\dot{V}_{1,1}|_{S_1} + \gamma_{2,1}\dot{V}_{2,1}|_{S_1}$$

la cual es negativa definida por construcción y por lo tanto  $\dot{V} < 0$ . Por lo tanto, el origen del sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito, rechazando el vector de perturbaciones  $\mu$ .

## 5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

En esta sección se realizarán simulaciones con tres sistemas MIMO de dos salidas para las formas previamente vistas, donde se simularán los tres controladores. Para ello, se utilizará Simulink de MATLAB<sup>TM</sup> utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tiempo de muestreo de  $10^{-4}$  s y condiciones iniciales  $x(0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ . Asimismo, se considerará el mismo vector de perturbaciones en todos los casos, el cual corresponde a

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cos(t) \\ 3 \sin(2t) \end{bmatrix}$$

cuya norma infinito es  $\|\mu\|_\infty = 3$ . De igual forma, se considerarán las siguientes variables base

$$u_{\beta_1} = [x_{1,2}]^2 + x_{1,1} \\ u_{\beta_2} = [x_{2,2}]^2 + 2^2 x_{2,1},$$

con los cuales, se diseñarán los controladores, con la siguiente notación: el controlador asociado al Teorema 1 será representado por  $u_c$ , el asociado al Teorema 2 por  $u_t$  y el asociado al Teorema 1 por  $u_g$ .

#### 5.1 Sistema en cascada

El primer sistema, corresponde a un sistema en cascada y puede escribirse como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 + \sin(t) & 5 - \cos(t) \\ 0 & 2 + \sin(5t) \end{bmatrix} [u + \mu]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (12)$$

en este caso, se tienen las siguientes cotas

$$|g_{1,1}| \geq 2, \quad |g_{2,2}| \geq 1, \quad |g_{1,2}| \leq 6$$

por lo tanto, se proponen los siguientes controladores

$$u_c = - \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_{\beta_1}]^0 \\ [u_{\beta_2}]^0 \end{bmatrix}$$

$$u_t = - \begin{bmatrix} 7 [u_{\beta_1}]^0 \\ 3,5 [5u_{\beta_1} + 2u_{\beta_2}]^0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$u_g = - 4 \begin{bmatrix} 4,5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_{\beta_1}]^0 \\ [u_{\beta_2}]^0 \end{bmatrix}$$

Es importante mencionar que el controlador  $u_c$  satisface también las condiciones del Teorema 3. Sin embargo, como se puede ver, también es posible añadir términos adicionales como en  $u_g$ .

En las Figuras 1 - 3, se muestra el comportamiento de los estados del sistema en lazo cerrado, aplicando los tres diseños de controladores. En todas las figuras, es posible ver que que todos los controladores son capaces de estabilizar el origen del sistema, básicamente con la misma precisión.

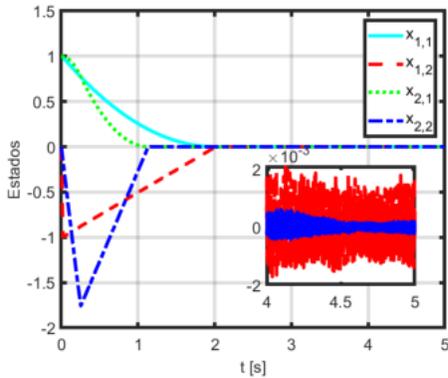


Figura 1. Comportamiento de estados ( $u_{c_1}$ )

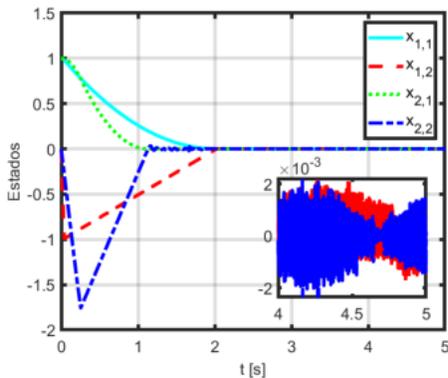


Figura 2. Comportamiento de estados ( $u_{t_1}$ )  
Número Especial 2020

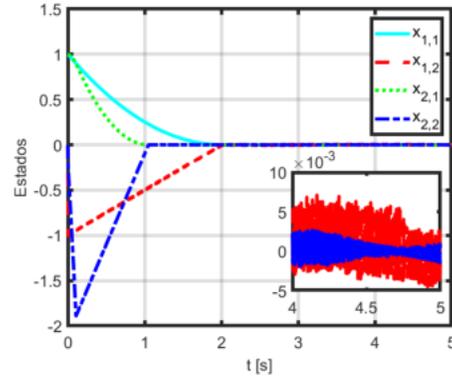


Figura 3. Comportamiento de estados ( $u_{g_1}$ )

### 5.2 Sistema en triangularizable

En este caso, se considera el sistema triangularizable

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 + \sin(t) & 5 - \cos(t) \\ 2(3 + \sin(t)) & 2 + \sin(5t) \end{bmatrix} [u + \mu]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (14)$$

con las siguientes cotas

$$|g_{1,1}| \geq 2, \quad |g_{2,2}| \geq 1, \quad |g_{1,2}| \leq 7 \quad |g_{2,1}| \leq 6,$$

donde el controlador de cascada no puede ser aplicado, ya que no tiene la estructura correcta y no es posible encontrar solución a la ecuación (11) del Teorema 3, ya que  $\frac{\bar{g}_{1,2}\bar{g}_{2,1}}{\bar{g}_{1,1}\bar{g}_{2,2}} = 21 > 1$ . Por lo tanto, el único controlador permisible se define como

$$u_t = - \begin{bmatrix} 7 [u_{\beta_1} + u_{\beta_2}]^0 \\ 3,5 [u_{\beta_1} - 2u_{\beta_2}]^0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde es importante resaltar que aparece un cambio de signo en el segundo controlador, el cual se debe a que el determinante de  $G$  es negativo.

En la Figura 4, se muestra el comportamiento de los estados del sistema en lazo cerrado. En ella, es posible ver que los estados convergen al origen.

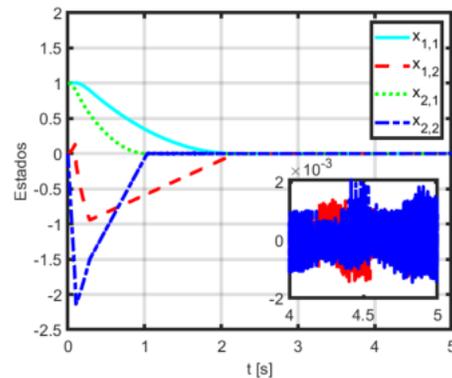


Figura 4. Comportamiento de estados ( $u_{t_2}$ )

### 5.3 Sistema más general

En este caso, se considerará el siguiente sistema triangularizable  
Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6 + \sin(t) & 1 - \cos(t) \\ 2 + \sin(t) & 2 + 0,5 \sin(5t) \end{bmatrix} [u + \mu], \quad (16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

en este caso, se tienen las siguientes cotas

$$|g_{1,1}| \geq 5, \quad |g_{2,2}| \geq 1,5, \quad |g_{1,2}| \leq 2 \quad |g_{2,1}| \leq 3$$

dado que el sistema no está en cascada y no es triangulizable, el único controlador permisible es

$$u_g = -4 \begin{bmatrix} 2 & 1,25 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_{\beta_1}]^0 \\ [u_{\beta_2}]^0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Finalmente, en la Figura 5, se muestra el comportamiento de los estados del sistema en lazo cerrado, donde se observa los estados convergen al origen.

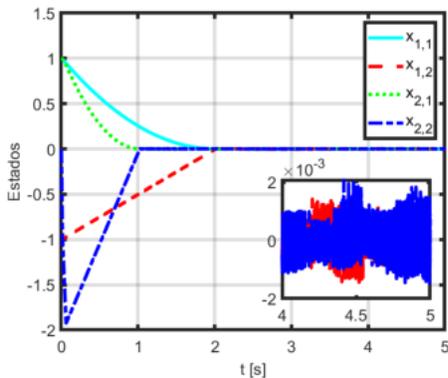


Figura 5. Comportamiento de estados ( $u_{g3}$ )

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una función de Lyapunov homogénea, la cual permite diseñar múltiples controladores HOSM, los cuales son capaces de estabilizar el origen de un sistema de dos salidas, rechazando perturbaciones acopladas y acotadas.

Es importante resaltar que los controladores no son del todo comparables, ya que en cada uno de ellos se asumen condiciones diferentes. Si bien, el diseño en cascada podría verse un caso particular de los otros controladores, debido a esta suposición las condiciones sobre las ganancias son menos restrictivas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de PAPIIT-UNAM, proyecto IN110719, y de CONACYT, CVU 705765.

## REFERENCIAS

- Bacciotti, A. y L. Rosier (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, 2<sup>nd</sup> ed. New York.
- Cruz-Zavala, E. y J. A. Moreno (2017). Homogeneous High Order Sliding Mode Design: a Lyapunov Approach. *Automatica* **80**, 232–238.
- Defoort, M., T. Floquet, A. Kokosy y W. Perruquetti (2009). A Novel Higher Order Sliding Mode Control Scheme. *Systems & Control Letters* **58**, 102–108.

- Ding, S., A. Levant y S. Li (2016). Simple Homogeneous Sliding-Mode Controller. *Automatica* **67**, 22–32.
- Fridman, L. y A. Levant (2002). *Sliding Mode in Control Engineering*. Marcel Dekker, Inc. High Order Sliding Modes.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, Berlin.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 3rd ed.
- Levant, A. (1993). Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control. *International J. Control* **58**(6), 1247–1263.
- Levant, A. (2005). Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1812–1816.
- Levant, A. (2010). Gain-scheduled high-order mimo sliding mode control. In: *49th Conference on Decision and Control (CDC)* (IEEE, Ed.). pp. 5150–5155.
- Levant, A. (2014). Finite-Time Stabilization of Uncertain MIMO Systems. In: *53rd Conference on Decision and Control* (IEEE, Ed.). pp. 4753–4758.
- Levant, A. y B. Shustin (2018). Quasi-Continuous MIMO Sliding-Mode Control. *IEEE Transactions on Automatic Control* **63**(9), 3068–3074.
- Levant, A. y M. Livne (2015). Uncertain Disturbances' Attenuation by Homogeneous Multi-Input Multi-Output Sliding Mode Control and its Discretisation. *IET Control Theory Applications* **9**(4), 515–525.
- Levant, A. y M. Livne (2016). Weighted Homogeneity and Robustness of Sliding Mode Control. *Automatica* **72**, 186 – 193.
- Levant, A. y Y. Dvir (2014). Accelerated High-Order MIMO Sliding Mode control. In: *13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)* (IEEE, Ed.). pp. 1–6.
- Mercado, A. y J. A. Moreno (2019). Control mimo por hoshm para sistemas con grado relativo 2. In: *Congreso Nacional de Control Automático* (AMCA, Ed.). p. 6.
- Moreno, J.A. (2016). Discontinuous Integral Control for Mechanical Systems. In: *55th Annual Conference on Decision and Control (CDC)* (IEEE, Ed.). Las Vegas, USA.
- Polyakov, A. (2012). Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **57** (8), 2106–2110.
- Polyakov, A., D. Efimov y W. Perruquetti (2015). Finite-Time and Fixed-Time Stabilization: Implicit Lyapunov Function Method. *Automatica* **51**(1), 332–340.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Verlag.