

## Cascade observer design for uncertain nonlinear systems under time-delay

F. Ramírez-Rasgado \* O. Hernández-González \*\*  
C.-M. Astorga-Zaragoza \* J. Reyes-Reyes \*  
G.-L. Osorio-Gordillo \* G. Valencia-Palomo \*\*\*  
R.-A. Galaz-Bustamante \*\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.*

\*\* *CONACYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

\*\*\* *Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

---

**Abstract:** In this work a full-state observer is presented for non-uniform observable nonlinear systems in presence of uncertainties and delayed output. The observer has a cascade structure, which is based on a high-gain observer that estimates the delayed state. Subsequently, the cascade structure has  $m$  subsystems, each one estimating a part of the total delay. The last subsystem gives the delay-free state estimation. Then, it is possible to establish that the observation error will converge to a bounded value depending on the magnitude of the time delay and uncertainties. In a delay-free case the error converges to zero. The proposed cascade observer is tested to estimate the friction factor in a pipeline with delayed-output measurement.

*Keywords:* Nonlinear systems, delayed output, uncertain system and cascade observer.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas del diseño de observadores para sistemas no lineales son las incertidumbres propias de cada sistema y los retardos de medición.

Las incertidumbres en los sistemas están relacionadas a la falta de certeza del valor de ciertos parámetros, de entradas desconocidas y otros agentes externos que repercuten en la dinámica de los sistemas. Tomando en cuenta esto, Farza et al. (2014) proponen un observador de alta ganancia para un sistema con incertidumbres, con el cual se logra la estimación de los estados con un error acotado a la incertidumbre. Tréangle et al. (2019) diseñan un observador de alta ganancia el cual cuenta con un filtro para reducir el efecto del ruido en el sistema. Otra problemática que se puede presentar en el diseño de los observadores es proponer esquemas de estimación para sistemas no uniformemente observables, cuya observabilidad depende de las entradas y los estados (Farza et al., 2019; Hernández González et al., 2019).

Los retardos en los sistemas pueden aparecer en los estados, en las señales de control, en las señales de salida o de forma combinada. Estos retardos pueden deberse a factores como: la medición de los sensores, retardos en la transmisión e inercias no modeladas. Algunos ejemplos

de sistemas en donde se presentan retardos son: control de procesos químicos (Gonzalez et al., 2019), redes de comunicación (Sanz et al., 2016), sistemas biológicos (Borri et al., 2017). Otros ejemplos se muestran en Fridman (2014); Targui et al. (2019). Un diseño de observador para sistemas lineales se propone en Languet et al. (2018), mientras que para sistemas LTV con retardos en Weston et al. (2017), y Sanz et al. (2019).

Como antes se mencionó, uno de los factores que ocasionan retardos en los sistemas son los sensores. Una forma de solucionar esto es por medio de un observador en cascada, el cual a grandes rasgos se conforma de un observador como base y un número de predictores que estiman cierta parte del retardo en el sistema. Un observador para un sistema lineal se propone en Cacace et al. (2014) y para sistemas no lineales en Farza et al. (2015); Tréangle et al. (2018); Farza et al. (2017).

Este artículo se enfoca en el diseño de un observador en cascada para sistemas no lineales no uniformemente observables con incertidumbres donde la salida medida está afectada por retardos de tiempo constantes. Esta clase de sistemas se presenta en la Sección 2. Este sistema debe cumplir con la condición de entrada persistente ya que su observabilidad depende de ella. El diseño del observador en cascada se muestra en la Sección 3. Se muestra su convergencia ante la presencia de incertidumbre en cada predictor de la cascada. Posteriormente, en la Sección

---

\* Los autores agradecen al Tecnológico Nacional de México por el apoyo otorgado a través del proyecto 8017.20-P.

4, se evalúa el desempeño del observador mediante la estimación de los parámetros de una función de potencia para aproximar el factor de fricción en una tubería. Las conclusiones de este trabajo se presentan en la Sección 5.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PRELIMINARES

Considere la siguiente clase de sistema no lineal multivariable afín al estado con retardos en la salida:

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x} = A(u, x)x + \varphi(u, x) + B\varepsilon \\ y_\tau = Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) = x_\tau^1 \end{cases} \quad (1)$$

con

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{(q-1)} \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x^1) \\ \varphi_2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi_{(q-1)}(u, x^1, \dots, x^{(q-1)}) \\ \varphi_q(u, x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A_{(q-1)}(u, x^1, \dots, x^{(q-1)}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n_1} \\ 0_{n_1} \\ \vdots \\ I_{n_1} \end{bmatrix}$$

$$C = [I_{n_1 \times n_1} \ 0_{n_1 \times n_2} \ \dots \ 0_{n_1 \times n_q}].$$

donde  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  con  $n_1 = p$ ,  $\sum_{k=1}^q n_k = n$  y

cada  $A_k(u, x)$  es una matriz triangular con respecto a  $x$  de dimensión  $n_k \times n_{k+1}$ , i.e.  $A_k(u, x) = A(u, x^1, \dots, x^k)$ ,  $k = 1, \dots, q-1$ ;  $\varphi(x(t), u(t))$  es un vector de funciones no lineales que tiene una estructura triangular con respecto a  $x$ ;  $u \in \mathbb{R}^s$  representa la entrada del sistema;  $y_\tau \in \mathbb{R}^p$  representa la salida con retardo del sistema;  $\tau > 0$  es el retardo de medición;  $\varepsilon : [-\tau, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una función desconocida que describe las incertidumbres del sistema que puede depender del estado y se tratará como una función desconocida que depende explícitamente del tiempo  $t$  para  $t \geq -\tau$ . Como se mencionó anteriormente, el principal objetivo de este trabajo es diseñar un observador en cascada para el sistema mostrado en la Ec. (1), considerando la salida con retardo. Para el diseño del observador se tienen que considerar algunas suposiciones:

**A1** El estado  $x(t)$  y la entrada  $u(t)$  están acotadas, i.e.,  $x(t) \in X$  y  $u(t) \in U$ , donde  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $U \subset \mathbb{R}^m$  son conjuntos compactos.

**A2** Las funciones  $A(u, x)$  y  $\varphi(u, x)$  son Lipschitz con respecto a  $x$  y uniformes con respecto a  $u$ , donde  $(u, x) \in U \times X$ . Sus constantes de Lipschitz son denotadas por  $L_A$  y  $L_\varphi$ . Se denota  $x_M$  a la cota superior de  $x$ ,  $x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|$ .

**A3** La función desconocida  $\varepsilon(t)$  es esencialmente acotada, i.e.,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$   $\text{Ess.sup.}_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon$ .

Dado que el estado está confinado al conjunto acotado  $x$ , se pueden asumir las extensiones Lipschitz de las no

linealidades, usando funciones de saturación suaves. Por lo consiguiente, se asume que las extensiones se realizaron y que las funciones  $A(u, x)$  y  $\varphi(u, x)$  provienen de estas extensiones. Esto permite concluir que para cualquier entrada acotada  $u \in U$ , las funciones  $A(u, x)$  y  $\varphi(u, x)$  son globalmente Lipschitz con respecto a  $x$  y están acotadas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Debido a que matriz  $A(u, x)$  del sistema dado por la Ec. (1) está formada por funciones, se dice que el sistema es no uniformemente observable, por lo tanto, se debe asumir lo siguiente:

**A4** La entrada  $u$  y el estado  $\hat{x}$  es tal que para cualquier trayectoria  $\xi$  del sistema (1), empezando en  $\hat{x}(0) \in X$ ,  $\exists \theta^* > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $\forall \theta \geq \theta^*$  y  $\forall t \geq 1/\theta$ , se satisface la siguiente condición de excitación persistente:

$$\int_{t-1/\theta}^t \Phi_{u, \hat{x}}(s, t)^T C^T C \Phi_{u, \hat{x}}(s, t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2 \quad (2)$$

donde  $\alpha(\theta) \geq 1$  es una función que satisface  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$ . Por lo que  $\lambda_{\min}(S) \geq \frac{\varepsilon^{-1} \delta_0}{\alpha(\theta)}$ .

Para el caso en que la salida no presenta retardo ( $y_d(t) = y(t)$ ) y asumiendo que se cumplen las suposiciones **A1-A4**, se propone un observador de alta ganancia en Hernández González et al. (2019) para el sistema (1). Las ecuaciones del observador son las siguientes:

$$\dot{\hat{x}} = A(u, \hat{x})\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (3)$$

$$\dot{S} = \theta (-S - A(u, \hat{x})^T S - SA(u, \hat{x}) + C^T C), \quad S(0) = S^T(0) \quad (4)$$

donde  $S(t)$  es una matriz semidefinida positiva;  $\theta > 0$  es el parámetro de ajuste. De acuerdo con el enfoque de alta ganancia, se tiene que la matriz  $\Delta_\theta$  es:  $\Delta_\theta = \text{diag} [I_{n_1} \ I_{n_1}/\theta \ \dots \ I_{n_q}/\theta^{(q-1)}]$ . Así que el error de observación está acotado:

$$\|\hat{x}\| \leq \theta^q \mu(\theta) \zeta e^{-\theta \nu_\theta t} \|\hat{x}(0)\| + \frac{2\mu(\theta)}{\nu_\theta} \zeta \delta_\varepsilon \quad (5)$$

donde  $\mu(\theta)$  es un polinomio en  $\theta$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \nu_\theta = +\infty$ ,  $\zeta > 0$  es una constante positiva que no depende de  $\theta$  y  $\delta_\varepsilon$  es el esencial supremo de las incertidumbres (suposición **A3**). Es importante recalcar que en presencia de incertidumbres ( $\delta_\varepsilon \neq 0$ ), el error de observación convergerá a un valor acotado, el cual se puede hacer más pequeño con valores grandes de  $\theta$ . Por otro lado, para el caso en que no existen incertidumbres ( $\delta_\varepsilon = 0$ ), el error de observación convergerá exponencialmente a cero.

## 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR EN CASCADA

Se adoptará la siguiente notación:

$$x_j = x \left( t - \tau + \frac{j}{m} \tau \right), \quad u_j = u \left( t - \tau + \frac{j}{m} \tau \right)$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon \left( t - \tau + \frac{j}{m} \tau \right), \quad j = 0, \dots, m$$

para  $t \geq -\frac{j}{m} \tau$  donde  $m$  es un integrador positivo que se definirá posteriormente. El observador propuesto se conforma de  $m+1$  subsistemas. El primer subsistema es la base de la cascada, la cual está formada por un observador

de alta ganancia que provee la estimación del estado con retardo; los demás subsistemas son los predictores. De acuerdo con Farza et al. (2015), el predictor de la posición  $j$  en la cascada predice el estado del predictor anterior con un horizonte de predicción igual a  $\frac{\tau}{m}$ . Por lo tanto, el  $m$ -ésimo predictor dará la estimación del estado sin retardo. Se definen las siguientes propiedades:

$$x_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = x_{j-1} \text{ y } u_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

De acuerdo a la notación adoptada, el estado del sistema con retardo se describe como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A(u_0, x_0)x_0 + \varphi(u, x_0) + B\varepsilon_0 \\ y_\tau &= Cx_0 \end{aligned} \quad (7)$$

El sistema (7) está en la forma del sistema (1), por lo tanto se puede diseñar un observador de la forma dada por las Ecs.(3)-(4) para la estimación de  $x_0$ :

$$\dot{\hat{x}}_0 = A(u_0, \hat{x}_0)\hat{x}_0 + \varphi(u_0, \hat{x}_0) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x}_0 - y_\tau) \quad (8)$$

$$\dot{S} = \theta(-S - A(u_0, \hat{x}_0)^T S - SA(u_0, \hat{x}_0) + C^T C), \quad S(0) = S^T(0) \quad (9)$$

donde  $S(t)$  es una matriz semidefinida positiva y  $\theta > 0$  es el parámetro de ajuste. En las siguientes subsecciones se hablará del diseño de los predictores.

### 3.1 Estructura de los predictores

Esta sección se enfoca en el caso de  $j = 1, \dots, m$ . El propósito es diseñar un predictor que estime el estado  $x_j$ , el cual se define como se muestra a continuación:

$$\dot{x}_j = A(u_j, x_j)x_j + \varphi(u_j, x_j) + B\varepsilon_j \quad (10)$$

El sistema (10) se puede reescribir como:

$$\dot{x}_j = \bar{A}x_j + \varphi(u_j, x_j) + (A(u_j, x_j) - \bar{A})x_j + B\varepsilon_j \quad (11)$$

donde  $\bar{A} = -\lambda I$  es una matriz Hurwitz,  $I$  es una matriz identidad y  $\lambda > 0$  es un número real positivo. Considerando la Ec. (11), el estado  $x_j$  puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} x_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_{j-1} + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)}(\varphi(u_j(s), x_j(s)) \\ &+ (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s)) ds \end{aligned} \quad (12)$$

donde el estado estimado por el predictor sera  $\hat{x}_j$ . Considerando la estructura del observador para el sistema con retardo dado por la Ec.(8), se diseña el observador para  $x_j$ :

$$\dot{\hat{x}}_j = A(u_j, \hat{x}_j)\hat{x}_j + \varphi(u_j, \hat{x}_j) - G_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (13)$$

donde  $G_j$  es el término de corrección que se abordará posteriormente. Con  $G_0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} G_0 &= -\theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x}_0 - y_\tau) \\ &= -\theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x}_0 - x_0) \\ G_0 &\triangleq -\theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T\tilde{x}_0 \end{aligned}$$

donde  $S$  es como se muestra en la Ec. (9),  $\tilde{x}_0$  es el error de observación correspondiente al estado con retardo, tal que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_0\| &\leq \theta^q \mu(\theta) \zeta e^{-\theta\nu_\theta t} \|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{2\mu(\theta)}{\nu_\theta} \zeta \delta_\varepsilon \\ &\leq \rho_0 e^{-\alpha_0 t} + M_0 \delta_\varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\rho_0$  es un polinomio en  $\theta$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \alpha_\theta = +\infty$ ,  $M_0 > 0$  es una función decreciente de  $\theta$  y finalmente  $\delta_\varepsilon$  es el esencial supremo de las incertidumbres (suposición **A3**).

La ecuación del predictor para el sistema (13) es:

$$\dot{\hat{x}}_j = \bar{A}\hat{x}_j + \varphi(u_j, \hat{x}_j) + (A(u_j, \hat{x}_j) - \bar{A})\hat{x}_j - G_j \quad (15)$$

donde  $\bar{A}$  es igual a lo presentado en la Ec. (11). Por lo tanto, la predicción  $\hat{x}_j$  es:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x} \left( t - \frac{\tau}{m} \right) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)}(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) \\ &+ (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s) - G_j(s)) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora, considerando dos predictores sucesivos y considerando la Ec. (12), por ejemplo  $\hat{x}_j$  y  $\hat{x}_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x}_{j-1} + r_j + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)}(\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) \\ &+ (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\hat{x}_j(s)) ds \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  son funciones vectoriales diferenciales a lo largo del tiempo que deben ser determinadas simultáneamente con los términos de corrección  $G_j$ , considerando que se cumpla la Ec.(17) para cualquier  $t \geq 0$ .

### 3.2 Determinación del termino de corrección

Restando la Ec.(17) de la Ec.(16) se obtiene:

$$e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}(\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}) - r_j = e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} G_j(s) ds.$$

Diferenciando con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}(\dot{\hat{x}}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}) - \dot{r}_j &= \\ \bar{A}e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}(\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}) - \bar{A}r_j + G_j - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior  $\dot{\hat{x}}_{j-1}$  y  $\dot{\hat{x}}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right)$  mostrada en la Ec. (13) y despejando  $G_j$  se obtiene:

$$\begin{aligned} G_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1} + A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_{j-1} \right. \\ &+ \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, \hat{x}_{j-1})) \\ &- \bar{A} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1} \right) - (\dot{r}_j - \bar{A}r_j) \end{aligned} \quad (19)$$

Si se elige  $r_j$  tal que  $\dot{r}_j = \bar{A}r_j$ , el término de corrección queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_j &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1} + A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_{j-1} \right. \\ &+ \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, \hat{x}_{j-1})) \\ &- \bar{A} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Es necesario recalcar que la matriz  $\bar{A}$  es Hurwitz, entonces existe un número  $\beta \geq 1$  tal que (Khalil and Grizzle, 2002):

$$\forall t \geq 0 : \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{-\bar{a}t}, \quad (21)$$

donde  $\bar{a} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |\mathcal{R}(\lambda_i(\bar{A}))|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son los  $n$  valores propios de la matriz  $\bar{A}$  con valores negativos. Las ecuaciones del observador para el sistema (1) son las siguientes:

$$\text{OBS} \begin{cases} \dot{\hat{x}}_j = A(u_j, \hat{x}_j)\hat{x}_j + \varphi(u_j, x_j) - G_j, \quad j = 0, \dots, m \\ G_0 = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x}_0 - y_r), \text{ y para } j = 1, \dots, m, \\ G_j = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1} + A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right. \\ \quad \left. - A(u_{j-1}, \hat{x}_j)\hat{x}_{j-1} + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \right. \\ \quad \left. - \varphi(u_{j-1}, \hat{x}_{j-1}) \right) - \bar{A} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1} \right) \end{cases} \quad (22)$$

donde  $S$  está gobernada por la solución de la Ec.(9),  $\bar{A}$  es una matriz Hurwitz,  $\Delta_\theta$  es una matriz diagonal definida anteriormente y  $\theta > 0$  es el parámetro de ajuste.

**Teorema 1.** Considere el sistema (1), sujeto a las suposiciones **A1-A3**. Entonces para cada entrada acotada  $(u, \hat{x})$  que satisfaga la suposición **A4**, existe una constante  $\theta_0$  tal que para cada  $\theta > \theta_0$  y si el número  $m$  es seleccionado tal que:

$$\eta \frac{\tau}{m} < 1, \text{ con } \eta = \beta(\sqrt{n}(L_{\bar{\varphi}} + L_{\bar{A}}x_M) + \|\bar{A} - A(u_j, \hat{x}_j)\|) \quad (23)$$

donde  $L_{\bar{A}}$  y  $L_{\bar{\varphi}}$  son constantes que satisfacen la suposición **A2**,  $x_M$  es la cota superior de  $x$ , entonces el error de observación  $\tilde{x}_j$  para  $j = 1, \dots, m$  es:

$$\|\tilde{x}_j\| \leq \rho_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (24)$$

donde

$$\rho_j = \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \chi_m^j \rho_0 \|\tilde{x}_0(0)\| \\ + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_m^k \|r_{j-k}(0)\|, \quad (25)$$

$$M_j = \beta \chi_m^j M_0 + \frac{\beta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \chi_m^i \quad (26)$$

donde las funciones  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, j$  son  $\dot{r}_j = \bar{A}r_j$ ;  $M_0$  y  $\rho_0$  se muestran en Ec. (14);  $\delta_\varepsilon$  es el esencial supremo de las incertidumbres dadas en **A3** y  $\chi_m$  es:

$$\chi_m = \frac{e^{-\bar{\alpha}_j}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}}. \quad (27)$$

donde  $\bar{\alpha}_j = \min \{\alpha_{j-1}, \bar{a}, \bar{a} \frac{\tau}{m}\}$ .

### 3.3 Prueba del Teorema 1

Se define  $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$  como el error de estimación para  $j = 0, \dots, m$ . Considerando las Ecs. (12) y (17):

$$\tilde{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) \\ + \bar{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))x_j(s) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A})\tilde{x}_j(s) \\ - B\varepsilon_j(s)) ds \quad (28)$$

donde  $\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) = \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s))$  y  $\bar{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) = A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - A(u_j(s), x_j(s))$ . Es importante recalcar que la elección de cada  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  es  $\dot{r}_j = \bar{A}r_j$ . Entonces, tomando en cuenta la Ec. (21) se obtiene:

$$\|r_j(t)\| = \|e^{\bar{A}t} r_j(0)\| \leq \beta e^{\bar{a}t} \|r_j(0)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (29)$$

De acuerdo a la hipótesis de inducción,  $\tilde{x}_{j-1}$  convergerá a un valor acotado, es decir, existe  $\rho_{j-1}, \bar{\alpha}_{j-1}, M_{j-1} > 0$ , tal que:  $\|\tilde{x}_{j-1}\| \leq \rho_{j-1} e^{-\bar{\alpha}_{j-1}t} + M_{j-1} \delta_\varepsilon$ . Y considerando:

$$\|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \leq \sqrt{n} L_{\bar{\varphi}} \|\tilde{x}_j(s)\|$$

$$\|\bar{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| \leq \sqrt{n} L_{\bar{A}} \|\tilde{x}_j(s)\| x_M,$$

entonces la desigualdad (24) es obtenida por inducción para  $j$ . Primero la desigualdad es provocada para  $j = 1$ . Después de algunas manipulaciones matemáticas y usando el Lema A.1 de Farza et al. (2018), se obtiene:

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \rho_1 e^{-\bar{\alpha}_1 t} + M_1 \delta_\varepsilon \quad (30)$$

donde

$$\rho_1 = \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta(\rho_0 e^{-\bar{\alpha}_1} + \|r_1(0)\|) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) \\ M_1 = \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( M_0 e^{-\bar{\alpha}_1} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon$$

con  $\eta = \beta(\sqrt{n}(L_{\bar{\varphi}} + L_{\bar{A}}x_M) + \|\bar{A} - A(u_j, \hat{x}_j)\|)$  y  $\bar{\alpha}_1 = \min \{\alpha_0, \bar{a}, \bar{a} \frac{\tau}{m}\}$ . Entonces, para  $j \geq 2$ , se asume que para cada  $i = 1, \dots, j-1$ , existe  $\rho_i$  y  $M_i$  tal que:

$$\|\tilde{x}_i(t)\| \leq \rho_i e^{-\bar{\alpha}_i t} + M_i \delta_\varepsilon, \quad t \geq 0. \quad (31)$$

El objetivo es demostrar que existe  $\rho_j$  y  $M_j$  cuyas expresiones están dadas en el Teorema 1, tal que

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \rho_j e^{-\bar{\alpha}_j t} + M_j \delta_\varepsilon, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

A continuación se define para  $1 \leq i \leq j$

$$v_i = \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\tilde{\varphi}(u_i(s), \hat{x}_i(s), x_i(s)) \\ + \bar{A}(u_i(s), \hat{x}_i(s), x_i(s))x_i(s) + (A(u_i(s), \hat{x}_i(s)) - \bar{A})\tilde{x}_i(s) \\ - B\varepsilon(s)) ds \quad (33)$$

Iterando la relación dada en la Ec.(28), se obtiene

$$\tilde{x}_j = e^{\bar{\alpha}_j} \tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^j (e^{\bar{\alpha}_j} \rho_i) + \sum_{i=1}^j (e^{\bar{\alpha}_j} M_i) \quad (34)$$

Después de algunas manipulaciones matemáticas y considerando nuevamente el Lema A.1 de Farza et al. (2018), se puede establecer la Ec. (32) donde  $\rho_j$  y  $M_j$  están definidas por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\rho_j = \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta (e^{-\bar{\alpha}_j} \rho_0 + \|r_j(0)\|) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{\alpha}_j} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds, \\ M_j = \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{\alpha}_j} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^j e^{-\bar{\alpha}_j} \rho_i \right. \\ \left. + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{\alpha}_j} M_i \right).$$

Con esto se permite obtener de igual manera las ecuaciones del Teorema 1.  $\square$

#### 4. RESULTADOS

Para evaluar el funcionamiento del observador propuesto, se busca estimar los parámetros desconocidos  $(\alpha, \gamma)$  de la función de potencia propuesta en Torres and Verde (2018). Esta función de potencia se utiliza para aproximar el factor de fricción el cual se utiliza en la relación de Darcy-Weisbach, evitando así el cálculo de la fricción por medio de la función implícita de Colebrook-White. Al utilizar la ley de potencia, se obtiene una aproximación de la ecuación del momentum que representa el comportamiento del fluido en la tubería cuando está en estado quasi-estable (Chaudhry, 2014), como se muestra a continuación:

$$\dot{Q}(t) = -\alpha Q^\gamma(t)|Q(t)| + \underbrace{\frac{gA}{L}}_{\sigma} (H_{in}(t) - H_{out}(t)) \quad (35)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$  son parámetros heurísticos. Los parámetros físicos son: la fuerza de gravedad  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , el área transversal  $A = 0.07070 \text{ m}^2$  y la longitud total  $L = 2000 \text{ m}$ . Por otra parte  $H_{in} = 30 + \sin(0.08t) \text{ mca}$ ,  $H_{out} = 10 \text{ mca}$  son las presiones de entrada y salida respectivamente. Como el propósito de esta simulación es la estimación de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , se considera el siguiente vector de estados:  $\xi(t) = [Q(t) \ \alpha Q^\gamma(t) \ \gamma]$ . Con esto la matriz  $B$  es absorbida por el cambio de coordenadas. Reescribiendo el sistema mostrado en la Ec. (35) y considerando el vector de estados anteriormente definido, se obtiene:

$$\mathcal{S}\mathcal{Y}\mathcal{S} \begin{cases} \dot{\xi} = A(u, \xi)\xi + \varphi(u, \xi) \\ y_\tau = C\xi(t - \tau) = \xi_1(t - \tau) = Q_\tau \end{cases} \quad (36)$$

donde:

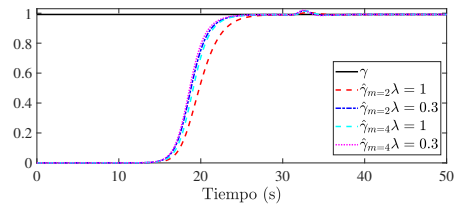
$$A(u, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & -|Q| & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha Q^\gamma}{Q} g(\xi, u) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varphi(u, \xi) = \begin{bmatrix} \sigma u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0], \quad g(\xi, u) = -\alpha Q^\gamma |Q| + \sigma u$$

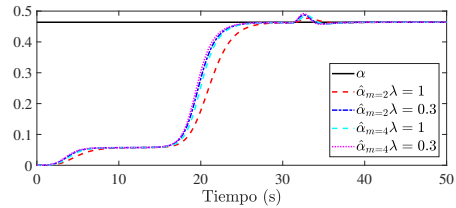
La diferencia de presiones representan la entrada del sistema  $u = H_{in} - H_{out}$  y la salida con retardo de tiempo es  $Q_\tau$ . Para el sistema mostrado en la Ec. (36) se diseña un observador en cascada que tiene la forma dada en la Ec. (22). Es importante resaltar que la matriz  $A(u, \xi)$  está en función de los estados y la entrada, por lo que el sistema es no uniformemente observable. Los estados originales se obtienen a partir del vector de estados propuestos como se muestra a continuación:  $Q = \xi_1$ ,  $\gamma = \xi_3$  y  $\alpha = \xi_2/\xi_1^{\xi_3}$ . Las condiciones iniciales para la simulación son:  $\xi(0) = [0.12 \ 0.06 \ 0.99]^T$ ,  $\hat{\xi}(0) = [0.12 \ 0.01 \ 0.08]^T$ ,  $S(0) = I_{3 \times 3}$ ,  $\tau = 2s$  y  $\theta = 1.25$ . Para ver el efecto del retardo con diferentes particiones, se diseñan cuatro observadores con:  $m = [2, 4]$  y  $\lambda = [0.3, 1]$ . En la Tabla 1 se muestra la estructura de cada subsistema  $j$  considerando un  $m = 2$ .

Tabla 1. Observador en cascada para  $m = 2$

Subsistema	Ecuación
$j = 0$	$\dot{\hat{x}}_0 = A(u_0, \hat{x}_0)\hat{x}_0 + \varphi(u_0, \hat{x}_0) - G_0$ $G_0 = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x}_0 - y_\tau)$
$j = 1$	$\dot{\hat{x}}_1 = A(u_1, \hat{x}_1)\hat{x}_1 + \varphi(u_1, \hat{x}_1) - G_1$ $G_1 = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (G_0 + A(u_0, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - A(u_0, \hat{x}_1)\hat{x}_0 - \bar{A}(\hat{x}_1 - \hat{x}_0) + (\varphi(u_0, \hat{x}_1) - \varphi(u_0, \hat{x}_0)))$
$j = m = 2$	$\dot{\hat{x}}_2 = A(u_2, \hat{x}_2)\hat{x}_2 + \varphi(u_2, \hat{x}_2) - G_2$ $G_2 = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} (G_1 + A(u_1, \hat{x}_2)\hat{x}_2 - A(u_1, \hat{x}_2)\hat{x}_1 - \bar{A}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) + (\varphi(u_1, \hat{x}_2) - \varphi(u_1, \hat{x}_1)))$



(a) Estimación de  $\gamma$



(b) Estimación de  $\alpha$

Fig. 1. Estimación de los parámetros desconocidos.

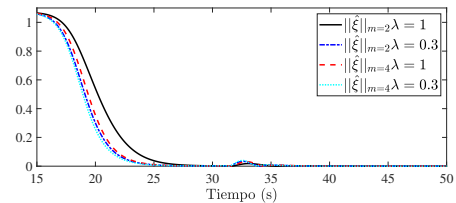


Fig. 2. Norma del error de observación.

En la Fig. 1 se muestra la estimación de los parámetros desconocidos por medio del observador. Los parámetros convergen a  $\gamma = 0.9917$  y  $\alpha = 0.4368$ . En la Fig. 2 se muestra la norma del error de observación, en donde se muestra que todos los observadores convergen a un valor cercano a cero y que se presentan diferentes comportamientos cambiando  $\lambda$ .

#### 5. CONCLUSIÓN

Se logró el diseño de un observador en cascada para un sistema no lineal no uniformemente observable con incertidumbres, donde la salida presenta retardos de tiempo. Se demuestra que para el caso de incertidumbres el sistema convergerá a un error de observación acotado por la magnitud de la incertidumbre y del retardo. Para el caso

en que no presenten incertidumbres, el error de estimación convergerá a cero. El observador se evaluó en simulación en donde se logró estimar los parámetros de una ley de potencia para aproximar el coeficiente de fricción en una tubería en presencia de un retardo relativamente grande en comparación con la dinámica del sistema.

## REFERENCIAS

- Borri, A., Cacace, F., De Gaetano, A., Germani, A., Manes, C., Palumbo, P., Panunzi, S., and Pepe, P. (2017). Luenberger-like observers for nonlinear time-delay systems with application to the artificial pancreas: The attainment of good performance. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(4), 33–49.
- Cacace, F., Germani, A., and Manes, C. (2014). Predictor-based control of linear systems with large and variable measurement delays. *International Journal of Control*, 87(4), 704–714.
- Chaudhry, M.H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., M'Saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2017). Observer design for a class of uncertain systems with delayed outputs. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 1427–1432.
- Farza, M., Rodríguez-Mata, A., Robles-Magdaleno, J., and M'Saad, M. (2019). A new filtered high gain observer design for the estimation of the components concentrations in a photobioreactor in microalgae culture. *IFAC-PapersOnLine*, 52(1), 904–909.
- Farza, M., Bouraoui, I., Menard, T., Abdennour, R.B., and M'Saad, M. (2014). Sampled output observer design for a class of nonlinear systems. In *2014 European Control Conference (ECC)*, 312–317. IEEE.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., Targui, B., M'Saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2018). Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs. *Automatica*, 89, 125–134.
- Farza, M., M'Saad, M., Menard, T., Fall, M.L., Gehan, O., and Pigeon, E. (2015). Simple cascade observer for a class of nonlinear systems with long output delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(12), 3338–3343.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Springer.
- Gonzalez, A., Castillo, A., Garcia, P., and Albertos, P. (2019). Robust stabilization of time-varying delay systems with predictor-observer based controller. *IFAC-PapersOnLine*, 52(1), 213–218.
- Hernández González, O., Ramírez-Rasgado, F., Guerrero-Sánchez, M.E., Pérez-Gómez, A., Astorga-Zaragoza, C., and Moreno-Vazquez, J. (2019). Continuous-discrete observer for nonlinear systems with sampled measurements: Application to a 1-DOF helicopter. In *Congreso Nacional de Control Automático 2019*, 507–512.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J.W. (2002). *Nonlinear Systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Langueh, K., Zheng, G., and Floquet, T. (2018). Impulsive fixed-time observer for linear time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 355(7), 3354–3366.
- Sanz, R., Garcia, P., and Krstic, M. (2019). Observation and stabilization of LTV systems with time-varying measurement delay. *Automatica*, 103, 573–579.
- Sanz, R., Garcia, P., Zhong, Q.C., and Albertos, P. (2016). Predictor-based control of a class of time-delay systems and its application to quadrotors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(1), 459–469.
- Targui, B., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C.M., Guerrero-Ramírez, G.V., and Guerrero-Sánchez, M.E. (2019). A new observer design for systems in presence of time-varying delayed output measurements. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(1), 117–125.
- Torres, L. and Verde, C. (2018). Nonlinear estimation of a power law for the friction in a pipeline. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13), 67–72.
- Tréangle, C., Farza, M., and M'Saad, M. (2019). Observer design with mixed continuous and multirate sampled outputs involving multiple time-varying delays. In *2019 19th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, 676–686. IEEE.
- Tréangle, C., Menard, T., Farza, M., and M'Saad, M. (2018). A cascade predictor for nonlinear systems with a constant output delay. *IFAC-PapersOnLine*, 51(2), 421–426.
- Weston, J., Malisoff, M., and Mazenc, F. (2017). Sequential predictors under time-varying delays: Effects of delayed state observations in dynamic controller. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 4351–4356. IEEE.