

Functional generalized dynamic observer for discrete Takagi-Sugeno systems

Ángel-R. Guadarrama-Estrada* Gloria-L. Osorio-Gordillo*
Rodolfo-A. Vargas-Méndez* Yesica-I. Saavedra-Benítez*
Carlos-M. Astorga-Zaragoza*

* *Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado
Palmira S/N, Col. Palmira, Cuernavaca, Mor. México.
e-mail: angel.guadarrama19ee@cenidet.edu.mx*

Abstract. This document presents a design strategy of a discrete functional observer, which is used to estimate those state variables that are not available for measurement, also this strategy helps to complete the state variables vector, with the measured and estimated variables for control purposes. The proposed approach is based on the use of the generalized dynamic observer (GDO) which has additional degrees of freedom, which gives it characteristics of robustness to unexpected variations. The performance of the proposed methodology is evaluated in a 2GDL robotic arm system.

Keywords: Generalized Dynamic Functional Observer, Reduced Order Observer, Takagi-Sugeno System, 2-DOF Robotic Arm.

1. INTRODUCCIÓN

La representación de sistemas utilizando el enfoque Takagi-Sugeno (T-S), ha sido de gran interés en los últimos años, por ejemplo en Dezhi and Bin (2011); Zsófia et al. (2010); Bezzaucha (2013); Shodan (2016) por medio de relaciones locales lineales de entrada-salida de un sistema no lineal. La principal propiedad de un modelo T-S es poder expresar la dinámica local de cada una de las no linealidades del sistema, delimitadas en una región propia.

Por otra parte, un observador es un sistema dinámico auxiliar que refleja el comportamiento de un sistema físico y es impulsado por mediciones de entrada-salida, para así poder proporcionar una estimación de los estados internos del sistema [Karim et al. (2017); Akhenak et al. (2003); Flores-Martínez et al. (2019); Heemels et al. (2010)]. El uso de los observadores en el diseño de sistemas de control, es una herramienta útil, ya que muchas veces no se cuenta con la medición de todas las variables de estado para fines de control, para lo cual es necesario estimar el resto de variables.

Dentro de la teoría de los observadores existen distintos metodologías para poder estimar las variables. En este artículo se utiliza un observador funcional, el cual estima una función lineal de los estados. Las aplicaciones utilizadas para los observadores funcionales consisten en el diseño de una ley de control en un formato de retroalimentación de estados [Bezzaoucha et al. (2013)], la estimación de un segmento o función de las variables no medibles

dentro del sistema [Pérez-Estrada et al. (2018); Yacine and Ichlal (2013); Nagy-Kiss et al. (2011)].

La estructura del observador considerada en este artículo, se denomina observador dinámico generalizado (GDO). Este tipo de observador tiene la característica de aumentar la precisión, mejorar la robustez, proporciona grados de libertad adicionales en el diseño, lo cual permite aumentar el margen de estabilidad y su capacidad de estimar directamente la función lineal del vector de estados sin la necesidad de estimar todos los estados individuales.

La principal contribución de este documento es el diseño del observador dinámico generalizado funcional discreto, para estimar las variables no disponibles para su medición. Este esquema es evaluado en un sistema de un brazo robótico de 2GDL, considerando el sistema en forma discreta, disminuyendo así el ciclo de muestreo de los sensores.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un sistema no lineal discreto bajo el marco de la representación T-S como

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2)$$

$$z(k) = Lx(k) \quad (3)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables

de salida medidas y $z(k) \in \mathbb{R}^q$ es la función lineal que se desea estimar. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$, son matrices conocidas, $\mu_i(x(k))$ son las funciones de ponderación y κ es el número de modelos locales lineales, el cual es determinado por $\kappa = 2^s$, siendo s el número de no linealidades en el sistema.

Para poder realizar el diseño del observador funcional, se asume que el sistema T-S cumple con la propiedad de observabilidad funcional.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} LA_i \\ CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \quad (4)$$

Explicación: La observabilidad funcional permite comprobar si la función lineal de los estados puede ser estimada, a partir de la información disponible de la entrada y salida del sistema.

Considere el observador funcional dinámico generalizado para el sistema (1)

$$\zeta(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) [N_i \zeta(k) + H_i v(k) + F_i y(k) + J_i u(k)] \quad (5)$$

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) [S_i \zeta(k) + G_i v(k) + M_i y(k)] \quad (6)$$

$$\hat{z}(k) = P\zeta(k) + Qy(k) \quad (7)$$

donde $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador funcional, $v(k) \in \mathbb{R}^{q_1}$ es un vector auxiliar y $\hat{z}(k)$ es el vector de estimación del observador. N_i , H_i , F_i , S_i , L_i , M_i , P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Considere una matriz $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ para definir el vector de error transformado $\varepsilon(k) = \zeta(k) - Tx(k)$ de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$\varepsilon(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) [N_i \varepsilon(k) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(k) + H_i v(k) + (J_i - T B_i) u(k)] \quad (8)$$

usando la definición de $\varepsilon(k)$ en las ecuaciones (6) y (7), puede ser reescritas como:

$$v(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) [S_i \varepsilon(k) + (S_i T + M_i C) x(k) + G_i v(k)] \quad (9)$$

$$\hat{z}(k) = P\varepsilon(k) + (PT + QC)x(k) \quad (10)$$

Suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen

- a) $N_i T + F_i C - T A_i = 0$ b) $J_i = T B_i$
c) $S_i T + M_i C = 0$ d) $PT + QC = L$

entonces la dinámica del error, formada por (8) y (9) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Usando la condición d) podemos expresar la ecuación (10) como:

$$\hat{z}(k) - z(k) = e_z(k) = P\varepsilon(k) \quad (12)$$

en este caso si las matrices \mathbb{A}_i son estables, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ y a su vez $\lim_{k \rightarrow \infty} e_z(k) = 0$.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

En esta sección se muestra la parametrización de las matrices del observador. Considere una matriz cualquiera de rango fila completo $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ tal que, $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ es de rango columna completo y además $\Omega = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$.

Las condiciones c) – d) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para que la ecuación (13) tenga una solución es necesario que se cumpla:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \\ L \end{bmatrix} = n \quad (14)$$

si esta condición se cumple, existen dos matrices de dimensiones $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ y $K \in \mathbb{R}^{q_0 \times p}$ tal que:

$$T + KC = E \quad (15)$$

la cual puede ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}}_{\Omega} = E \quad (16)$$

La solución de (16) está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = E\Omega^+ \quad (17)$$

que se puede descomponer como:

$$T = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz T de la ecuación (15) en la condición a) se puede escribir como:

$$N_i E + \bar{K}_i C = T A_i \quad (18)$$

donde $\bar{K}_i = F_i - N_i K$, la ecuación (18) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} N_i & \bar{K}_i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}}_{\Sigma} = T A_i \quad (19)$$

cuya solución general está dada por

$$\begin{bmatrix} N_i & \bar{K}_i \end{bmatrix} = T A_i \Sigma^+ - Z_i (I - \Sigma \Sigma^+) \quad (20)$$

donde Z_i es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios. La ecuación (20) puede ser reescrita como:

$$N_i = \underbrace{TA_i\Sigma^+}_{N_{1i}} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - \underbrace{Z_i(I - \Sigma\Sigma^+)}_{N_2} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{K}_i = \underbrace{TA_i\Sigma^+}_{\bar{K}_{1i}} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} - \underbrace{Z_i(I - \Sigma\Sigma^+)}_{\bar{K}_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (22)$$

Por otro lado, usando la ecuación (15) obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} \Sigma \quad (23)$$

Remplazando la ecuación (23) en (13) se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (24)$$

la cual tiene la siguiente solución general:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} W_{1i} \\ W_2 \end{bmatrix} (I - \Sigma\Sigma^+) \right) \begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (25)$$

donde W_{1i} y W_2 son matrices de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios. Entonces las matrices S_i , M_i , P y Q pueden ser escritas como:

$$S_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$M_i = -W_{1i}(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$P = L\Sigma^+ - W_2(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Q = L\Sigma^+ - W_2(I - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (29)$$

Por simplicidad se asume que $W_2 = 0$. Al usar (21) y (26) la dinámica de error del observador (11) puede escribirse como:

$$\varphi(k+1) = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(k) \quad (30)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Z_i & H_i \\ W_{1i} & G_i \end{bmatrix}$ y $\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$. El problema ahora consiste en encontrar la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (30) sea estable.

En la siguiente sección se presenta el análisis de estabilidad basado en Lyapunov, teniendo que resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) para obtener la matriz \mathbb{Y}_i .

3.1 Análisis de estabilidad del Observador

Teorema 1. Existen matrices \mathbb{Y}_i tales que la dinámica del error de estimación (30) es asintóticamente estable si existe una matriz X tal que satisface las siguientes LMIs

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} N_2^{T\perp} X_1 N_2^{T\perp T} & N_2^{T\perp} N_{1i} X_1 & 0 \\ (*) & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

$\forall i = [1, \dots, \kappa]$. Entonces las matrices \mathbb{Y}_i son parametrizadas de la siguiente manera:

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1} (\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{B}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+) \quad (33)$$

donde

$$\mathcal{K}_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\mathcal{V}_i - \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \mathcal{V}_i] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (35)$$

$$\mathcal{V}_i = (\mathcal{B}_r \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (36)$$

$$\text{con } \mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} -X_1 & 0 & N_{1i}^T X_1 & 0 \\ 0 & -X_2 & 0 & 0 \\ (*) & 0 & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, las matrices \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{Z} son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas que satisfacen $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\mathcal{R} > 0$ tal que \mathcal{V}_i sea positiva definida. Las matrices \mathcal{C}_l , \mathcal{C}_r , \mathcal{B}_l y \mathcal{B}_r son matrices de rango completo, tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$, respectivamente.

Demostración 1. Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\varphi(k)) = \varphi^T(k) X \varphi(k) > 0 \quad (37)$$

donde $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$, con $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$ y $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$.

La diferencia de $V(\varphi(k))$ a lo largo de la solución de (30) es

$$\begin{aligned} \Delta V(\varphi(k)) &= V(\varphi(k+1)) - V(\varphi(k)) \\ &= \varphi^T(k+1) X \varphi(k+1) - \varphi^T(k) X \varphi(k) \end{aligned} \quad (38)$$

reemplazado $\varphi(k+1)$ de la ecuación (30), se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta V(\varphi(k)) &= \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i(x(k)) \varphi^T(k) \\ & \quad [(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - X] \varphi(k) \end{aligned} \quad (39)$$

La desigualdad $\Delta V(\varphi(k)) < 0$ se cumple si

$$(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - X < 0, \quad (40)$$

$\forall i = [1, \dots, \kappa]$. Utilizando el complemento de Schur en la desigualdad (40) se tiene

$$\begin{bmatrix} -X & (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X \\ (*) & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C} + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (42)$$

donde $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} -X & \mathbb{A}_{1i}^T X \\ (*) & -X \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}$, $\mathcal{C} = [0 \ \mathbb{A}_2]$ y $\mathcal{X} = X \mathbb{Y}_i$, $\forall i = [1, \dots, \kappa]$.

Utilizando el lema de eliminación [Skelton et al. (1997)], la desigualdad (42) es equivalente a:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (43)$$

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (44)$$

con $\mathcal{B}^\perp = [I \ 0]$ y $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} [N_2^{T\perp} \ 0] & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Usando la definición de las matrices \mathcal{B}^\perp y \mathcal{D}_i se obtiene la desigualdad (31), y considerando las matrices $\mathcal{C}^{T\perp}$ y \mathcal{D}_i se obtiene la desigualdad (32).

4. CASO DE ESTUDIO

4.1 Modelo de un manipulador de movimiento horizontal de 2GDL

Los manipuladores son de gran importancia para la automatización. En esta sección se presenta el modelo matemático de un manipulador de movimiento horizontal de 2DGL, como se muestra en la Figura 1.

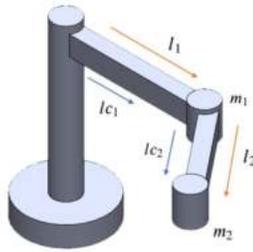


Figura 1. Brazo robótico de 2GDL.

El modelo no lineal en tiempo continuo del brazo que se mueve por el plano horizontal es [S.Bindiganavile Nagesh (2012)]:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (45)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (46)$$

donde $x(t) = [\dot{\theta}_1(t) \ \dot{\theta}_2(t) \ \theta_1(t) \ \theta_2(t)]^T$, $u(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}$,

$$y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, A(x(t)) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{P_2}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} & \frac{P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} \\ \frac{P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} & -\frac{P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ P_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ P_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \end{aligned} \quad (47)$$

$$A_{11} = \frac{P_2(b_1 - P_3 \dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} - \frac{P_3 \dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t))(P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2}$$

$$A_{12} = -\frac{b_2(P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} - \frac{P_2 P_3 \sin(\theta_2(t))(\dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2}$$

$$A_{21} = \frac{P_3 \dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t))(P_1 + P_2 + 2P_3 \cos(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} -$$

$$\frac{(P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t)))(b_1 - P_3 \dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2}$$

$$A_{22} = \frac{b_2(P_1 + P_2 + 2P_3 \cos(\theta_2(t)))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2} +$$

$$\frac{P_3 \sin(\theta_2(t))(P_2 + P_3 \cos(\theta_2(t)))(\dot{\theta}_1(t) + \dot{\theta}_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t)) - P_1 P_2}$$

donde $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son los ángulos de unión del robot, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{\theta}_2(t)$ son las velocidades angulares, $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$ son los torques de entrada del sistema. Los parámetros que se presentan en el sistema son $l_1 = 2m$ es la longitud del eslabón 1, $l_2 = 1m$ es la longitud del eslabón 2, $l_{c1} = 1m$ es la longitud centro de masa del eslabón 1, $l_{c2} = 0,5m$ es la longitud centro de masa del eslabón 2, $I_1 = 1Kgm^2$ es la inercia del eslabón 1, $I_2 = 1Kgm^2$ es la inercia del eslabón 2, $m_1 = 1Kg$ es la masa del eslabón 1, $m_2 = 1Kg$ es la masa del eslabón 2, $g = 9,81m/s^2$ es la gravedad, $b_1 = 1,22$ es el coeficiente de fricción del eslabón 1 y $b_2 = 0,24$ es el coeficiente de fricción del eslabón 2.

Examinando el modelo no lineal del sistema podemos identificar seis variables premisas, las cuales son:

$$\rho_1(t) = \frac{1}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}, \quad \rho_2(t) = \frac{\cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}$$

$$\rho_3(t) = \frac{\dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}, \quad \rho_4(t) = \frac{\dot{\theta}_2(t) \cos(\theta_2(t)) \sin(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}$$

$$\rho_5(t) = \frac{\dot{\theta}_1(t) \sin(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}, \quad \rho_6(t) = \frac{\dot{\theta}_1(t) \cos(\theta_2(t)) \sin(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos^2(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2}$$

4.2 Formulación Takagi-Sugeno

Al tener $s = 6$ variables premisas, se obtendrían $2^6 = 64$ modelos locales lineales utilizando el enfoque T-S. Si consideramos que las siguientes ecuaciones se cumplen, entonces la fuerza Coriolis y las centrifugas pueden omitirse

$$\dot{\theta}_1(t) \sin(\theta_2(t)) \approx 0 \quad (48)$$

$$\dot{\theta}_2(t) \sin(\theta_2(t)) \approx 0 \quad (49)$$

Esto nos permite simplificar el número de modelos locales lineales a $2^2 = 4$ modelos locales lineales. Sin embargo, es importante mencionar que cuando $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ toman valores grandes, las suposiciones (48) y (49) dejan de ser válidas, teniendo entonces una variación no contemplada.

Dado que se considera que las suposiciones (48) y (49) se cumplen, entonces conservamos las variables premisas $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$, las cuales varía en una región acotada $\rho(t) = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, donde $\underline{\rho}$ y $\bar{\rho}$ son el límite inferior y superior, obteniendo así las siguientes matrices:

$$A(\rho(t)) =$$

$$\begin{bmatrix} P_2 b_1 \rho_1(t) & -P_2 b_2 \rho_1(t) - P_3 b_2 \rho_2(t) & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \rho_1(t) - P_3 b_2 \rho_2(t) & b_2 \rho_1(t)(P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \rho_2(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B(\rho(t)) = \begin{bmatrix} -P_2\rho_1(t) & P_2\rho_1(t) + P_3\rho_2(t) \\ P_2\rho_1(t) + P_3\rho_2(t) & -2P_3\rho_2(t) + \rho_1(t)(P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Tomando un escenario de prueba para el sistema no lineal, se consideraron los torques de la Figura 2, obteniendo así el rango de variación de $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$.

$$\rho_1(t) : \begin{cases} \underline{\rho}_1 = \min_{\theta_1} \left\{ \frac{1}{P_3^2 \cos(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2} \right\} = -1,6 \\ \bar{\rho}_1 = \max_{\theta_1} \left\{ \frac{1}{P_3^2 \cos(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2} \right\} = 1,6 \end{cases} \quad (52)$$

$$\rho_2(t) : \begin{cases} \underline{\rho}_2 = \min_{\theta_2} \left\{ \frac{\cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2} \right\} = -1,7 \\ \bar{\rho}_2 = \max_{\theta_2} \left\{ \frac{\cos(\theta_2(t))}{P_3^2 \cos(\theta_2(t))^2 - P_1 P_2} \right\} = 1,64 \end{cases} \quad (53)$$

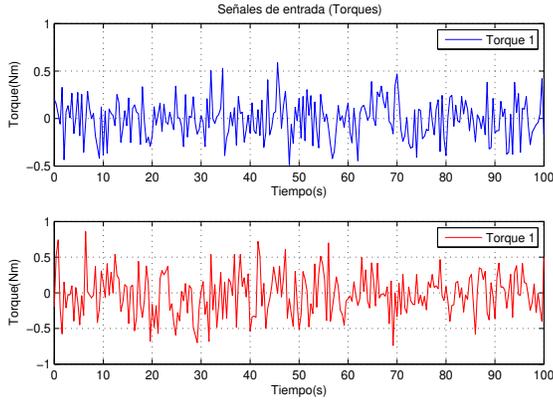


Figura 2. Gráfica de señales de entrada del manipulador

Las funciones de ponderación se muestran a continuación:

$$n_0^1 = \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_1(t)}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1}, \quad n_1^1(\rho_1(t)) = 1 - n_0^1 \quad (54)$$

$$n_0^2 = \frac{\bar{\rho}_2 - \rho_2(t)}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2}, \quad n_1^2(\rho_2(t)) = 1 - n_0^2 \quad (55)$$

En este caso el número de variables premisas son $\kappa = 4$, cuales son

$$\mu_1(\rho) = n_0^1 n_0^2, \quad \mu_2(\rho) = n_0^1 n_1^2 \quad (56)$$

$$\mu_3(\rho) = n_1^1 n_0^2, \quad \mu_4(\rho) = n_1^1 n_1^2 \quad (57)$$

De forma que se tienen 4 modelos locales lineales:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (58)$$

Por ejemplo, la regla del primer modelo es:

Si $\rho_1 = \underline{\rho}_1$ y $\rho_2 = \underline{\rho}_2$, entonces los límites inferiores de ρ_1 y ρ_2 son directamente reemplazados por las variables premisas en las matrices $A(\rho(t))$ y $B(\rho(t))$ de las ecuaciones (50) y (51), respectivamente. Un ejemplo de la composición de un modelo local es dado por :

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (59)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} P_2 b_1 \underline{\rho}_1 & -P_2 b_2 \underline{\rho}_1 - P_3 b_2 \underline{\rho}_2 & 0 & 0 \\ -P_2 b_2 \underline{\rho}_1 - P_3 b_2 \underline{\rho}_2 & b_2 \underline{\rho}_1 (P_1 + P_2) + 2P_3 b_2 \underline{\rho}_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -P_2 \underline{\rho}_1 & P_2 \underline{\rho}_1 + P_3 \underline{\rho}_2 \\ P_2 \underline{\rho}_1 + P_3 \underline{\rho}_2 & -2P_3 \underline{\rho}_2 + \underline{\rho}_1 (P_1 + P_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el modelo T-S que representa la dinámica del modelo (45) con las consideraciones de las ecuaciones (48) y (49) para obtener las simplificaciones de las matrices (50) y (51) es:

$$\dot{x}(t) = [\mu_1(\rho(t))A_1 + \dots + \mu_4(\rho(t))A_4] x(t) + [\mu_1(\rho(t))B_1 + \dots + \mu_4(\rho(t))B_4] u(t) \quad (60)$$

donde

$$A_1 = A(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2), \quad A_2 = A(\underline{\rho}_1, \bar{\rho}_2), \quad A_3 = A(\bar{\rho}_1, \underline{\rho}_2), \\ A_4 = A(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2), \quad B_1 = B(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2), \quad B_2 = B(\underline{\rho}_1, \bar{\rho}_2), \\ B_3 = B(\bar{\rho}_1, \underline{\rho}_2), \quad B_4 = B(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$$

El modelo matemático T-S del brazo robótico de 2GDL, puede ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\rho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (61) \\ y(t) = Cx(t)$$

4.3 Discretización del Sistema

Una vez obtenido el modelo T-S en tiempo continuo, se utilizó la metodología de Retenedor de Orden Cero (Zoh), con un periodo de muestreo de $T_e = 0,001$ para discretizar el modelo y obtener el modelo T-S discreto del brazo robótico de 2GDL simplificado, como:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\rho(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (62) \\ y(k) = Cx(k)$$

Considerando como entrada los torques de la Figura 2, en la Figura 3 se observan las posiciones angulares del eslabón 1 y 2.

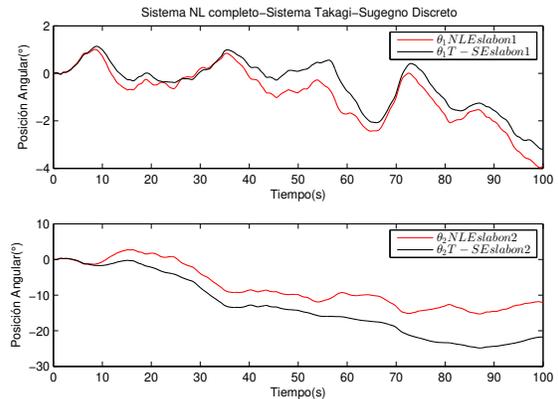


Figura 3. Comparación del sistema no lineal y el sistema T-S discreto

Las señales de color rojo representan al sistema no lineal **sin ninguna simplificación** (45), las líneas de color negro representan las posiciones del modelo de T-S discreto con las simplificaciones (48) y (49).

En la Figura 3 se puede ver que existe una diferencia entre el sistema no lineal en tiempo continuo y el sistema T-S discreto. A pesar de existir esta diferencia, se utilizó el modelo T-S discreto para el diseño del observador, siendo aplicado al modelo sin simplificaciones, esto con la finalidad de probar la robustez del observador funcional ante variaciones no contempladas, generadas por la omisión de las fuerzas centrífugas y Coriolis.

5. RESULTADOS

Considerando $y(k) = [\theta_1(k) \ \theta_2(k)]^T$ del modelo no lineal sin simplificaciones (46), el observador funcional fue utilizado para estimar las variables no medidas, siendo entonces:

$$z(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_L x(k) \quad (63)$$

con lo que se cumple la condición de observabilidad funcional de la ecuación (4).

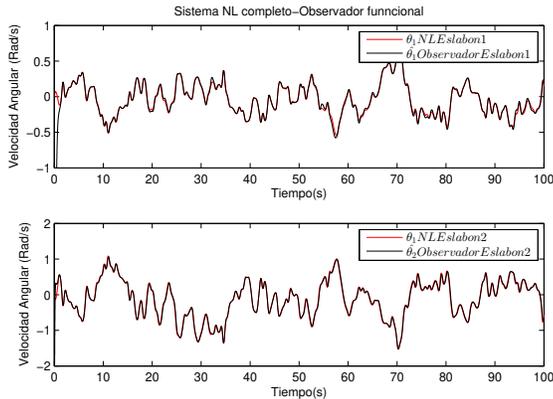


Figura 4. Comparación del sistema NL y sus estimaciones

Considerando los torques de la Figura 2, en la Figura 4 se pueden observar las velocidades angulares estimadas de los eslabones 1 y 2. De color rojo se tienen las velocidades del modelo no lineal sin simplificaciones y de color negro las estimaciones hechas por el observador funcional discreto T-S. A pesar de que en la Figura 3 se mostró una diferencia entre el modelo no lineal sin simplificaciones y el modelo T-S discreto, al aplicar el observador funcional discreto logra ser robusto ante las variaciones que generan las simplificaciones en el modelo.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una metodología de diseño de observadores funcionales para sistemas no lineales con representación Takagi-Sugeno. Se comprobaron las condiciones de estabilidad de este observador mediante LMIs, utilizando diferentes técnicas de simplificación para llegar

a la solución factible de las LMIs, estas técnicas son el lema de eliminación y el complemento de Schur. En cuanto a la estructura del GDO este presenta ventajas por la adición de los grados de libertad dando así una robustez de estimación ante los errores de modelado del sistema, además de poder aumentar el margen de estabilidad del observador.

Para constatar esto se consideró un manipulador robótico de 2GDL con movimiento horizontal con el que se probó el observador funcional teniendo desempeño aceptable ante los errores de modelado.

REFERENCIAS

- Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., and Maquin, D. (2003). State estimation via multiple observer with unknown input, application to the three tank system. In *IEEE Conference on Control Applications*.
- Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D., and Ragot, J. (2013). Model reference tracking control for nonlinear systems described by takagi-sugeno structure. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*.
- Bezzaoucha, S. (2013). *Commandé tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles Takagi Sugeno*. PhD thesis. Université de Lorraine.
- Dezhi, X. and Bin, J. (2011). Nonlinear actuator fault estimation observer: An inverse system approach via Takagi-Sugeno fuzzy model. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 22(1), 183–196.
- Flores-Martínez, M.A., Osorio-Gordillo, G.L., Vargas-Méndez, R.A., and Reyes-Reyes, J. (2019). Fuzzy functional observer for the control of the glucose-insulin system. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*.
- Heemels, W., Daafouz, J., and Miller, G. (2010). Observers design for uncertain takagi-sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. application. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Karim, B., Jalal, S., and Abdellatif, E.A. (2017). Fuzzy observer design for a class of takagi-sugeno descriptor systems subject to unknown inputs. *IEEE Conference on Control Applications*.
- Nagy-Kiss, A.M., Marx, B., Mourot, G., Schutz, G., and Ragot, J. (2011). Observers design for uncertain takagi-sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. application to a wastewater treatment plant. *Journal of Process Control*.
- Pérez-Estrada, A.J., Osorio-Gordillo, G.L., and Darouach, M. (2018). Generalized dynamic observers for quasi-LPV systems with unmeasurable scheduling functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- S.Bindiganavile Nagesh, Zs. Lendek, A.K. (2012). Adaptive fuzzy observer and robust controller for a 2-dof robot arm.
- Shodan, A. (2016). Observer based controller for nonlinear systems using takagi-sugeno fuzzy model. In *10th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*.
- Skelton, R., Iwasaki, T., and Grigoriadis, D. (1997). *A Unified Algebraic Approach To Control Design*. London. Taylor Francis.
- Yacine, Z. and Ichalal, D. (2013). Vehicle nonlinear observer for state and tire-road friction estimation. In *16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*.
- Zsófia, L., Thierry, M.G., and Babuska, R. (2010). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Springer.